

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$ .

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .

б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 12$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

355 18



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④ Лемма: Если провести плоскость, параллельную основанию пирамиды, то сечения получившихся усечённой и ~~первоначальной~~ <sup>призмы</sup> ~~будут подобными~~ <sup>похожими</sup> ~~отношению~~ <sup>сторонам</sup> ~~как стороны~~ <sup>ребра</sup> ~~принадлежащие~~ <sup>основания</sup>

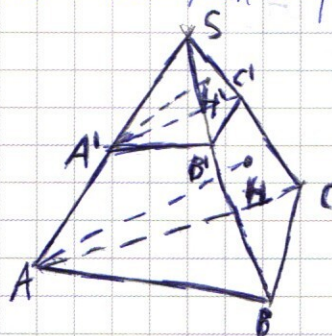


Дани: САВС-микроинга

$ABC \parallel A'B'C'$

Doc - mo

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SABC'}} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SA' \cdot SB' \cdot SC'}$$



1) 
$$\left. \begin{aligned} S_{B'C'} &= S_{B'} \cdot S_{C'} \cdot \cancel{S_{B'}} \cdot \sin \angle B'SC' \\ S_{B'PC} &= S_{B'} \cdot S_{C'} \cdot \sin \angle BSC' \end{aligned} \right\} \text{m.k. } \angle B'SC' \text{ and } \angle BSC' \text{ are the same angle, thus } BSC'$$

2) Analogen:  $A'H \perp SBC$  u  $AH \perp SBC$ .

В. К. ~~В~~ А'НчАН перпендикулярны одной плоскости, но они параллельны, а значит, лежат в одной плоскости  $SAH$ , которая пересекает  $SB$  по прямой  $SH$ .

Рассмотрим  $\Delta SA'H'$  и  $\Delta SAH$ . Так  $AH \parallel A'H'$ , то они подобны, а значит,

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{A'H}{AH} \quad (2)$$

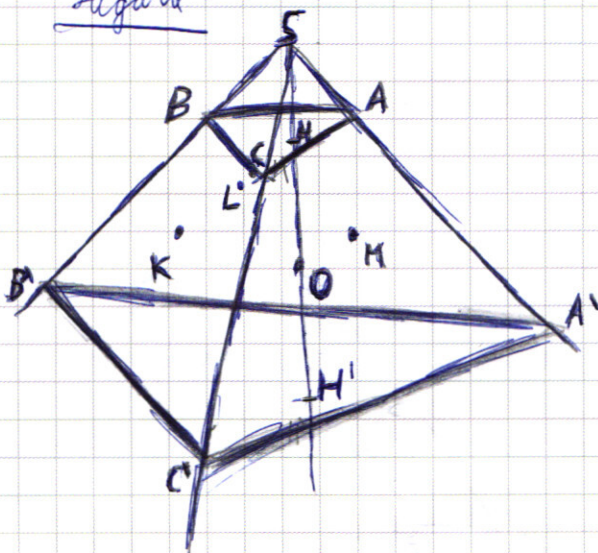
$$\exists) \frac{V_{SA'BC'}}{V_{SABC}} = \frac{A'H' \cdot \int_{\Delta} (SBC')}{A'H \cdot S_{\Delta}(SBC)}$$

Wz (1) u (2) wegen, und:

$$\frac{V_{SA'BC'}}{V_{SABC}} = \frac{SA' \cdot S_{B'C'}}{SA \cdot SB \cdot SC}$$

④ (Задание)

Задача



Пусть  $H$  - точка касания малой сферы окружности,  $H'$  - точка касания большой сферы окружности.

Нетрудно предположить, что если  $SO$  радиус-вектор от центра тетраэдра к углу ( $OK=OL=O$ ), то плоскость, касательная к углам от  $O \in SO$

перпендикулярна  $SO$  поперек тетраэдра (сечение будет правильным)

Решение

Рассмотрим объёмы пирамид  $SABC$  и  $SA'B'C'$  ( $ABC$  и  $A'B'C'$  - это и есть сечения, равные, так как по условию 1:16 (об-ва)

$$V_{SABC} = SH \cdot S_{ABC} \quad V_{SA'B'C'} = SH' \cdot S_{A'B'C'} \quad \frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SH}{SH' \cdot 16} \quad (1)$$

С другой стороны, по доказанной лемме:  $\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SA' \cdot SB' \cdot SC'} \quad (2)$

Рассмотрим  $\triangle SH'A$  и  $\triangle SHA$ .

П.к.  $HA \parallel H'A$ , (покажем, что параллельные плоскости  $ABC$  и  $A'B'C'$  пересекаются по  $ASH'A \cap ASHA$ .  $SH'A$  по параллельным прямым)

Следовательно,  $\frac{SH}{SH'} = \frac{SA}{SA'}$  аналогично докажем, что  $\frac{SH}{SH'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'}$

Подставим это в (2):  $\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \left(\frac{SH}{SH'}\right)^3$ . Тогда из (1):

$$\left(\frac{SH}{SH'}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad \frac{SH}{SH'} = \frac{1}{4} \quad SH' = 4SH \quad SH' = SH + HO + OH' = SH + 2OK \quad \text{радиус сф. т.и.}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① (Продолжение продолжения)

Иногда мы получим:  $SH + OK = 4SH$   $3SH = OK$

$$\frac{SH}{OK} = \frac{2}{3}$$

$$SO = SH + OH = SH + OK = \frac{5}{3} OK$$

$$OK = \frac{3}{2} SH$$

$$SH = \frac{2}{3} OK$$

$$\angle KSO = \arcsin \left( \frac{OK}{OS} \right)$$

$$\angle KSO = \arcsin \left( \frac{OK \cdot 3}{OK \cdot 5} \right) = \arcsin \frac{3}{5}$$

Проверим  $MM' \perp SO$ . Т.к.  $SOM$  — прямоугольный

$$\frac{MM'}{SO} = \frac{SM \cdot MO}{OK + SH} = \frac{SM \cdot OK}{\frac{5}{3} OK} = \frac{3}{5} SM$$

$$SM^2 + OM^2 = SO^2$$

$$SM^2 = (SH + HO)^2 - OH^2 = \left( \frac{5}{3} OH \right)^2 - OH^2 = \frac{25-9}{9} OH^2 = \frac{16}{9} OH^2$$

$$SM = \frac{4}{3} OH$$

$$MM' = \frac{3}{5} SM = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} OH = \frac{4}{5} OH$$

$$SM' \cdot M'O = (MM')^2$$

$$SM' \cdot (SO - SM') = \frac{16}{25} OH^2$$

$$-SM'^2 + \frac{5}{3} OH SM' - \frac{16}{25} OH^2 = 0$$

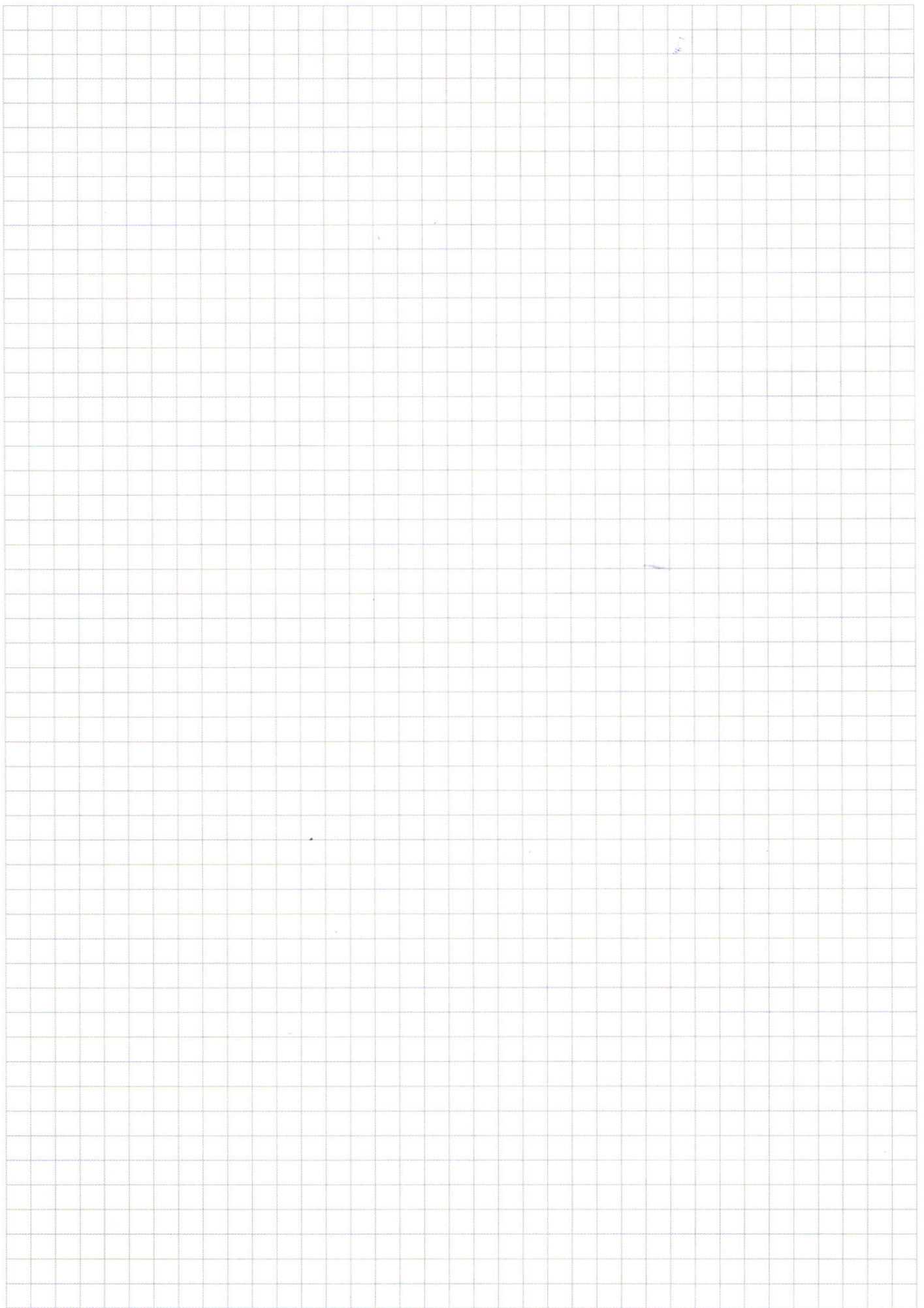
$$SM' = \frac{\frac{5}{3} OH \pm \sqrt{\left( \frac{5}{3} OH \right)^2 - 4 \cdot \left( -\frac{16}{25} OH^2 \right)}}{-2}$$

$$SM' = \frac{\frac{5}{3} OH \pm \frac{4}{15} OH}{2}$$

$$= \left\{ \frac{25 \pm 4}{30} OH, \frac{25 - 4}{30} OH \right\}$$

$$\left\{ \frac{16}{15} OH, \frac{3}{5} OH \right\}$$

Т.к.  $SO > SM$ , то  $M' <$



☒ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① (49 страниц)

Найти  $SM'$

$$SM'^2 = SM^2 - MM'^2$$

$$SM'^2 = \left(\frac{4}{3}OH\right)^2 - \left(\frac{4}{5}OH\right)^2 = OH^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{5}\right) \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{5}\right)$$

$$SM'^2 = OH^2 \left(\frac{8}{15}\right) \left(\frac{32}{15}\right) = \left(\frac{256}{225}\right) OH^2$$

$$SM' = \frac{16}{15} OH$$

Площадь сечения зависит от удаленности плоскости от точки S.

$$\frac{S_H}{S_{H'}} = \frac{1}{4} \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{SM'}{SH'} = \frac{16 \cdot OH}{15(2OH + \frac{2}{3}OH)} = \frac{16}{15(\frac{8}{3})} = \frac{16}{40} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

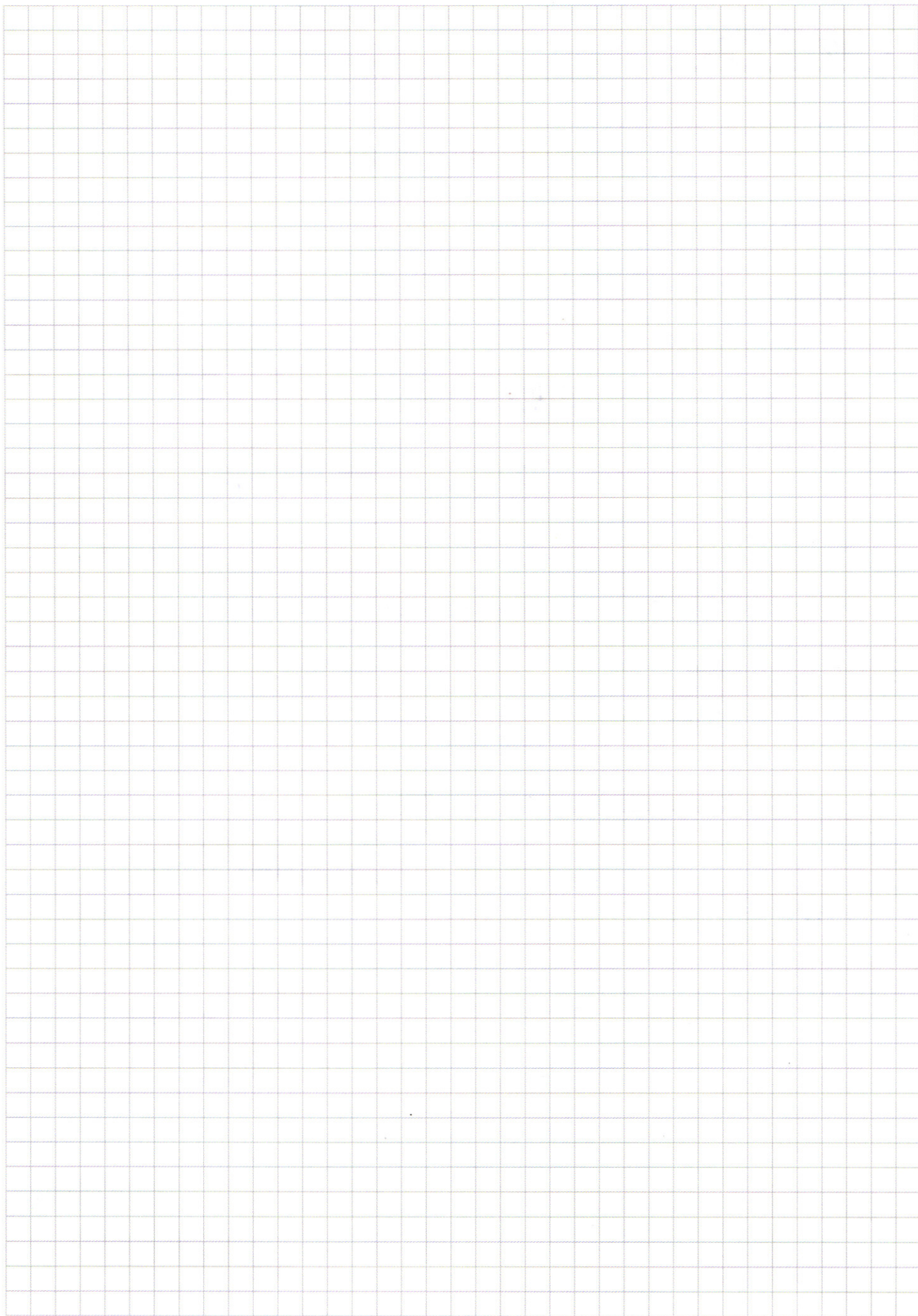
Пусть XYZ-точки пересечения прямых  $SA', SB', SC'$  плоскостью KLM

$$\frac{S_{\Delta XYZ}}{S_{A'B'C'}} = \frac{4}{25}$$

$$S_{\Delta XYZ} = \frac{16 \cdot 4}{25} = \frac{64}{25}$$

$$\text{Ответ: } S_{XYZ} = \frac{64}{25}$$

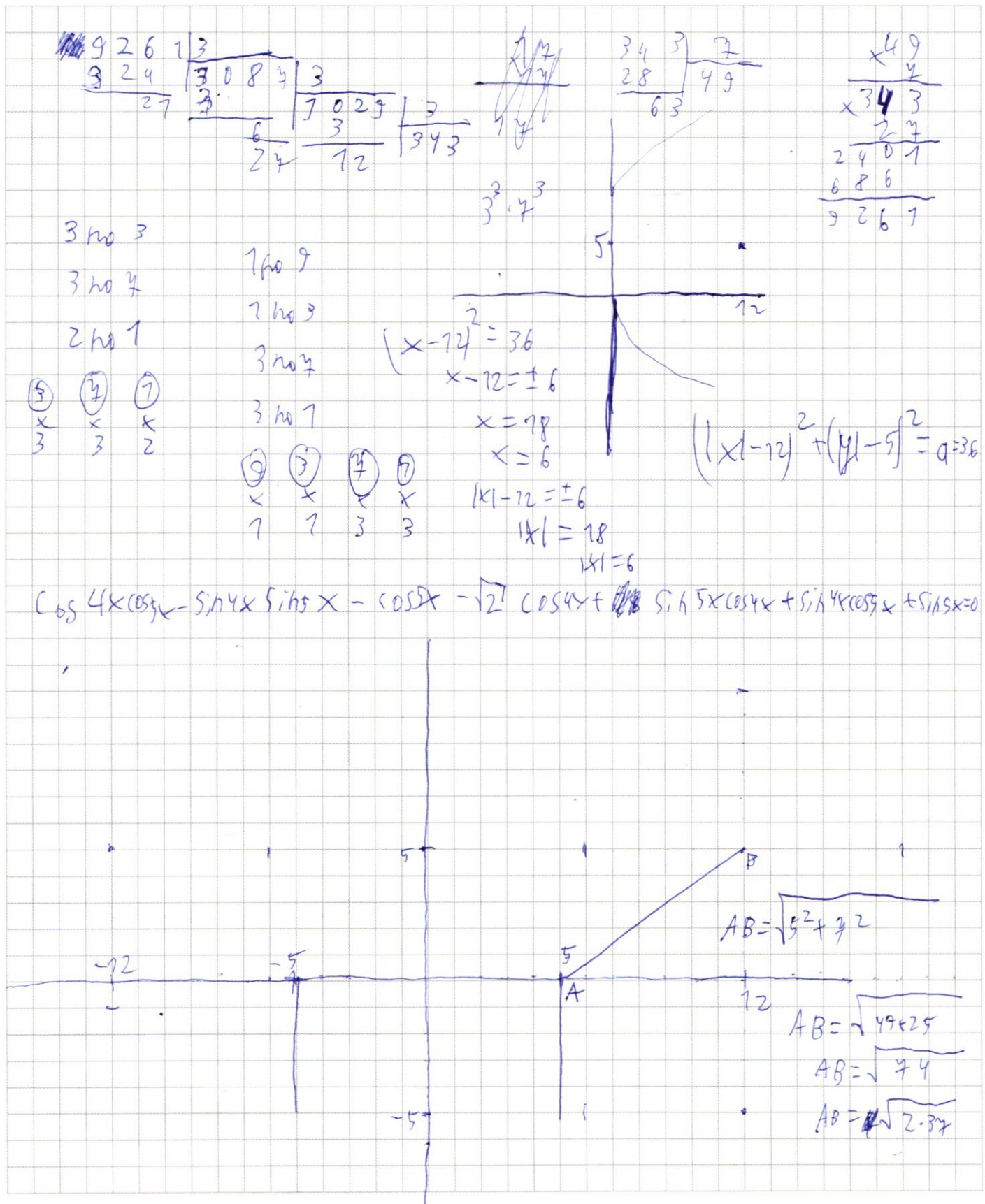
$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$



☒ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

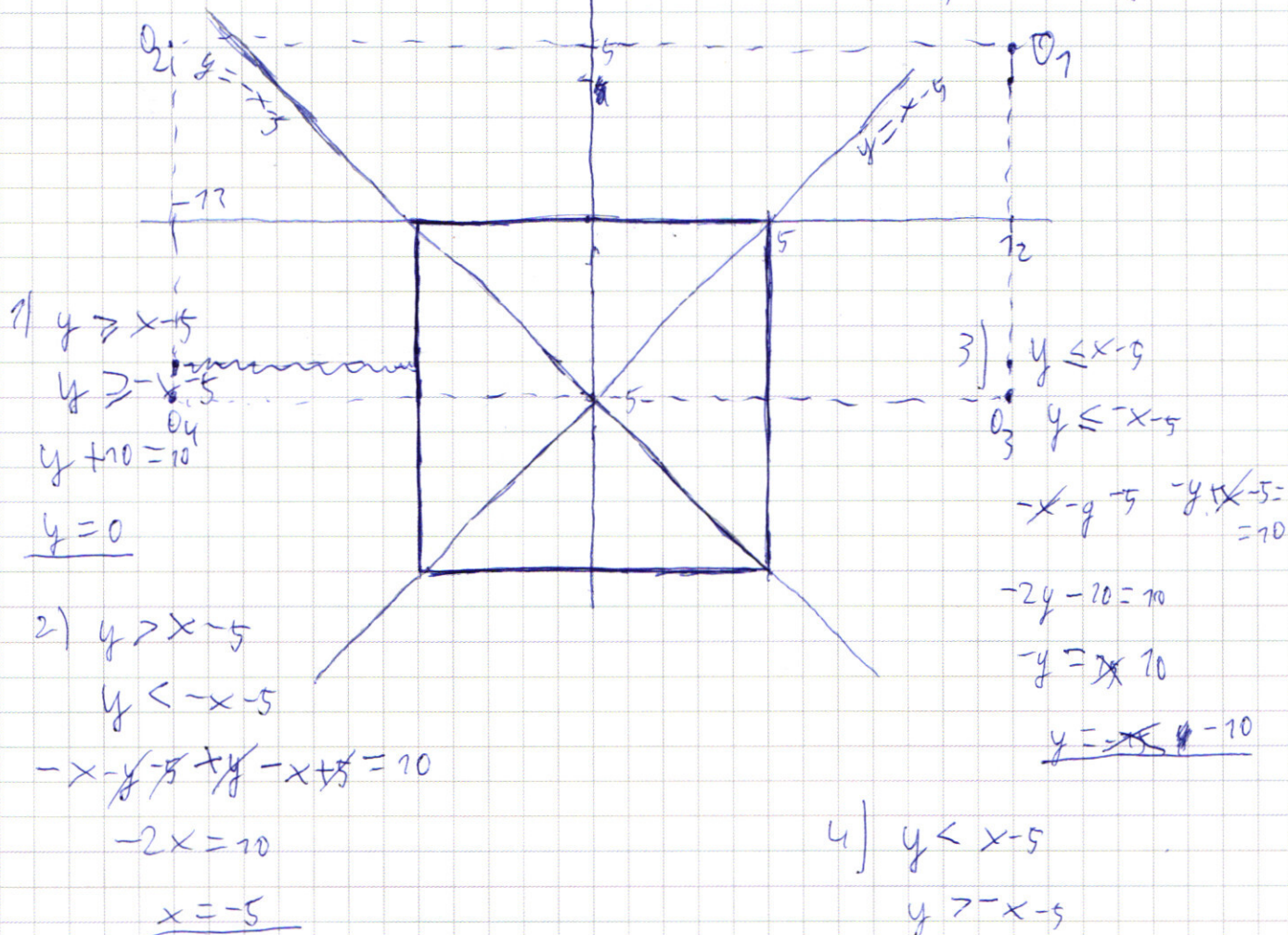
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



⑤ Рассмотрим первое уравнение  
 $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

$$y-x+5 > 0 \Leftrightarrow y > x-5 \quad | \quad x+y+5 > 0 \Leftrightarrow y > -x-5$$

Рассмотрим 4 случая  
 разрывов модулей



Первое уравнение задаёт квадрат с центром  $x+y+5 - y+x-5 = 10$   
 $(0; -5)$  и стороной 10

Рассмотрим второе уравнение

если бы это вышлось как  $(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$ , то это была бы окружность с центром в  $(12; 5)$  и радиусом  $\sqrt{a}$  но тогда  $|x|$  вместо  $x$  заставляет график слева от оси ординат зеркально повторить преобразующее справа от оси ординат. то есть, существуют и вторая окружность с центром  $(-12; 5)$ .  $|y|$  вместо  $y$  порождают ещё две окружности с центрами  $(12; -5)$  и  $(-12; -5)$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

### 5) Трехфигурное

с центрами  $O_1, O_2, O_3, O_4$

Итак, у нас есть 4 окружности, но ни одна из них не выходит за пределы своей координатной четверти. Теперь рассмотрим значения  $a < 49 \Rightarrow 0$  решений

$a = 49 \Rightarrow 2$  решения. Окружности  $O_3$  и  $O_4$  касаются квадрата в точках  $(5; -5)$  и  $(-5; -5)$ .

$49 < a \leq 74$   ~~$\Rightarrow 4$  решения~~. Окружности  $O_3$  и  $O_4$  пересекают вертикальные стороны квадрата в двух точках каждая, а точка пересечения  $O_1$  и  $O_2$  также будет, поэтому  ~~$a > 73^2 \Rightarrow 0$  решений~~

$74 < a < 169 \Rightarrow 4$  решения. Каждая из окружностей пересекает квадрат в своей точке (пр. сторону квадрата).

$a = 169 \Rightarrow 2$  решения. Точка пересечения  $O_1$  и  $O_2$  совпадает, у  $O_3$  и  $O_4$  тоже. Будет всего 2 точки пересечения:  $(0; 0)$  и  $(0; 10)$ .  
Ответ:  $a = 169$   
 $a = 49$

### 7) Разложи 9267 на множители. Заметим, что это число делится на 9.

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 9267} \\ \underline{9} \phantom{00} \\ 26 \phantom{0} \\ \underline{27} \\ 87 \\ \underline{81} \\ 67 \\ \underline{63} \\ 47 \\ \underline{45} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 0 \end{array}$$

Получим 1029. Делится на 3. ~~343~~  $343$ , а  $343$ , как мы

знаем, это куб 7-ки  
И тогда:  $9267 = 3^3 \cdot 7^3$

Также произведение можно получить формулой сокращений: 3 тройки, 3 семерки, 2 единицы и имея 1 девятку, 1 тройку, 3 семерки, 3 единицы

# ① (Продолжение)

Рассчитаем количество перестановок

в случае с 3 то 3, 3 то 7, 2 то 7

$$\text{Кол-во} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

в случае с 7 то 7, 7 то 3, 3 то 7, 3 то 7

$$\text{кол-во} = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 6} =$$

$$= 56 \cdot 20 = 1120$$

$$\text{Итого: } 560 + 1120 = 1680$$

Ответ: 1680 чисел

②

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} = y(x) \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x = g(x) \end{cases}$$

~~$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \text{ и } y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$~~

~~$$76 + 2(2^{32} - 1)x > y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$~~

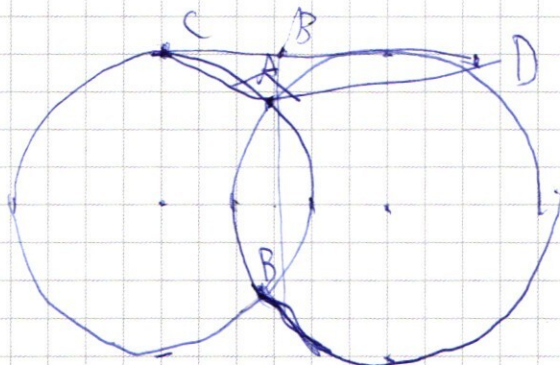
~~Всё решение будет состоять из суммы целых частей~~  
~~Всех  $x$ , удовлетворяющих  $y(x) < g(x)$~~

Всё решение будет являться суммой разностей целых частей

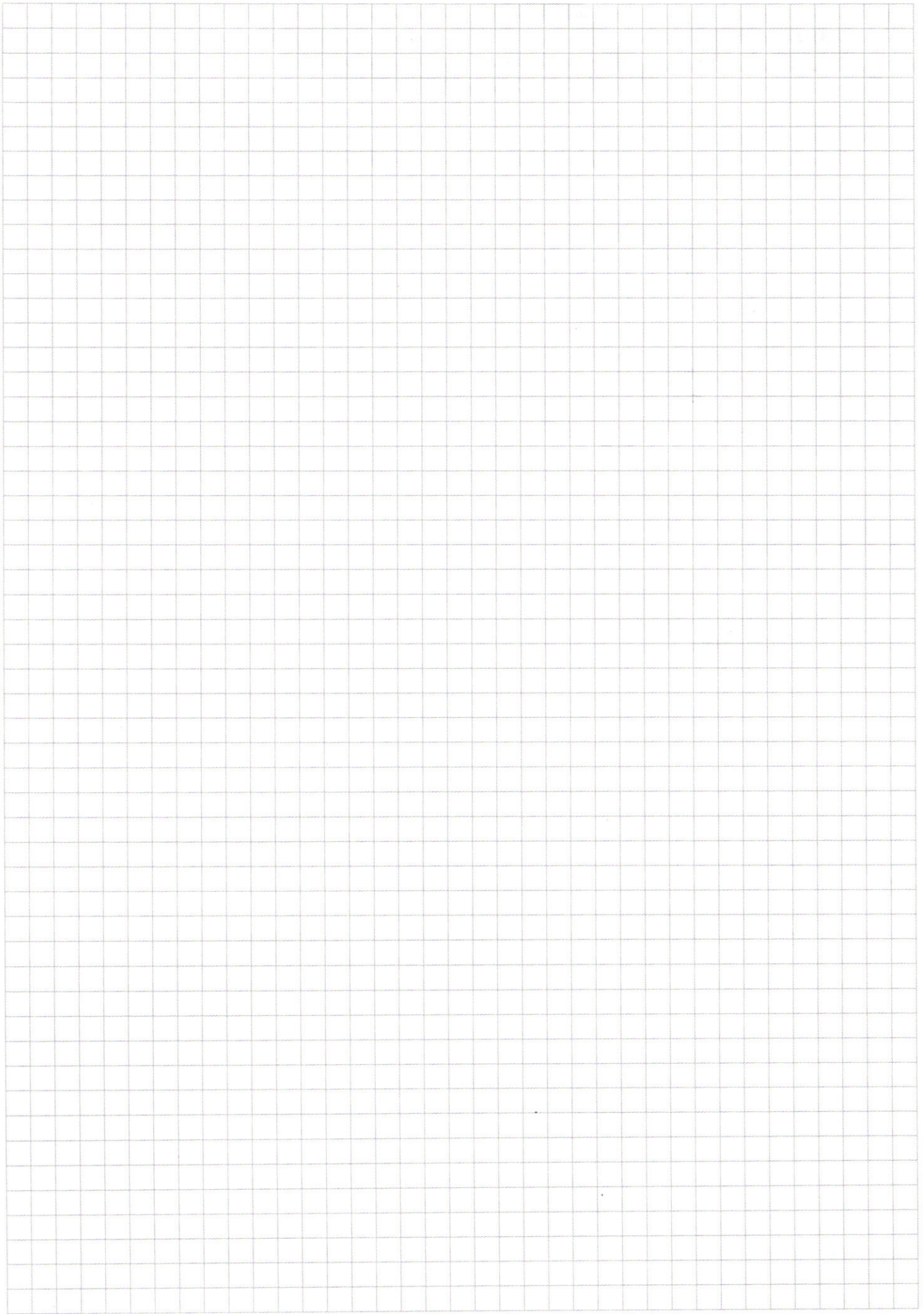
$y(x)$  и  $g(x)$  при всех  $x$ , удовлетворяющих  $y(x) < g(x)$

$$g(x) > y(x) \quad 76 + 2(2^{32} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2^0 \cdot 2^1 > 2^3 - 2$   
 $2^0 > 2^3 - 1$   
 $0 \rightarrow 32$



☒ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y_2 z^x + 3 \cdot z^{34}$$

$$y \approx 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{3y}$$

$$x \geq 0$$

$$2^0 + \dots + 2^{37}$$

$$\left( (2^1 + \dots + 2^{32}) \cdot 8 \right) + 76$$

$$\searrow x$$
$$2 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{37} \cdot x - 2\sqrt{2} + 46 > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$x(2^{33} - 2) + 76 > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

20/10/2019

$$3 \cdot (2^{33} - 2) + 76 \rightarrow 8 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$3 \cdot 2^{33}(1-2) + 70 > 8$$

$$4(2^{33} - 2) + 7672 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{35} = 2^3 + 76 > 2^4 + 3 \cdot 2^4$$

$$\frac{2^6}{2^x} + \frac{2^{31} \cdot x}{2^x} - \frac{2x}{2^x} > 1 + 3 \cdot 2^{34-x}$$

$$x \frac{1}{96} =$$

$$\begin{array}{r} 252 \\ 2 \overline{) 504} \\ \underline{504} \\ 0 \end{array}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{3}} \text{ OK}$$

$$5m^2 = 50^2 - 0m^2 = (5H + 0K)^2 = 5H^2 - 0K^2 = 5H^2$$

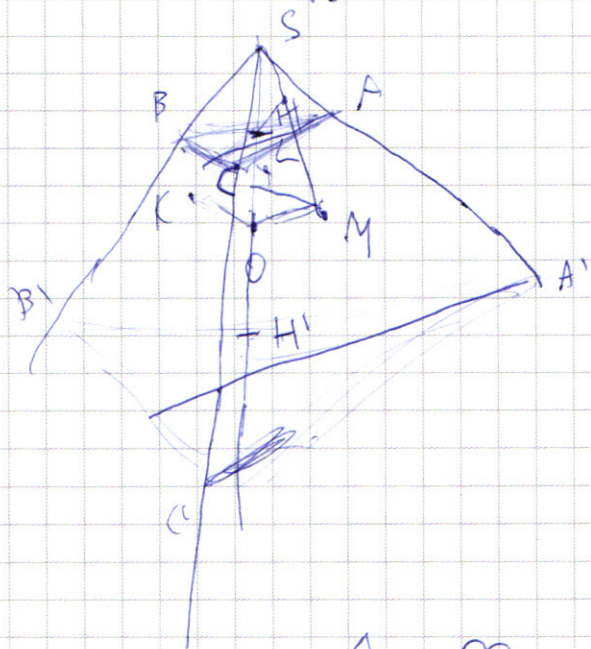
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

OK 21st

$$\frac{HS + WS}{WS + WS}$$

$$= \frac{S_0}{W_0 \cdot W_S} = 1,1111$$

$$4x(2x-y) \quad y(y-y) - 2x(x-y) - xy$$



$$\left( \frac{SH}{SH'} \right)^3 = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SA' \cdot SB' \cdot SC'}$$

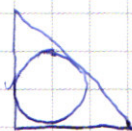
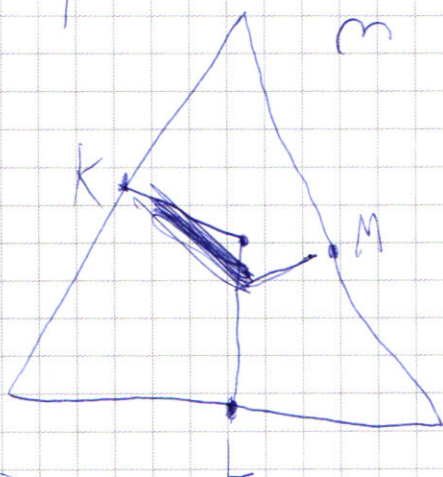
$$\frac{SH \cdot S_{ABC}}{SH' \cdot S_{ABC'}} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SA' \cdot SB' \cdot SC'}$$

$$\left( \frac{SH}{SH'} \right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$SH \cdot 4 = SH' = SH + 2$$

$$3SH = 2$$

$$\frac{SH}{OK} = \frac{2}{3}$$



$$MO' = MS$$

$$KO' = \frac{KS \cdot KO}{SO} = \frac{OK \cdot SH}{OK + SH} = \frac{3 \cdot KS}{5}$$

$$\sqrt{25+49}$$

$$\sqrt{24}$$

$$\sqrt{36}$$

$$SM^2 = SH^2 - MH^2$$

$$SM^2 = \frac{4 \cdot OH^2 - OH^4}{9}$$

$$5^2 - 11^2$$

$$y^2 + 6^2$$

$$5^2 - 7^2$$

$$y^2 + 4^2$$

$$49 + 36 = 85$$

$$\frac{25}{5 \cdot 5}$$

$$\frac{25}{5 \cdot 5}$$