

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	1

Разложим число 9261 на простые множители:

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Тогда в восьмизначном

числе должно быть три 3^4 и

три 7^4 , а остальные — 1^4

или одна 9^4 , одна 3^4 , три 7^4 , а остальные — 1^4 , чтобы произведение цифр было равно 9261

(1) 33377711 — набор 1

(2) 93777111 — набор 2

Для набора 1 кол-во вариантов равно:

~~$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2$$~~

(Сначала расставляем 3^4 , потом для каждой расстановки расставляем 7^4 , затем — 1^4)

Для набора 2:

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1$$

Тогда кол-во значимых чисел

$$N = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 + C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 =$$

$$= C_8^3 \cdot C_5^3 (1 + 2) = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot 3 =$$

$$= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$$

Ответ: 280 чисел

Задача 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x \left(\cos 2x \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 2x \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\begin{aligned} (1) & \left[\cos 2x - \sin 2x = 0 \right. \\ (2) & \left[\sqrt{2} \sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x) = 0 \right. \end{aligned}$$

$$(1) \quad \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \sqrt{2} \sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\cancel{\sqrt{2}} \sin 7x - \cancel{\sqrt{2}} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\left[\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \right.$$

$$\left[\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \right.$$

$$\left[\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi n \\ \frac{9x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}$ $n \in \mathbb{Z}$

Задача 3

① $(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$

② $y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

② $y^2 - y(x+4) - 2x(x-4) = 0$

$$D = (x+4)^2 + 8x(x-4) = x^2 + 16 + 8x + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y = \frac{(x+4) \pm (3x-4)}{2} = \begin{cases} 2x \\ -x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ 1. y = 2x \\ 2. y = 4-x \end{cases}$$

1. $y = 2x$

$$\begin{cases} (x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2 - 6\ln x} \\ y > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

т.к. $y = 2x$, то условия $x > 0$ достаточно

$$\begin{cases} y=2x \\ x>0 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} (x^2(2x)^4)^{-\ln x} - (2x)^{\ln 2 - 6\ln x} = 0$$

$$\textcircled{3} (2x)^{-4\ln x} (x^2 - 2\ln x - (2x)^{\ln 2 - 2\ln x}) = 0$$

$$(2x)^{-4\ln x} > 0$$

$$\Rightarrow x^{-2\ln x} - (2x)^{\ln 2 - 2\ln x} = 0$$

$$x^{-2\ln x} = (2x)^{\ln 2 - 2\ln x}$$

$$\ln(x)^{-2\ln x} = \ln(2x)^{\ln 2 - 2\ln x}$$

$$-2\ln^2 x = (\ln 2 - 2\ln x)(\ln 2 + \ln x)$$

$$-2\ln^2 x = \ln^2 2 + \ln 2 \cdot \ln x - 2\ln x \cdot \ln 2 - 2\ln^2 x$$

$$\ln^2 2 = \ln x \cdot \ln 2$$

$$\ln 2 = \ln x$$

$$x = 2$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2x \\ x>0 \\ x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

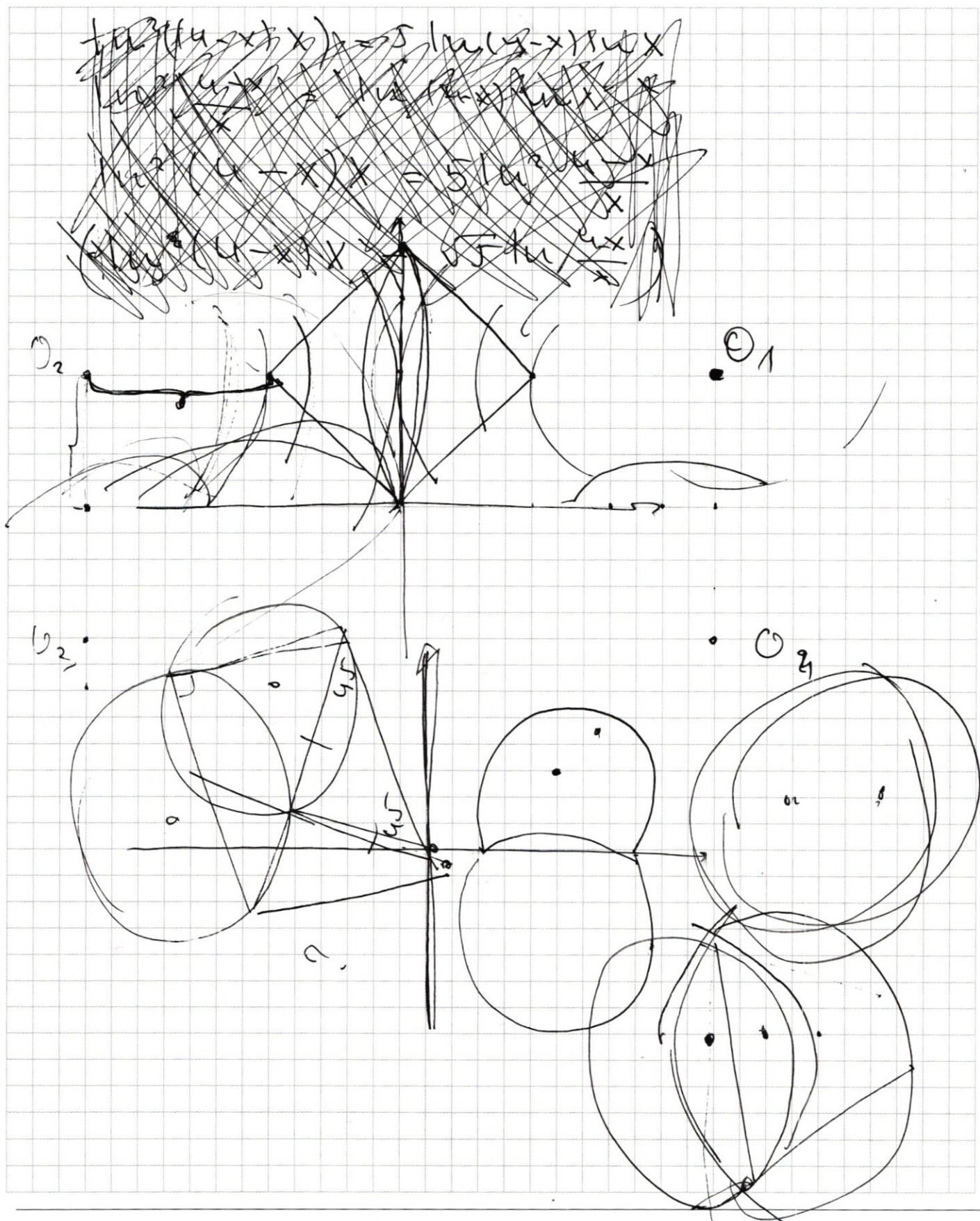
$$2. \begin{cases} y=4-x \\ (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x} \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x^{-2\ln x} (4-x)^{-4\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) - 7\ln x} \\ y=4-x \\ 4-x>0 \\ x>0 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} 0 = (4-x)^{-4\ln x} (x^{-2\ln x} - (4-x)^{\ln(4-x) - 3\ln x})$$

$$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) - 3\ln x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$-2 \ln^2 x = (\ln(4-x) - 3 \ln x) \ln(4-x)$$

$$2 \ln^2 x + \ln^2(4-x) - 3 \ln x \ln(4-x) = 0$$

$$2 \ln x (\ln x - \ln(4-x)) + \ln(4-x) (\ln(4-x) - \ln x) = 0$$

$$(\ln x - \ln(4-x)) (2 \ln x - \ln(4-x)) = 0$$

$$\begin{cases} \ln x = \ln(4-x) \\ 2 \ln x = \ln(4-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4-x \\ x^2 = 4-x \\ x = 2 \\ x^2 + x - 4 = 0 \\ x = 2 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + x - 4 &= 0 \\ D &= 1 + 16 = 17 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ y = 4 - x \\ x > 0 \\ 4 - x > 0 \end{cases}$$

~~1111111111~~

$$\begin{array}{rcl} 4 - \frac{1 + \sqrt{17}}{2} & \neq & 0 \\ 8 & \neq & 1 + \sqrt{17} \\ 7 & \neq & \sqrt{17} \\ \hline \frac{1 - \sqrt{17}}{2} & \neq & 0 \\ 1 & \neq & \sqrt{17} \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = 4 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{7 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2); (2; 4); \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{7 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

$$\begin{cases} |x+5+y| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

ровно 2
решения

$$|x+5+y| + |y-x+5| = 10$$

можно получить из графика
у-ния $|x+y| + |y-x| = 10$
с помощью параллельного
переноса на $\mathbb{R}^1 \{0,5\}$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$

~~мы строим~~

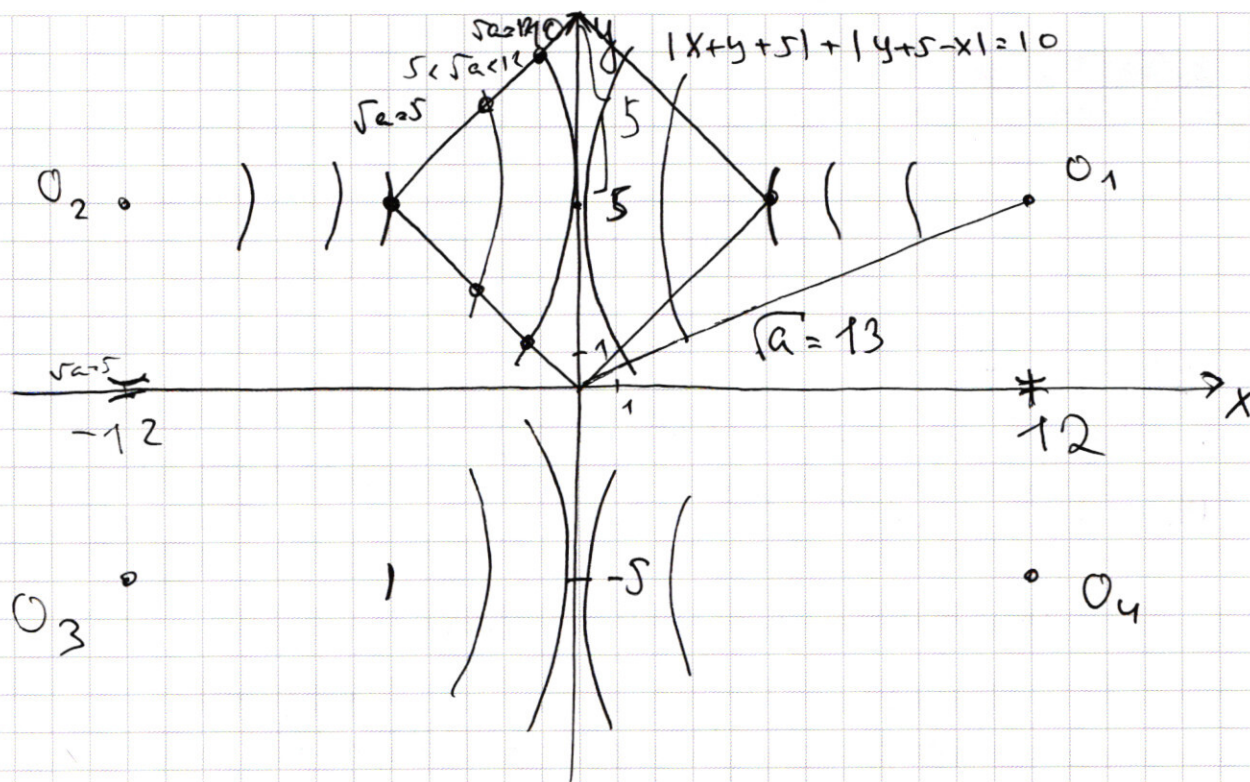
1) строим окр. с центром

$$O_1(12,5) \text{ и } r_1 = \sqrt{a},$$

~~мы строим окр. с центром~~

части окружности, где $x < 0$ или
 $y < 0$ - стираем.

2) ~~мы строим~~ Отражаем полученную фигуру
симметрично относит. Ox , а затем
новую фигуру симметрично отражаем
относительно Oy . Получаем 4 неполные
окружности с центрами $O_1(12,5)$, $O_2(-12,5)$,
 $O_3(-12,-5)$, $O_4(12,-5)$



при $\sqrt{a} < 5$ - решений нет

$\sqrt{a} = 5$ - два решения

$5 < \sqrt{a} < 12$ - больше двух решений

$12 < \sqrt{a} < 13$ - больше двух решений

$\sqrt{a} = 13$ - два решения

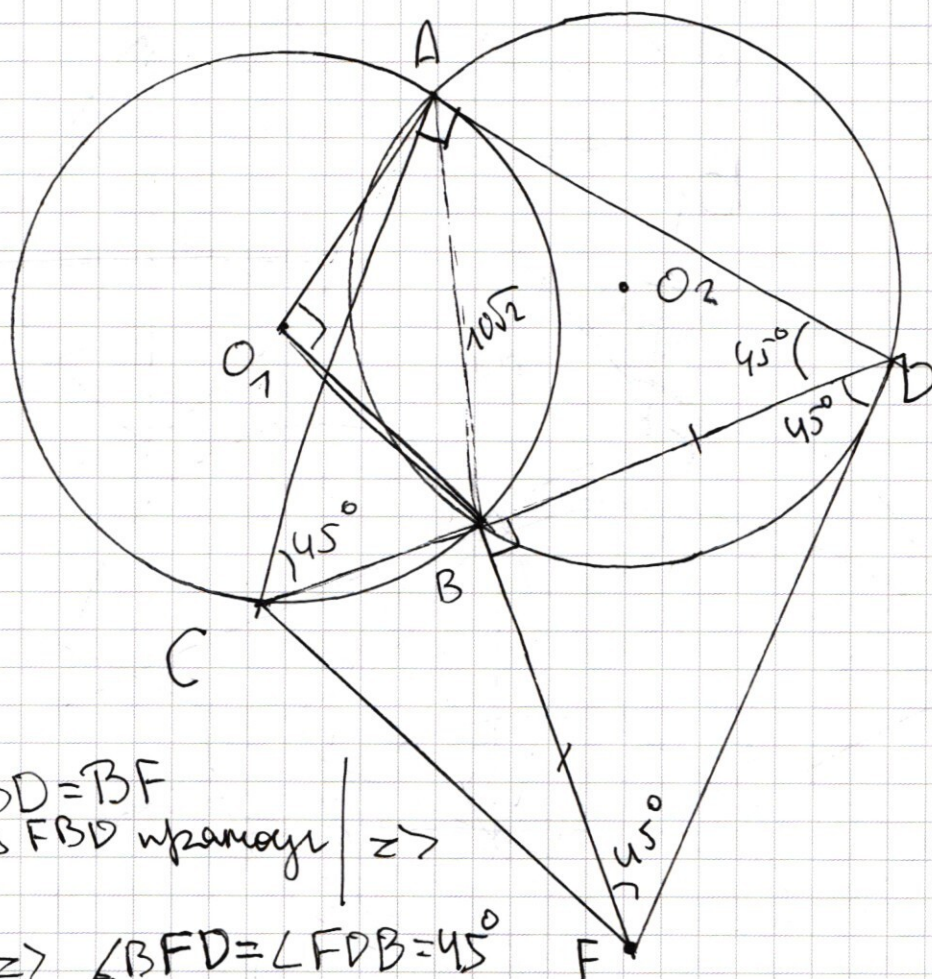
$\sqrt{a} > 13$ - нет решений

Два решения, когда $\sqrt{a} = 5$ $a = 25$
 $\sqrt{a} = 13$ $a = 169$

Ответ: 25, 169

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6



а) $BD = BF$
 $\triangle FBD$ — равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BFD = \angle FDB = 45^\circ$

2. $\angle ADB$ и $\angle ACB$ — вписанные и опираются

на равные дуги $AB \Rightarrow \angle ADB = \angle ACB$

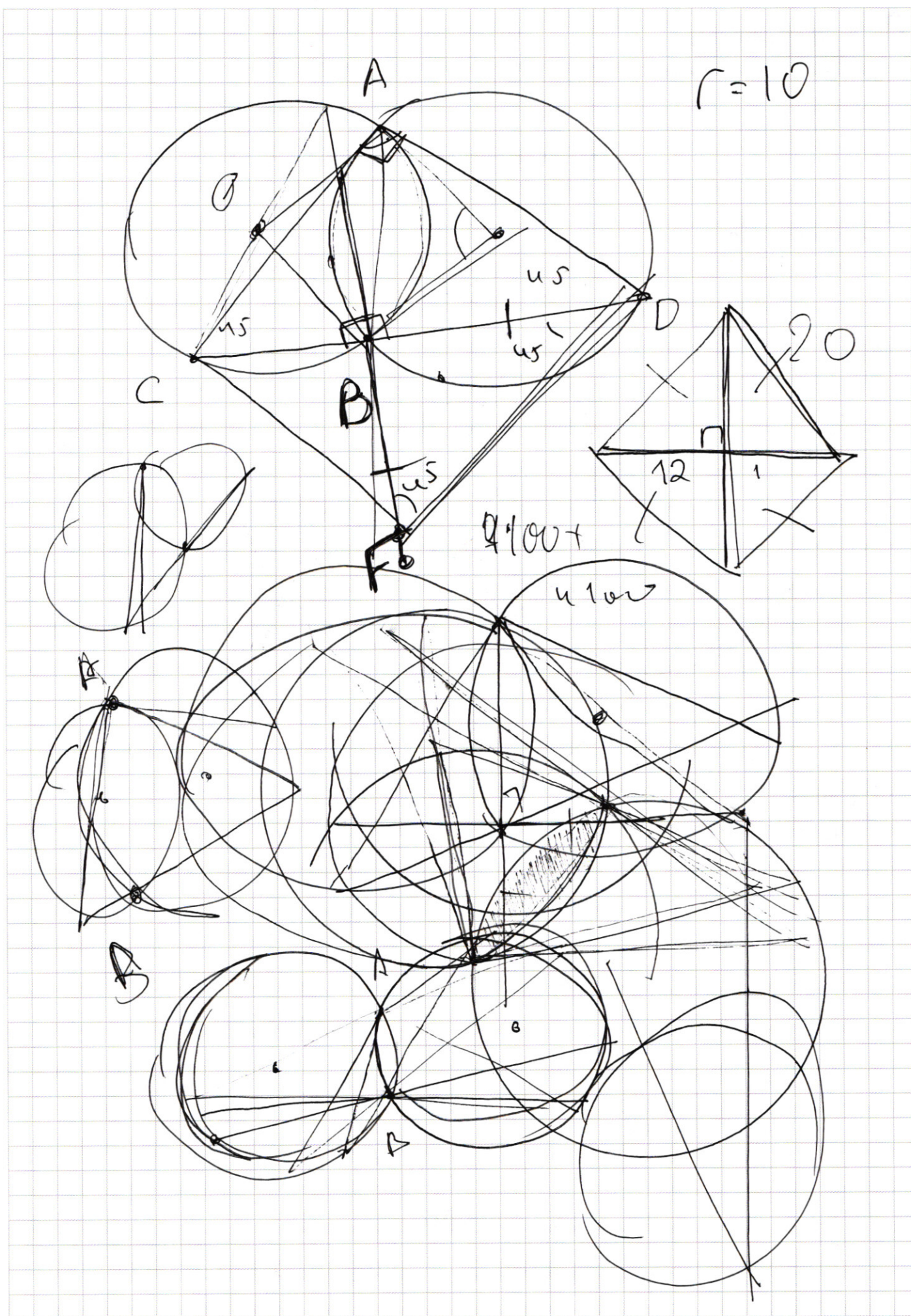
$\triangle ADC$ — равнобедренный $\Rightarrow$

$\angle CAD = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle ADC = \angle DCA = 45^\circ$

$\triangle CAD$ — р/б, $CA = AD$

$\angle AO_1B$ — центральный $\angle AO_1B = 2\angle ACB = 90^\circ$



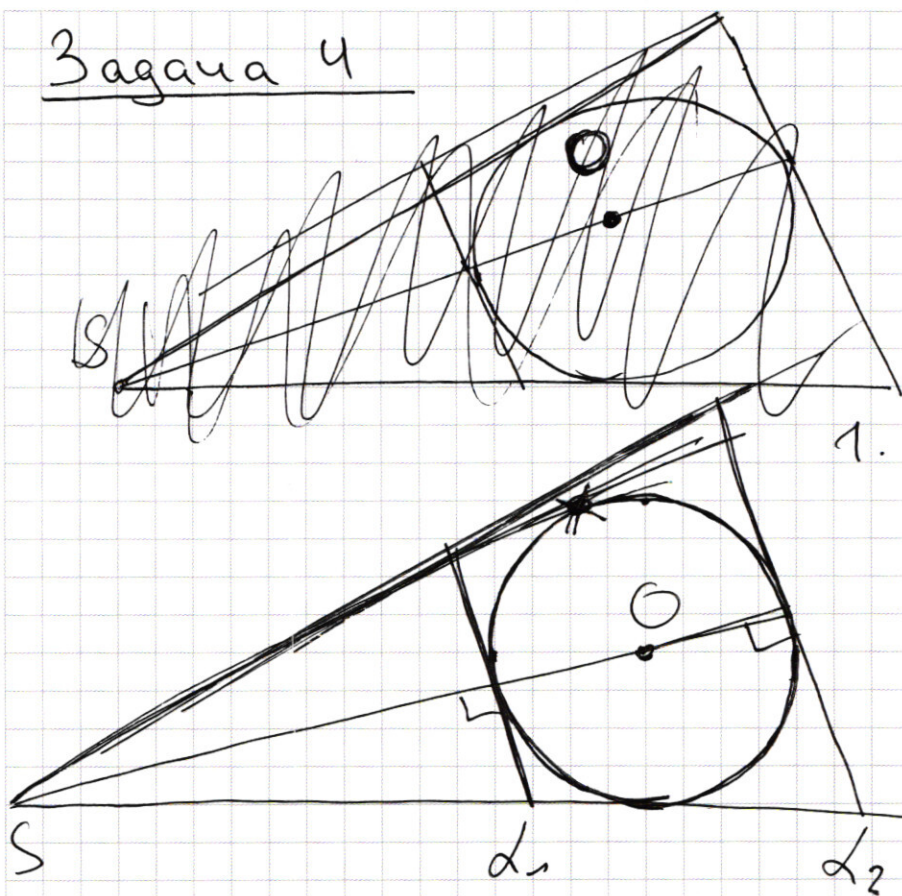


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AB = 10\sqrt{2}, \text{ т.к.}$$

$$AO_1 = O_1B = 10, \angle AO_1B = 90^\circ$$

Задача 4



1. Пусть α_1 —
пересекает
границы
угла в точках
 A_1, B_1, C_1 ,
а α_2 —
в точках A_2, B_2, C_2
 $SO \cap \alpha_1 = H_1$
 $SO \cap \alpha_2 = H_2$

$$\left\{ \begin{aligned} V_{SAB_1C_1} &= \frac{1}{3} SH_1 \cdot S_{\alpha_1} \\ V_{SA_2B_2C_2} &= \frac{1}{3} SH_2 \cdot S_{\alpha_2} = \frac{1}{3} (SH_1 + 2r) \cdot 16S_{\alpha_1} \\ \frac{V_{SA_2B_2C_2}}{V_{SA_1B_1C_1}} &= \frac{AB_2 \cdot SA_2 \cdot SC_2}{SC_1 \cdot SA_1 \cdot SB_1} = \frac{(SH + 2r)^3}{SH^3} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{V_{SA_2B_2C_2}}{V_{SA_1B_1C_1}} = \frac{(SH + 2r)^3}{SH^3} = \frac{(SH + 2r)}{SH} 16$$

$$\frac{SH + 2r}{SH} = 4$$

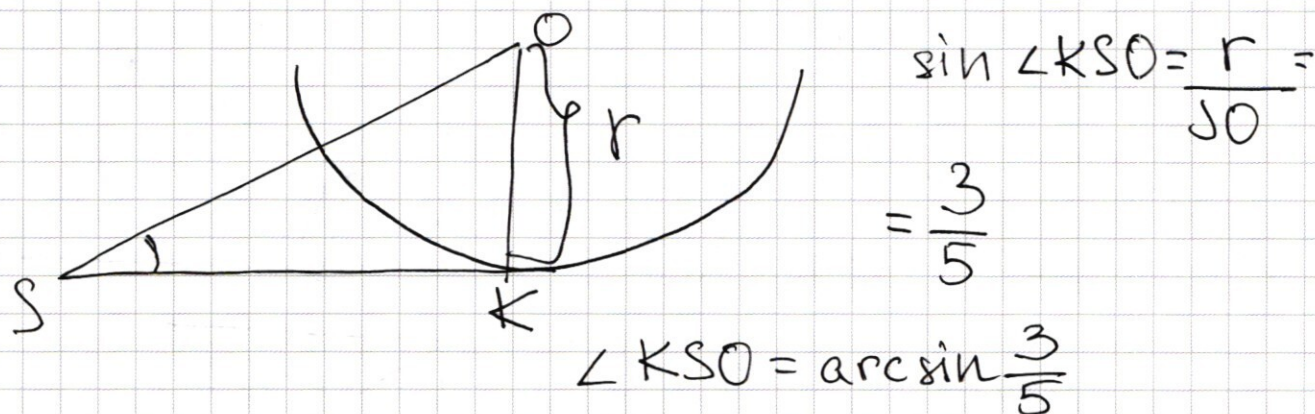
$$2r = 3SH = 3(SO - r)$$

$$5r = 3SO$$

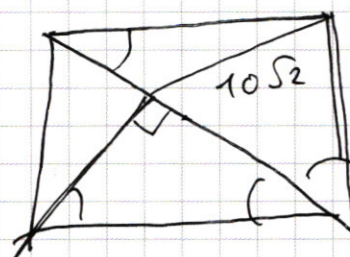
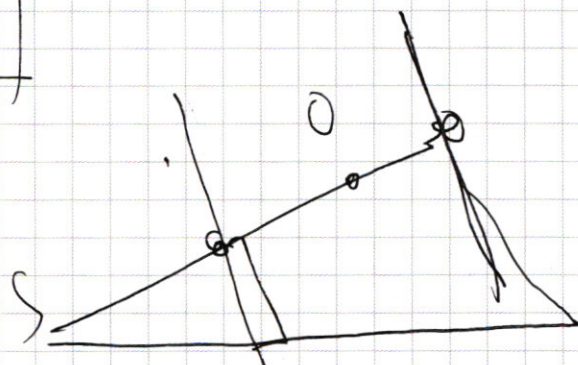
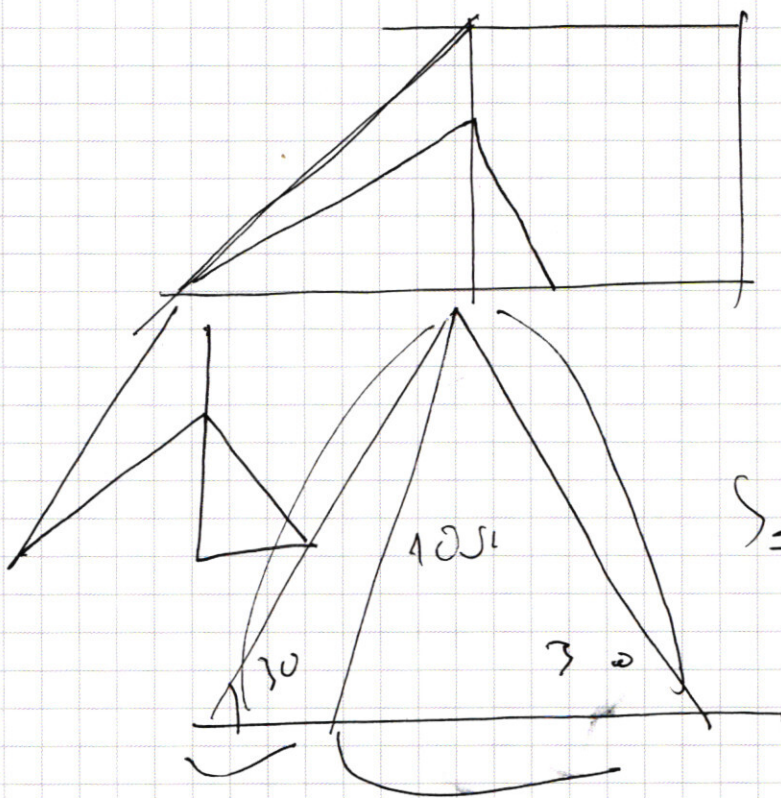
$$\frac{r}{SO} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{r}{SH} = \frac{2}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



2.



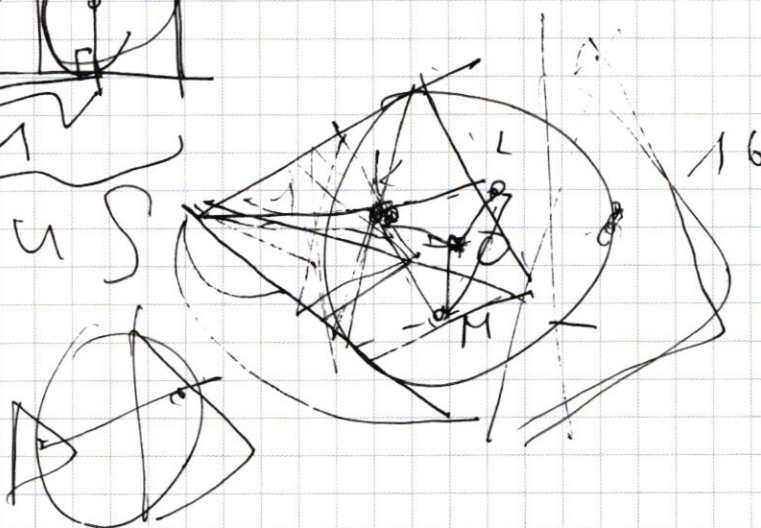
$$CB^2 = AC^2 + 200 + 2AC \cdot 10\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ$$

$$BF^2 = AD^2 + 200 + 2AD \cdot 10\sqrt{2} \cdot \cos(180^\circ)$$

$$BF^2 + CB^2 = CD^2 + 400 + 20\sqrt{2}$$



$$AC \cdot 20\sqrt{2} (\cos 45^\circ + \sin 45^\circ)$$



$$\frac{50}{50+r} = \frac{1}{4}$$

$$50+r = 4 \cdot 50$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin^2 x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\sqrt{2} \sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos^2 2x + \sqrt{2} \sin^2 2x + 2 \dots = 0$$

$$\sin 2x (\sqrt{2} \sin 2x - 2 \sin 7x) + \cos 2x (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

$$\sin \cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \sin(2x - \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

$$\cos^2 x \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 2x \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - 1 \dots$$

$$2 \sin 7x$$

$$\sin 2x + \sin 7x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y} - 7 \ln x$$

~~$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2 - 6 \ln x}$$~~

$$(16x^6)^{-\ln x} - (2x)^{\ln 2 - 6 \ln x} = 0$$

$$(2x)^{-4 \ln x} \cdot x^2 - (2x)^{\ln 2 - 6 \ln x} = 0$$

$$(2x)^{-4 \ln x} (x^2 - (2x)^{\ln 2 - 2 \ln x}) = 0$$

$$> 0$$

$$x^2 - (2x)^{\ln 2 - 2 \ln x} = 0 \quad x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = 1 +$$

$$\ln x^2 = \ln (2x)^{\ln 2 - 2 \ln x}$$

$$\ln x^{-2 \ln x} (4-x)^{-4 \ln x} =$$

$$= \ln (4-x)^{-4 \ln x} - 7 \ln x =$$

$$= (4-x)^{-4 \ln x} \left(x^{-2 \ln x} - (4-x)^{-4 \ln x} \right) \ln \frac{4-x}{x^3}$$

$$-2 \ln^2 x = \ln(4-x) (\ln(4-x) - 3 \ln x)$$

$$-2 \ln^2 x = \ln^2(4-x) - 3 \ln x \ln(4-x)$$

$$\ln^2 x + \ln^2(4-x) - 3 \ln x \ln(4-x)$$

$$(\ln x - \ln(4-x))^2 - 2 \ln x \ln(4-x) = 0$$

$$\ln^2 \frac{4-x}{x} = \ln(4-x) \ln x \quad \ln^2(4-x) x = 5 \ln(4-x) \ln x$$

$$x^{-2\ln x} = (2x)^{\ln 2 - 2\ln x}$$

$$-2\ln x \cdot \ln x = \ln 2x \cdot (\ln 2 - 2\ln x)$$

$$2\ln^2 x + 2\ln 2x (\ln 2 + \ln x) \cdot$$

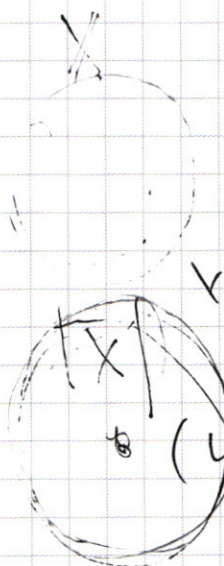
$$- (\ln 2 - 2\ln x) =$$

$$\frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2$$

$$2\ln^2 x + \ln^2 2 + \ln x \cdot \ln 2 - 2\ln x \ln 2 -$$

$$- 2\ln x \ln 2 = 0$$

$$\ln^2 2 - \ln x \ln 2$$



$$x = 4 - y$$

$$(4 - y)^{-2\ln(4 - y)}$$

$$= y^{\ln y - 3\ln(4 - y)}$$

$$y^{-4\ln(4 - y)}$$

$$\frac{(x+1)^2}{(y+1)^2} = 4$$

$$y^{-4\ln(4 - y)}$$

$$(4 - y)^{-2\ln(4 - y)} - y^{\ln y - 3\ln(4 - y)}$$

$$-2\ln^2(4 - y) = \ln y (\ln y - 3\ln(4 - y))$$

$$-2\ln^2(4 - y) = \ln^2 y - 3\ln(4 - y)\ln y$$

$$\ln(4 - y)(3\ln y - 2\ln(4 - y)) = \ln^2 y$$