

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

✓ 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $y=4$) $y^2 - 2xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$ | 1.2

$$2y^2 - 4xy - 4x^2 + 8x - 8y = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-4)^2 + (y-x)^2 - 4(x-2)^2 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)^2 - (2x-4)^2 = x^2 - (y-4)^2$$

$$\Leftrightarrow (y-3x+4)(y+x-4) = (x-y+4)(x+y-4)$$

I. $x+y=4$

II. $y-3x+4 = x-y+4$

$$\Leftrightarrow 2y = 4x \Leftrightarrow y = 2x$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)}$$

$$\ln x \text{ определен} \Rightarrow x > 0,$$

$$\ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \text{ определено} \Rightarrow \frac{y}{x^2} > 0 \Rightarrow y > 0.$$

Логарифмируем обе части

$$-\ln x \ln(x^2 y^4) = \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \ln y \quad (*)$$

$$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 2 \ln x) \ln y$$

$$-2(\ln x)^2 - 4 \ln y \ln x = (\ln y)^2 - 2 \ln x \ln y$$

$$\Leftrightarrow (\ln y)^2 - 3 \ln x \ln y + 2(\ln x)^2 = 0 \quad (+)$$

Если $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$$(*) \Rightarrow \ln(y) \ln(y) = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow \ln x \neq 0$$

это не удов. условию 2- системы

Поделим обе стороны (+) на $(\ln x)^2 \neq 0$.

$$\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^2 - 3\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\ln y}{\ln x} - 1\right)\left(\frac{\ln y}{\ln x} - 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x$$

$$\Rightarrow x = y$$

или

$$\ln y = 2 \ln x = \ln x^2$$

$$y = x^2$$

1) Найдите $x = y$

Используем, что $x + y = 4$ или $y = 2x$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x = y \end{cases} \rightarrow x = 2, y = 2$$

$$\begin{cases} x = y \\ y = 2x \end{cases} \rightarrow x = 0, y = 0, \text{ но ранее мы получили, что } x > 0.$$

2) Найдите $y = x^2$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x = 0 \text{ } \phi$$

$$x = 2, y = 4$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 4 \end{cases} \rightarrow x^2 + x = 4$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \quad \phi$$

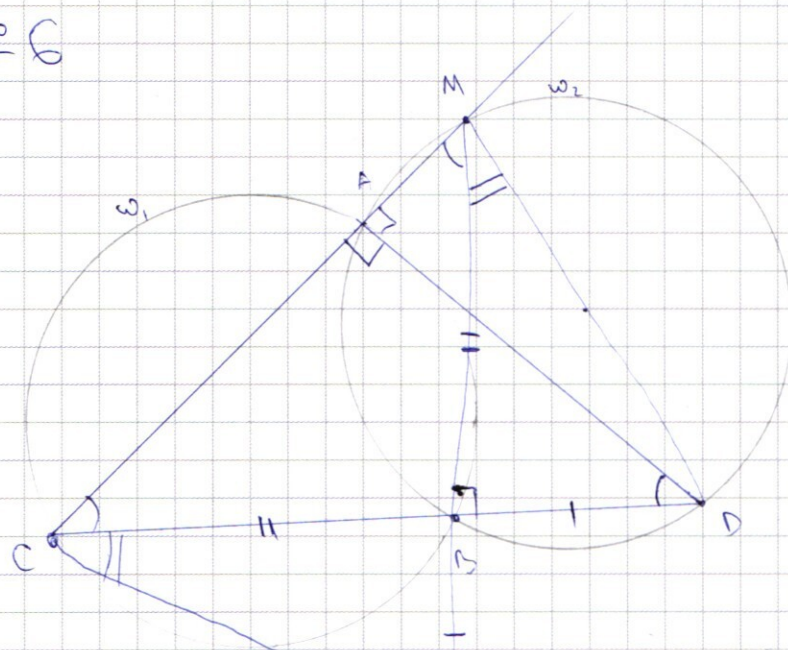
$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} > 0$$

$$y = \frac{17 + 1 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{18 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{9 - \sqrt{5}}{2} > 0$$

$\Rightarrow$ Ответ
Решение задачи: $(2, 2); (2, 4); \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)$
Проверка

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Nº 6



ω_1, ω_2 - окружности.

$$R \approx 10$$

д) Пусть $CA \cap \omega_2 = M$  $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle MAD = 90^\circ \Rightarrow MD \perp \omega_2$
 $\Rightarrow \angle MBD = 90^\circ, \Rightarrow F, M, D$ — на одной прямой.

Monde gibt AB & w_1 u w_2 Farben zu zu einem $(*)$

$$\angle ACB = \angle AMB, \text{ wo } \angle MCB = \angle CAB = \angle MAB \Rightarrow BC = MB.$$
$$\angle CBP = 90^\circ \Rightarrow CF^2 = CB^2 + BP^2 = MB^2 + PD^2 = MD^2 = (2R)^2$$
$$\Rightarrow CF = 2R = 2 \cdot 10 = 20$$

(1) p_u $A = M$ kureno ke ukuhlolweni

Omben: $cf = 20$

$$CB = DM$$
$$BA = BD$$
$$\angle CBP \cong \angle MBQ \cong 90^\circ$$
$$\Rightarrow \triangle CBP = \triangle MBD \Rightarrow \text{g.h.k.}$$
$$\angle BCF = \angle BMD$$

(*) $\Rightarrow \angle ACB = \angle AMB = \angle ADB$ (+)

$$(+)\Rightarrow \angle ACD = \angle ACB = \angle ADB = \angle ADC \Rightarrow AD = AC$$

$$(+)\Rightarrow \angle ACP = \angle AMD$$

$$\Rightarrow \sin \angle ACP = \sin \angle AMD = \frac{AD}{MD} = \frac{AC}{20}$$

$$S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} AC \cdot CP \cdot \sin \angle ACP = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot 20 \cdot \frac{AC}{20} = \frac{1}{2} AC^2$$

Сечение можно с относительно $\omega_2 \Rightarrow$
(Теорема о хордах)

$$CA \cdot CM = CB \cdot CD = CB(BC + BD)$$

$$CM^2 = BM^2 + CB^2 = 2BC^2 = 2 \cdot 12^2 \Rightarrow CM = 12\sqrt{2}$$

$$BD^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 16^2 \Rightarrow BD = 16$$

$$\Rightarrow CD = BD + BC = 12 + 16 = 28$$

$$AC = \frac{BC \cdot CD}{CM} = \frac{28 \cdot 12}{12\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}$$

$$AC^2 = 14^2 \cdot 2$$

$$S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} AC^2 = 14^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 14^2 = 196$$

Ответ: $S_{\triangle ACP} = 196$

$$CP = 20$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1 $9261 = 21^3 = 3^3 \cdot 7^3$

так как 7 - простое, у числа должно быть ровно 3 цифры 7.

А значит произведение остальных цифр должно быть $\frac{9261}{7^3} = 3^3$.

цифры $\leq 9 \Rightarrow$ у нас 2 варианта остальных цифр $(9, 3, 1, 1, 3)$
или $(3, 3, 3, 1, 1, 3)$

$\Rightarrow$ Набор цифр должен совпадать с 1) $(9, 3, 1, 1, 1, 7, 7, 7)$

2) $(3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 3)$

$$\Rightarrow \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8}{2} \cdot \frac{8!}{6 \cdot 2} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{24} =$$

$$40 \cdot 42 = 420 \cdot 4 = 1680.$$

Ответ: 1680

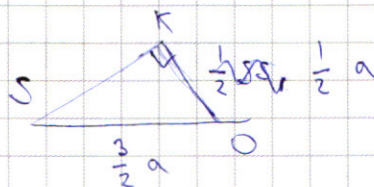
№6

Обозначим как f_3 , сечение трехгранного угла через точку KLM.

Заметим, что $SK = SL = SM$. Пусть $SS_1 = a$

Найдем SK.

$$\sin \angle KSO = \frac{1}{3}$$



$$OK^2 + SK^2 = OS^2 \quad (\text{Пифагор})$$

$$\Rightarrow SK^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{9}{4}a^2$$

$$SK^2 = 2a^2 \Rightarrow \boxed{SK = \sqrt{2}a}$$

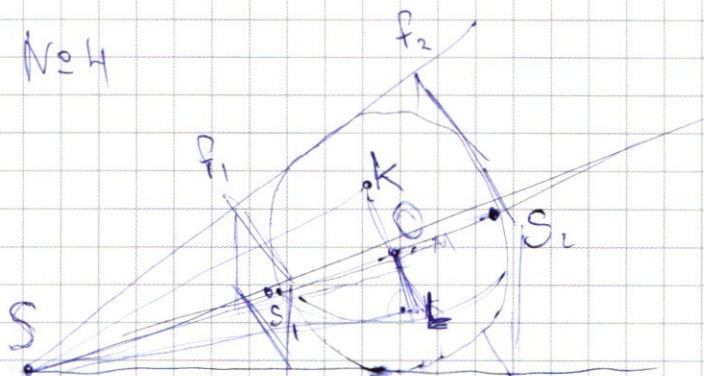
$$\frac{S_{f_3}}{S_{f_1}} = k^2 = \left(\frac{SK}{SS_1} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}a}{a} \right)^2 = 2$$

$$\Rightarrow S_{f_3} = 2 \cdot S_{f_1} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}.$$

$$S_{\text{перп KLM}} = 2.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть радиус шара R .

Обозначим сечения призмыного угла плоскостями касающимися сферу
и $\perp SO$, соответственно F_1 и F_2 , где F_1 ближе к S .

Заметим, что разность от S до F_1 и F_2 пирамида с вершинами в
 S , а с основаниями F_1 и F_2 , соответственно подобна (F_1 и F_2 оба $\perp SO$)

Пусть S_1 проекция S на F_1 и S_2 проекция S на F_2 .

т.к.

$$\frac{S_{F_2}}{S_{F_1}} = k^2, \text{ где } k - \text{коэффициент подобия} \Rightarrow \frac{16}{1} = k^2 \\ \Rightarrow k = 2,$$

$$\Rightarrow SS_1 = S_1S_2. \text{ Но помним, что } S_1S_2 - \text{диаметр сферы,}$$

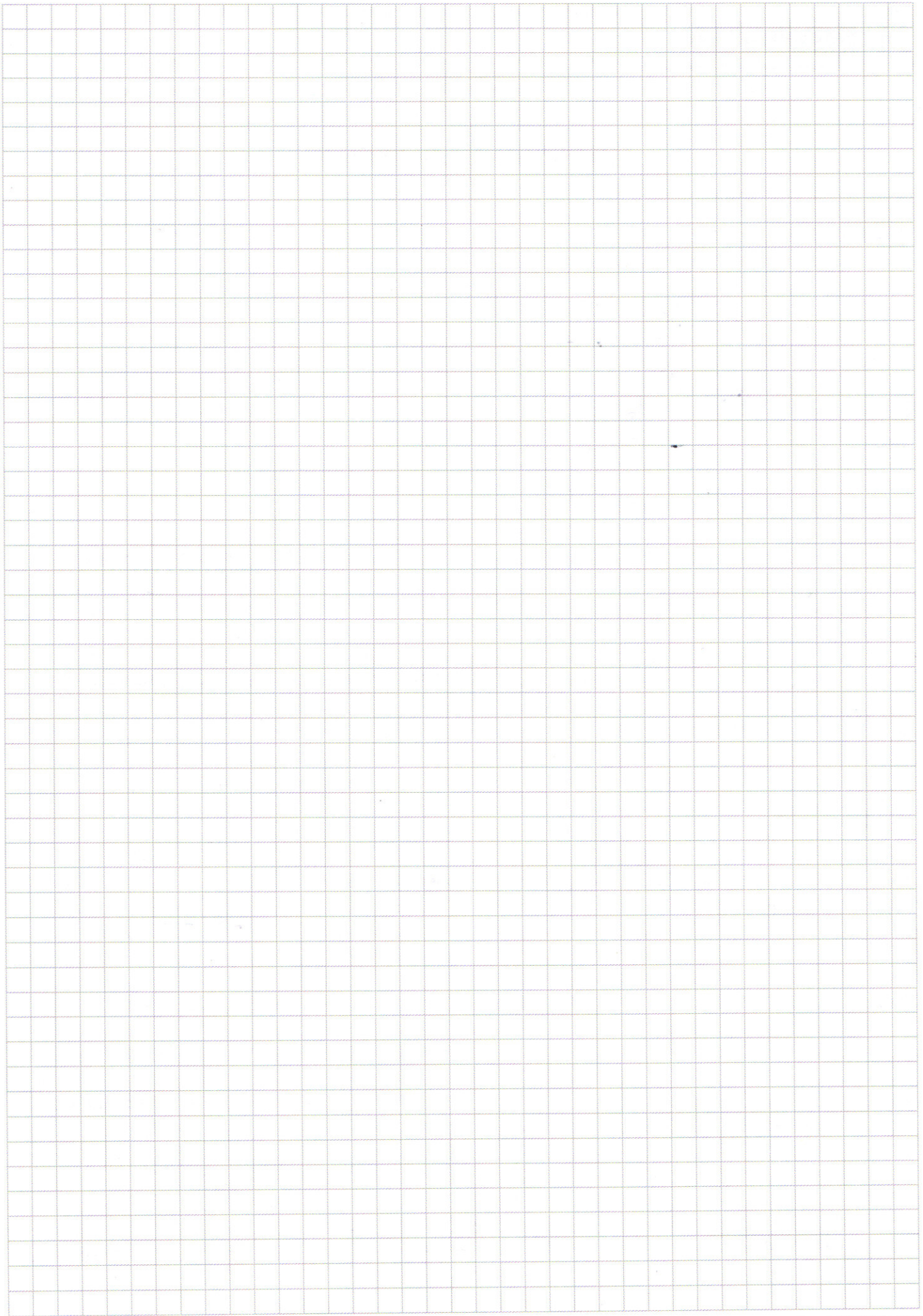
потому, что они были касания

F_1 и F_2 которые параллельны.

$$\Rightarrow \boxed{SS_1 = 2R}$$

$$, SO = \frac{3}{2} SS_1, OK = \frac{1}{2} SS_1.$$

$$\text{так как } \angle KSO \quad \sin(\angle KSO) = \frac{OK}{OS} = \frac{\frac{1}{2} SS_1}{\frac{3}{2} SS_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}.$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№5

(1/3)

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad |^1 2$$

 $\Leftrightarrow$

$$(x+y+5)^2 + (y-x+5)^2 + 2|(y+5)^2 - x^2| = 100$$

$$2(x^2 + y^2 + 25) + 10x + 10y + 2xy - 10x + 10y - 2xy + 2|(y+5)^2 - x^2| = 100$$

 $\Leftrightarrow$

$$x^2 + y^2 + 10y + 25 + |(y+5)^2 - x^2| = 50$$

 $\Leftrightarrow$

$$2x^2 + (y+5)^2 - x^2 + |(y+5)^2 - x^2| = 50 \quad (*)$$

Решение: $t = (y+5)^2 - x^2$

 $\Rightarrow$

$$(*) \Leftrightarrow 2x^2 + t + |t| = 50$$

$$1) t \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 2t = 50$$

$$x^2 + t = 25$$

$$x^2 + (y+5)^2 - x^2 = 25$$

$$\Rightarrow (y+5)^2 = 25$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ или } y = -10$$

$$t = (y+5)^2 - x^2 \geq 0$$

$$25 = (y+5)^2 \geq x^2$$

Решение: $\forall x \quad |x| \leq 5 \text{ и } y = 0 \text{ или } y = -10 \Rightarrow |x| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$

$$2) t \leq 0$$

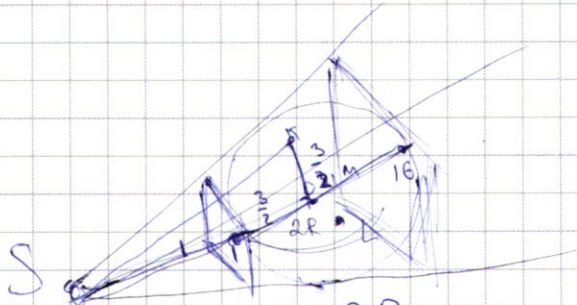
$$2x^2 - t + t = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow |x| = 5$$

$$t = (y+5)^2 - 25 \leq 0$$

$$(y+5)^2 \leq 25$$

$$|y+5| \leq 5 \Rightarrow -10 \leq y \leq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{2R}{1}$$

$$\frac{1+2R}{1} = 4$$

$$\cos x \sin y + \sin x \cos y$$

$$\cos(5x + 4x) =$$

$$1+2R=4$$

$$2R=3$$

$$R=\frac{3}{2}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y)$$

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x + \cos 5x \sin 4x + \cos 4x \sin 5x$$

$$+ \sin 5x - \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 5x (\cos 4x + \sin 4x) + \sin 5x (\cos 4x - \sin 4x)$$

$$+ \sin 5x - \cos 5x$$

Посмотрим на первый случай:

Заметим, что второе уравнение при фиксированном a определяет хотя бы одно значение $|x|$. Если $|x| > 5$, то для $y \geq 0$ или $y \leq -10$ y не имеет решения. ($(|y|-5)^2 = 5^2$ при $y \geq 0$ или -10)

$$\Rightarrow (|x|-12)^2 = a - 25$$

Если $|x| \leq 5$, то все четыре пары $(|x|, 0)$, $(-|x|, 0)$, $(|x|, -10)$, $(-|x|, -10)$

решения все будут только 2 $\Leftrightarrow |x| = -|x| \Rightarrow x = 0$

$$(0-12)^2 + 25 = a$$

$$\Rightarrow a = 144 + 25 = 169,$$

решения $(0, 0)$; $(0, -10)$.

Посмотрим на второй случай;

$$\begin{cases} |x| = 5 \\ |y+5| \leq 5 \end{cases}$$

Заметим, что в 1-уравнении x заменить на $-x$ можно и получится

$\Rightarrow$ Если $(5, y)$ решение, то $(-5, y)$ решение.

$\Rightarrow$ Мы хотим найти a такое, что

$$\exists! y \mid |y+5| \leq 5 \text{ и } (5-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$

$$0 \leq (|y|-5)^2 = a - 49$$

$$(a \geq 49)$$

$$|y+5| \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$-5 \leq y+5 \leq 5 \Leftrightarrow -10 \leq y \leq 0 \Leftrightarrow |y| \leq 10 \text{ и } y \leq 0.$$

$$5 = 10 - 5 \Rightarrow |y| - 5 = \pm \sqrt{a - 49}$$

$$5 \geq \sqrt{a - 49}$$

$$25 \geq a - 49$$

$$24 \geq a \geq 49$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В 4 случае получим, что $y=0$ или $y^2=10$

$$(|y|-5)^2 = 5^2 = 25$$

$\Rightarrow$ Мы хотим, чтобы было

$$|x|(|x|-12)^2 + 25 = a, \text{ и } |x| \leq 5. \quad (\heartsuit)$$

$$\Rightarrow a \geq 25$$

Заметим, что если (x, y) решение, то $(-x, y)$ тоже решение.

$\Rightarrow$ Нам достаточно существование $x \geq 0$, что $(\heartsuit)$ выполняется.

$$|x|-12 = \pm \sqrt{a-25}$$

$$|x| = \pm \sqrt{a-25} + 12 \leq 5$$

$$\pm \sqrt{a-25} \leq -7$$

$$a-25 \leq 49$$

Заметим, что

$$25 \leq a \leq 74$$

Если (x, y) решение, то $(-x, y)$ решение $\Leftrightarrow$ при $x \neq 0$, то y не имеет 2 решения.

Заметим, что система при $y=0$ и при $y^2=10$

$$|x|-12 = \sqrt{a-25}$$

$$|x| = \sqrt{a-25} + 12$$

$$|\sqrt{a-25} + 17| + |\sqrt{a-25} - 7| = 10$$

$$17 - \sqrt{a-25} > -10$$

$$27 > \sqrt{a-25}$$

$$28^2 + 25 > a$$

$$|x+5| + |-x+5| \geq 10$$

$$5 \leq |x| \leq 5$$

$$|x-5| + |-x-5| \geq 10$$

$$(x, 0) \Rightarrow (-x, 0)$$

$$|x+5|$$

$$|-x-5| + |x-5| \geq 10$$

$$(|x|-12)^2 = a-25$$

$$a-25 \leq 10 \quad \sqrt{a-25} < 17 \quad a < 17^2 + 25$$

$$(|x|, 0)$$

$$(-|x|, 0)$$

$$(|x|, -10)$$

$$(-|x|, -10)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5 (3/3)

Продолжить:
не забудите про y

А значит

$$|y| - 5 = \pm \sqrt{a - 49}$$

$$|y| = 5 + \sqrt{a - 49}$$

или

$$|y| = 5 - \sqrt{a - 49}$$

$$\text{и } y < 0.$$

$$\exists |y| \leq 10 \Rightarrow 10 \geq 5 + \sqrt{a - 49} \quad 5 \geq \sqrt{a - 49}$$

$$25 \geq a - 49$$

$$74 \geq a \geq 49$$

Если $49 \leq a \leq 74$, то $-|y| = 5 + \sqrt{a - 49}$

$$0 > y = -5 - \sqrt{a - 49} \geq -10$$

решение
но не является единственной

не должно $\exists y \neq 0$ $|y| = 5 - \sqrt{a - 49} \Rightarrow$

$$5 - \sqrt{a - 49} \leq 0$$

$$25 \leq a - 49$$

$$74 \leq a$$

$$\Rightarrow a = 74.$$

$$a > 74$$

Если $5 + \sqrt{a - 49} > 5 + 5 = 10 \Rightarrow -5 - \sqrt{a - 49} < -10$

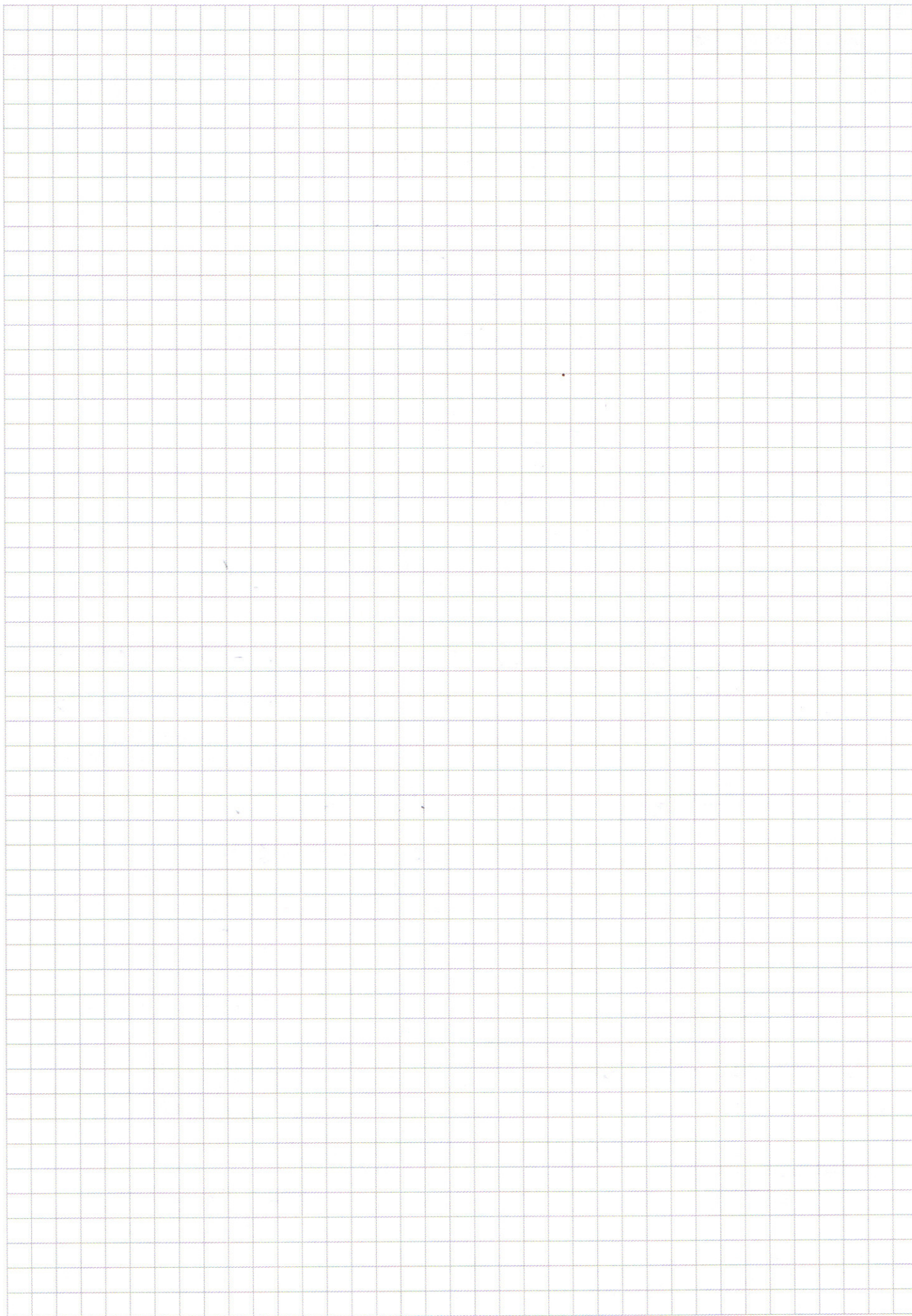
$\Rightarrow$ не решение

$|y| = 5 - \sqrt{a - 49}$, не имеет смысла ($|y| \geq 0$)

$\Rightarrow \boxed{a = 74}$ при $a = 74$, решения $(5, -10)$

$(-5, -10)$

Ответ: $a = 169$ или $a = 74$
 $(0, 0)$ и $(0, -10)$ $(5, -10); (-5, 10)$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \geq 3 \text{ при } x=39 \quad y \geq 2^{39} + 3 \cdot 2^{34} > 76 + 2(2^{32}-1) \cdot 39$$

$$2^{39} + 3 \cdot 2^{34} > 2^{33} \cdot 39 - 2$$

$$2^6 + 3 \cdot 2^2 > 39 - \frac{2}{2^{33}}$$

$$64 + 6 > 39 - \frac{2}{2^{33}}$$

это правда.

$$34 \leq x_0 \leq 39$$

$$x = 38$$

$$y \geq 2^{38} + 3 \cdot 2^{34} \nearrow 76 + 2(2^{32}-1) \cdot 38 =$$

$$2^{38} + 3 \cdot 2^{34} \nearrow 2^{33} \cdot 38$$

$$2^4 + 3 \nearrow 19$$

=

$$\text{при } x=38$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32}-1)x$$

$$\Rightarrow y \text{ функции } (2^x + 3 \cdot 2^{34} - 76 - 2(2^{32}-1)x)' =$$

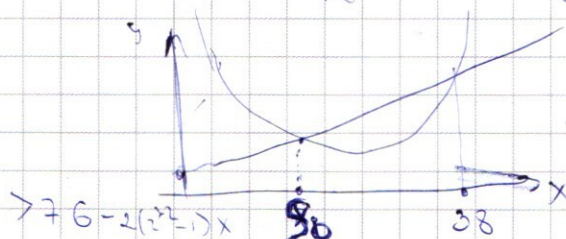
$$\ln 2 \cdot 2^x - 2^{33} + 2 > 0 \text{ при } x \geq 39$$

$\Rightarrow$ при $x \geq 38$, кет пар (x, y)
удов. условию.

$$(2^x + 3 \cdot 2^{34})'' > 0 \quad \forall x \Rightarrow \text{функция выпуклая, следовательно}$$

имеет минимум

$$\text{при } x=0, \quad 2^x + 3 \cdot 2^{34} > 76 - 2(2^{32}-1)x$$



тоже минимум S_0

пу $x = 8$

$$2^8 + 3 \cdot 2^{34} \checkmark 76 + 2^{36} - 16 = 2^{36} + 60 > 2^{36} > 2^8 \cdot 3 \cdot 2^{34}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_0 < 8$$

$x = 7$

$$2^7 + 3 \cdot 2^{34} \checkmark 76 + 7 \cdot 2^{33} - 14 = 7 \cdot 2^{33} + 62$$

$$\frac{2^7}{2^{33}} + 6 \checkmark 7 + \frac{62}{2^{33}}$$

$$\frac{2^7 - 62}{2^{33}} \not\leq 1 \Rightarrow S_0 < 7$$

$x = 6$:

$$2^6 + 2 \cdot 2^{34} \not\checkmark 76 + 6 \cdot 2^{33} - 12 = 6 \cdot 2^{33} + 64$$

$$2 \cdot 2^{34} \checkmark 6 \cdot 2^{33}$$

$$4 \checkmark 6$$

$$<$$

$$\Rightarrow S_0 < 6$$

$x = 5$

$$2^5 + 3 \cdot 2^{34} \checkmark 66 + 5 \cdot 2^{33}$$

$$\frac{2^5}{2^{33}} + 6 \checkmark \frac{6}{2^{33}} + 5$$

$$>$$

$$\Rightarrow S_0 > 5$$

$$\Rightarrow 6 \leq x < 38.$$

$$6 \leq x \leq 37$$

Ответ:

Искомое число равно:

$$\sum_{x=6}^{37} 76 + 2^{33}x - 2x - 2^x - 3 \cdot 2^{34}$$

$$= (76 - 3 \cdot 2^{34})32 + 2^{33}(661) - 1322 - \sum_{x=6}^{37} 2^x = 2 \cdot 76 - 3 \cdot 2^{34} + 2^{33}(661) - 1322 - 2^{38} + 2^6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$$76 + 2(2^{32} - 1)x \leq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$x \geq 2^{32}$$

хвф

Заметим, что если $A(x) = 76 + 2(2^{32} - 1)x \leq 2^x + 3 \cdot 2^{34} = B(x)$

$$\text{то } \exists y \mid 2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y \leq 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

Поскольку скорость роста линейной функции $A(x)$ меньше экспоненциальной функции $B(x)$, $B(x)$ всегда выигрывает с некоторым $x_0 > 0$, превзойдет $A(x)$ и выигрывает с x_0 , $76 + 2(2^{32} - 1)x < 2^x + 3 \cdot 2^{34}$
 $\forall x \geq x_0$.

Наша цель найти этот x_0 .

Заметим, что если $x < 0$, то нет, потому что

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} > 3 \cdot 2^{34} > 0 > 76 \\ \text{но } y < 76 + 2(2^{32} - 1)x < 76 < y \\ y > y, \text{ противоречие.}$$

При $x = 34$

у дается 36

$$y \geq 2^{34} + 3 \cdot 2^{34} = 2^{36} \\ 2^{36} < 76 + 2(2^{32} - 1)36 \\ = \\ 2^{36} < 2^{33} \cdot 36 + 4, \text{ что}$$

$$34 \leq x_0$$

$$\sum_{x=6}^{37} (76 - 3 \cdot 2^{34}) + 2^{33}x - 2x - 2^x =$$

$$\boxed{(76 - 3 \cdot 2^{34})32 + 2^{33} \left(\frac{37 \cdot 38}{2} - \frac{6 \cdot 7}{2} \right) - 2 \left(\frac{37 \cdot 38}{2} - \frac{6 \cdot 7}{2} \right) - 2^{38} + 2^6}$$

$$76 \cdot 32 - 3 \cdot 2^{39} + 2^{33} \cdot 682 - 1364 + 2^{38} - 64 \quad \begin{matrix} \xrightarrow{+2} \\ 2+2+4+8+16+32+\sum_{i=1}^{37} 2^i \\ 64 \end{matrix} = 2^{38}$$

$$(76 \cdot 32 - 1364 - 64) + 2^{38} - 3 \cdot 2^{39} + 2^{33} \cdot 682$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, showing a system of inequalities and their solution.

System of Inequalities:

$$\begin{cases} 2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2^{33} - 2x \\ 2^x + 5 \cdot 2^{33} < 76 + 2^{34} - 2x \\ 2^x + 2x < 76 - 5 \cdot 2^{33} \\ -2x - 2^x > 2^{33} \cdot 5 - 76 \\ x \rightarrow -x \\ 2x - 2^x > 2^{33} \cdot 5 - 76 \end{cases}$$

Analysis and Solution:

For $x \geq 0$, $2^x \geq 2^0 = 1$.
 $2x - 2^x > 2^{33} \cdot 5 - 76$
 $2x > 2^x + 2^{33} \cdot 5 - 76$
 $2x > 2^x + 2^{33} \cdot 5 - 76$
 $x < 2^{33} \cdot 5 - 76$

For $x < 0$, $2^x < 1$.
 $2x - 2^x > 2^{33} \cdot 5 - 76$
 $2x > 2^x + 2^{33} \cdot 5 - 76$
 $x < 2^{33} \cdot 5 - 76$

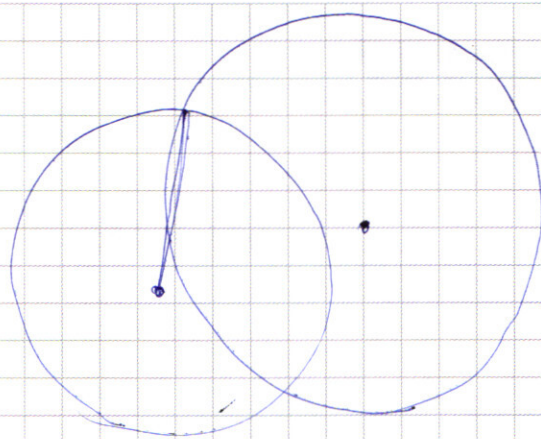
Conclusion: $x < 2^{33} \cdot 5 - 76$

Verification:

Let $x = 2^{33} \cdot 5 - 76$.
 $2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2^{33} - 2x$
 $2^x + 5 \cdot 2^{33} < 76 + 2^{34} - 2x$
 $2^x + 2x < 76 - 5 \cdot 2^{33}$
 $-2x - 2^x > 2^{33} \cdot 5 - 76$

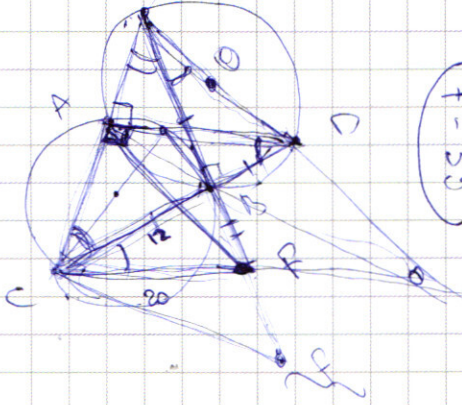
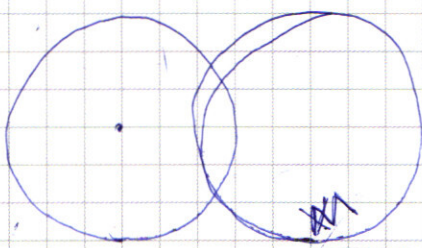
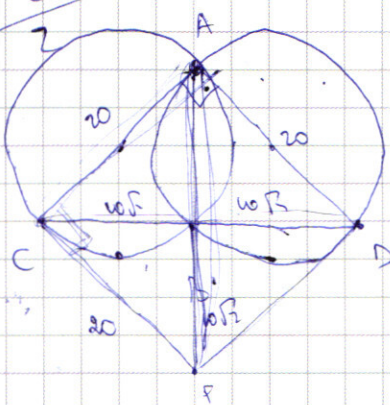
Final Answer: $x < 2^{33} \cdot 5 - 76$

1364.



$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 378 \\ \hline 296 \\ \hline 111 \\ \hline 1406 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 705 \\ - 21 \\ \hline 682 \end{array}$$



$\checkmark$ $X \mid 22$

212

$$F - \log$$

$$F - \log_2 V \geq 3$$

∞
 $\wedge$
 ∞
 ∞
 $\times$
 $\times$
 $\times$

$$[\Delta_{ACF}]^2 = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(\angle ACF)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[2]{\frac{1}{2}AC}$$

$$CM^2 = 12.2$$

$$C_M \approx \sqrt{2.12}$$

$144 + 36 \approx 180$

21- 2022

10216

$$28 \cdot \sqrt{12} = 28 \cdot 2\sqrt{3} = 56\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} A^2 C$$

Aziz

$$c_A \approx 10^{-2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot AC \cdot \sin \angle AMD$$

$$\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot AC \cdot \frac{AD}{20}$$

AC, AD

$$2|(y+5)^2 - x^2| + (x+y+5)^2 + (y-x+5)^2 = 100$$

$$2(x^2 + y^2 + 25) + 20y = 100$$

$$2^{30} + 3 \cdot 2^{34} < 2^{36}$$

$$|(y+5)^2 - x^2| + (y+5)^2 + x^2 = 50$$

$$76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 30$$

$$|t| + t + 2x^2 = 50$$

$$|t| + t \leq 50$$

$$2|t|$$

$$1) t \geq 0$$

$$2t + 2x^2 = 50$$

$$t + x^2 = 25$$

$$(y+5)^2 - x^2 + x^2 = 50$$

$$(y+5)^2 = 25$$

$$y+5 = 5$$

$$y \neq 5 = -5$$

$$y = 0$$

$$y = -10$$

$$(y+5)^2 - x^2$$

$$25 - x^2 > 0$$

$$|x| < 5$$

$$|x+5| + |5-x| = 10$$

$$x < 5$$

$$5+x + 5-x = 10$$

$$2^{38} - 32$$

$$v = 20 + \frac{(21 - |x|)}{2}$$

$$v = 20 + \frac{(21 - |x|)}{2}$$

$$\frac{37 \cdot 38}{2} - \frac{6 \cdot 7}{2}$$

$$19 \cdot 37$$

$$210 - 37$$

$$0 = 6$$

$$203$$

$$-42$$

$$661$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7^2 \geq (|x| - 12)^2 = a - 25$$

$$|x| \leq 5$$

$$-7 \leq |x| - 12 \leq 7$$

$$a - 25$$

$$a - 25 \leq 7^2$$

$$5 - 1$$

$$5, |y+5|$$

$$|x| = 5$$

$$5, -|y+5|$$

$$(5-12)^2$$

$$-5, |y+5|$$

$$-5, -|y+5|$$

$$49 +$$

$$\text{при } x = 5$$

$$|w+y| + |y| = w$$

$$-w \leq y \leq -5$$

$$10$$

$$5 \leq |y| \leq 10$$

$$y < 0$$

$$(y-5)^2 = a - 49$$

$$|y| - 5 = +\sqrt{a - 49}$$

$$\text{Если } |x| = 0 \Rightarrow$$

$$12 + 5^2 = 169$$

$$a \geq 169$$

$$\text{решения}$$

$$(0,0)$$

$$(5,y)$$

$$\text{решение}$$

$$\text{но}$$

$$(-5,y)$$

$$\text{решение}$$

$$|x| = -|x| \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow \text{при } 5$$

$$(|x|, 0), (-|x|, 0), (-|x|, -10), (|x|, -10)$$

$$x=5$$

а - отрицательное значение $|x|$,

но если $|x| > 5$ то необходимо учесть условие и будем иметь,

а если иначе, то

$$(|x| - 12)^2 + 25 = a$$

$$2y^2 - 2xy - 4x^2 + 16x - 8y$$

$$y^2 - 8y + 16 + (y-x)^2 - 4(x^2 - 4x + 4) - x^2 = 0$$

$$(y-4)^2 + (y-x)^2 - 4(x-2)^2 - x^2 = 0$$

$$y^2 - 8y + 16 + y^2 - 2xy + x^2 - 4x^2 + 16x - 16 - x^2$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y-4)^2 + (2y-4)^2$$

$$4(2-y)^2 - (4y)^2 = 0$$

$$(y-x)^2 - (2x-4)^2 = x^2 - (y-4)^2$$

$$(y-x-2x+4)(y-x+2x-4) = (x-y+4)(x+y-4)$$

$$y=4-x$$

$$y-4+y$$

$$(y-3x+4)$$

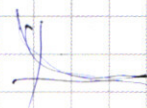
$$(y+x-4)$$

$$= (x-y+4)(x+y-4)$$

$$x=4-y$$

$$I) \quad x+y=4$$

$$II) \quad y-3x+4 = x-y+4$$



$$x=t^2 \quad y=s^4$$

$$2y=4x$$

$$y=2x$$

$$-\ln x \ln(x^2 y^4) = \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \ln y$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$$

$$1 = (16x^6)^{\ln x} \cdot (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$$

$$0 = \ln((16x^6)^{\ln x}) + \ln(2x^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)})$$

$$0 = \ln x \cdot \ln(16x^6) + \ln\left(\frac{2}{x^6}\right) \ln(2x)$$

$$-\ln x (2\ln x + 4\ln y) = (\ln y - 7\ln x) \ln y$$

$$\ln\left(2^{\frac{1}{6}}\right)$$

$$-2\ln x^2 - 4\ln x \ln y = \ln y^2 - 7\ln x \ln y$$

$$\left(2^{\frac{1}{6}} x^{-1}\right)^6$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

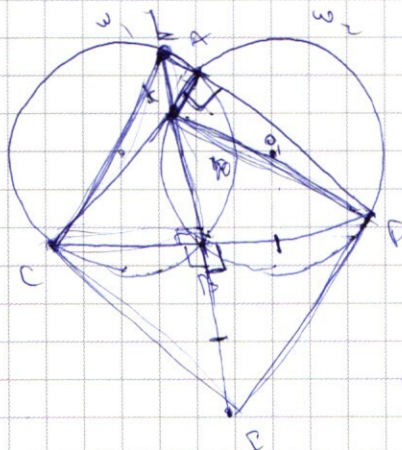
$$(t-1)(t-2) = 0$$

$$t=1, \quad t=2$$

$$\ln x = \ln y$$

$$\ln y = 2\ln x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos 9x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x - \sin 2x + \sin 5x$$

$$C^2 + B^2 \geq C^2$$

$$C_B \cdot C_D = C_0 - \omega^2$$

$$CA^2 + AD^2 = (CB + BD)^2$$

$$CB^1 + BB^2 - 2CB \cdot Bx$$

$$CO_2 + H_2O$$

$$CA^2 + AL^2 = 400$$

$$A_D^2 + A_K^2 = 400$$

$$\sin(a - b)$$

$$\cos(4x + 5x) = \cos 9x$$

$$\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

COF

$$\begin{pmatrix} \cos 2x + \sin 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin 5x - \cos 5x \\ -\sin 5x \end{pmatrix} = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$1 + \frac{\sin 18x}{2 \cos 9x \sin 9x} + 1 - \frac{\sin 50x}{2 \sin 5x \cos 5x}$$

$$+ 2(\cos 3x + \sin 3x)(\sin 5x - \cos 5x) = 2 \cos^2 4x$$

$$\cos 9 \times \sin 5 - \cos 5 \times \cos 5 + \sin 9 \times \sin 5 - \sin 9 \times \cos 5$$

$$2 + \sin 18x - \sin 10x = \sin 4x - \cos 4x = 2 \cos^2 4x$$

$$\begin{array}{r} 1025 \overline{) 343} \\ \underline{3} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3261 \overline{) 9} \\ \underline{6} \\ 26 \\ \underline{18} \\ 81 \end{array}$$

10 2 9 1 9

12

1

2 9

$$\begin{array}{r|l} 343 & 7 \\ \hline 88 & 49 \\ \hline 62 & \end{array}$$

9 2612 9.3.7³

7. 7. 7

sind sing $\begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix}$
 (2)

$3, 2, 2$
 $2, 7 \rightarrow 3, 3, 3$
 $7, 7, 3, 3, 3, 1, 1$
 $7, 7, 2, 3, 8, 1, 1$
 $8, 8$
 $3! \cdot 3! \cdot 2! \quad 3! \cdot 3!$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{8!}{86} = \left(\frac{1}{2} + 1 \right)$$