

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

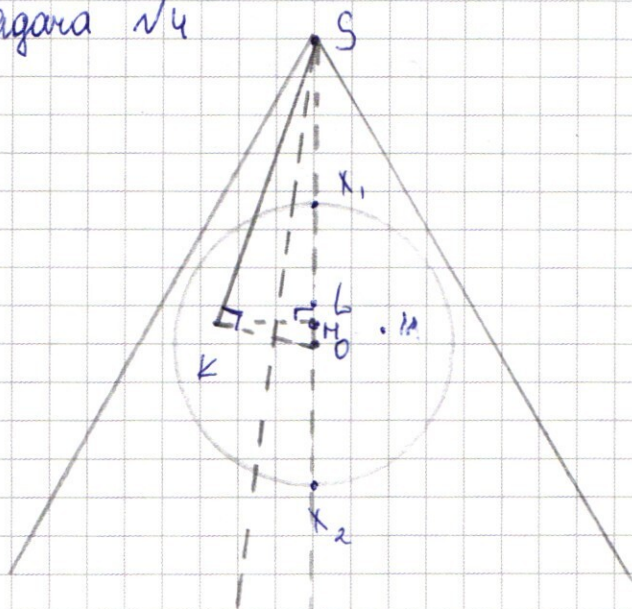
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Решение: Разделим число 64827 на простые множители:
 $64827 = 7^4 \cdot 3$. Так как 64827 - число, записанное при перемножении цифр восьмизначного числа $\Rightarrow$ цифрами могут быть "7", "3", "9", "1". Ответом на вопрос задачи будет являться количество возможных перестановок четырех "7", трех "3" и одной "1" + кол-во возможных перестановок четырех "7", одной "9", одной "3" и одной "1".

$$\text{Ответ: } C_8^4 + C_8^3 + C_8^1 + C_8^4 + C_8^2 + C_8^1 + C_8^1 = 2C_8^4 + C_8^3 + C_8^2 + 3C_8^1$$

Задача №4



Сфера (центр O)
 Трехгран. угол (верш. S)
 Сфера кас. трехгран. углу в точках
 K, M, L
 $S_{K_1} = 9$
 $S_{K_2} = 16$

Найти: $\angle KSO$, $S(KML)$ - ?

Решение:

$$\frac{S_{K_1}}{S_{K_2}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{K_1}}{S_{K_2}} = k = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$SK^2 = S_{K_1} \cdot S_{K_2} = 3x \cdot 4x = 12x^2 \text{ (стен. точки S) (SK - как к окр. с центром)}$$

реш в точке O, т.е. (K, X₂), X₁, X₂ - диаметр)

$$SK = x\sqrt{12} = 2x\sqrt{3}$$

Т.к. $S_{K_1} = 3x$, $S_{K_2} = 4x$, X₁, X₂ - диаметр, O - центр $\Rightarrow KO = XO \Rightarrow SO = 3,5x \Rightarrow$

$\angle KSO$ - прилож:

$$\cos \angle KSO = \frac{SK}{SO} = \frac{2x\sqrt{3}}{3,5x} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \Rightarrow \angle KSO = \arccos \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

Опустим из точек K, M, L пер-р на SO - т.е. (KML)

$$\frac{S(KML)}{S_0} = \left(\frac{SM}{SO}\right)^2, \Delta MKS: MS = KS \cdot \cos \angle KSO \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{KS}{SO} \cdot \cos \angle KSO;$$

$$\frac{KS}{SO} = \cos \angle KSO \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \cos^2 \angle KSO \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \cos^2 \angle KSO \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2 = \frac{48}{49}$$

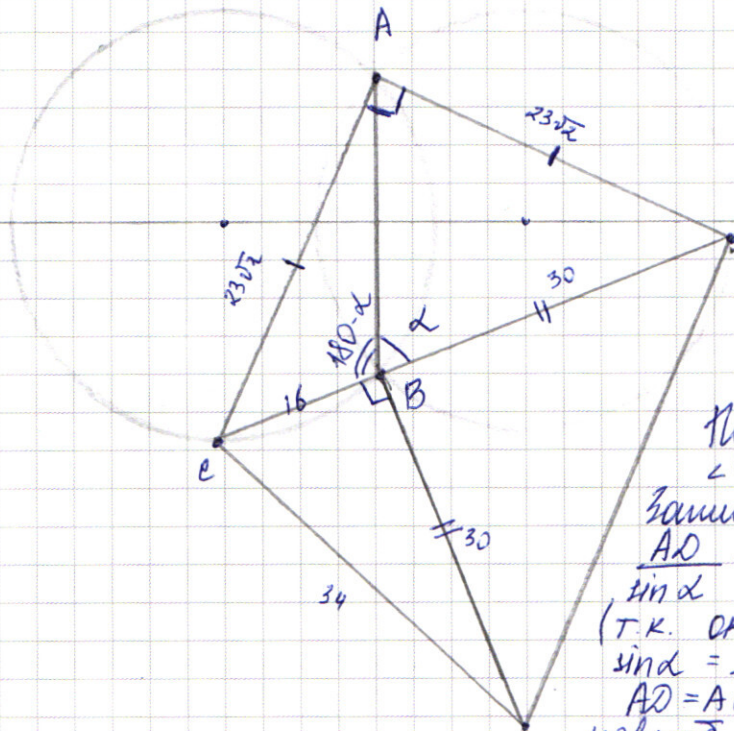
$$S(KML) = S_0 \cdot \left(\frac{48}{49}\right)^2; S_0 = \left(\frac{SO}{SK}\right)^2 \cdot S_{K_1} = 9 \cdot \frac{35^2}{9} = 12,25 \Rightarrow$$

$$S(KML) = 12,25 \cdot \frac{48^2}{492} = 12,25 \cdot \frac{2304}{2401} = \frac{28224}{2401}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arccos \frac{4\sqrt{3}}{7}; \quad S(KML) = \frac{28224}{2401}$$

* Пояснение: отом ти-ей ереший тригр. уша, кас. ереш и перпенд. SO
выведено из подобия этих тригр.

Задача 6



$$\begin{aligned} R &= 14 \\ \angle CAD &= 90^\circ \\ B \in CD \\ FB \perp CD \\ BF &= BD \end{aligned}$$

а) CF = ?

Решение:

$$\text{Пусть } \angle ABD = \alpha \Rightarrow \angle ABC = 180 - \alpha$$

Запишем т. синусов:

$$\frac{AD}{\sin \alpha} = 2R = \frac{AC}{\sin(180 - \alpha)}$$

(т.к. окр. равного радиуса)
 $\sin \alpha = \sin(180 - \alpha) \Rightarrow$

$AD = AC \Rightarrow \triangle CDA$ - равнобедр.

$$\Rightarrow \angle ACD = 45^\circ \Rightarrow \frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 14 = 7\sqrt{2}$$

Пусть $\angle CAB = \beta \Rightarrow \angle BAD = 90 - \beta$. Запишем т. синусов:

$$\frac{CB}{\sin \beta} = 2R = \frac{BD}{\sin(90 - \beta)} = \frac{BD}{\cos \beta} \quad (\text{т.к. радиусы окр. равны}) \Rightarrow$$

$$CB = BD \tan \beta = BF \tan \beta \quad (\text{т.к. } BD = BF) \Rightarrow$$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{BF^2 \tan^2 \beta + BF^2} = BF \sqrt{\tan^2 \beta + 1} = \frac{BF}{\cos \beta} = \frac{BD}{\cos \beta} =$$

$$= \frac{CB}{\sin \beta} = 2R = 34$$

б) $BC = 16$. $S(ACF)$ = ?

Решение: $BF = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30 \Rightarrow BF = BD = 30 \Rightarrow CD = 16 + 30 = 46 \Rightarrow$

$$AC = AD = \frac{46}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$$

$$\sin \angle BCF = \frac{15}{14} \quad (\triangle BCF) \Rightarrow \angle BCF = \arcsin \frac{15}{14}$$

$$S(ACF) = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 23\sqrt{2} \cdot \sin(45 + \arcsin \frac{15}{14}) = 14 \cdot 23\sqrt{2} \cdot \sin(45 + \arcsin \frac{15}{14})$$

$$\text{Ответ: } CF = 34; \quad S(ACF) = 391\sqrt{2} \cdot \sin(45 + \arcsin \frac{15}{14})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

$$y < 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

Найдем их:

Данные ф-ии ($y_1 = 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$
 $y_2 = 93 + 3(3^{27} - 1)x$)

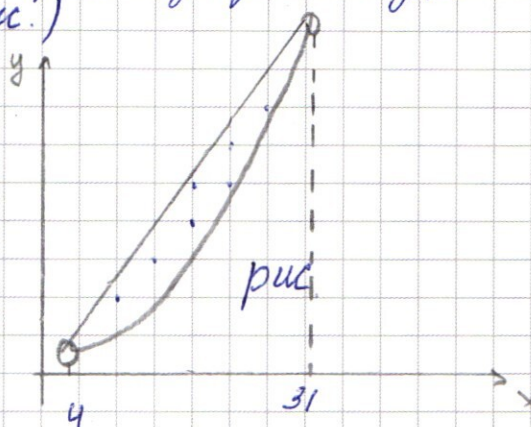
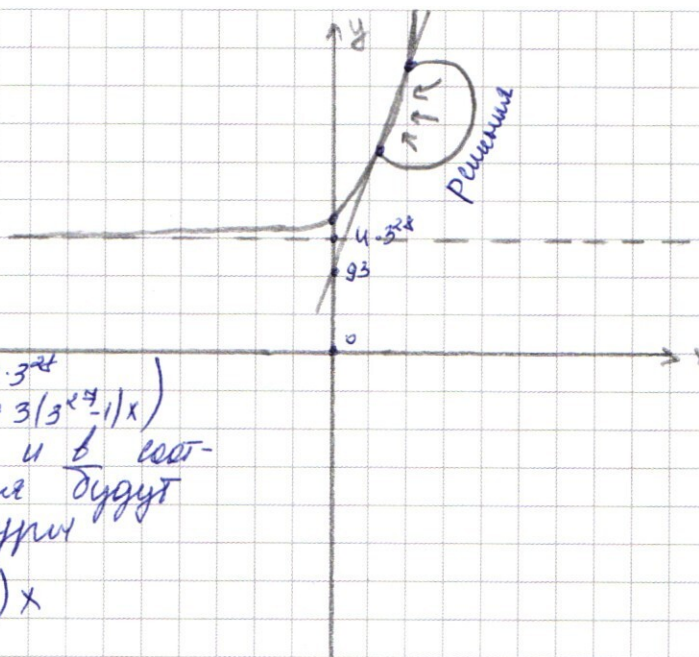
пер-ая в двух точках и в соот-
ии с пер-ой, решение будет
заключено внутри фигуры

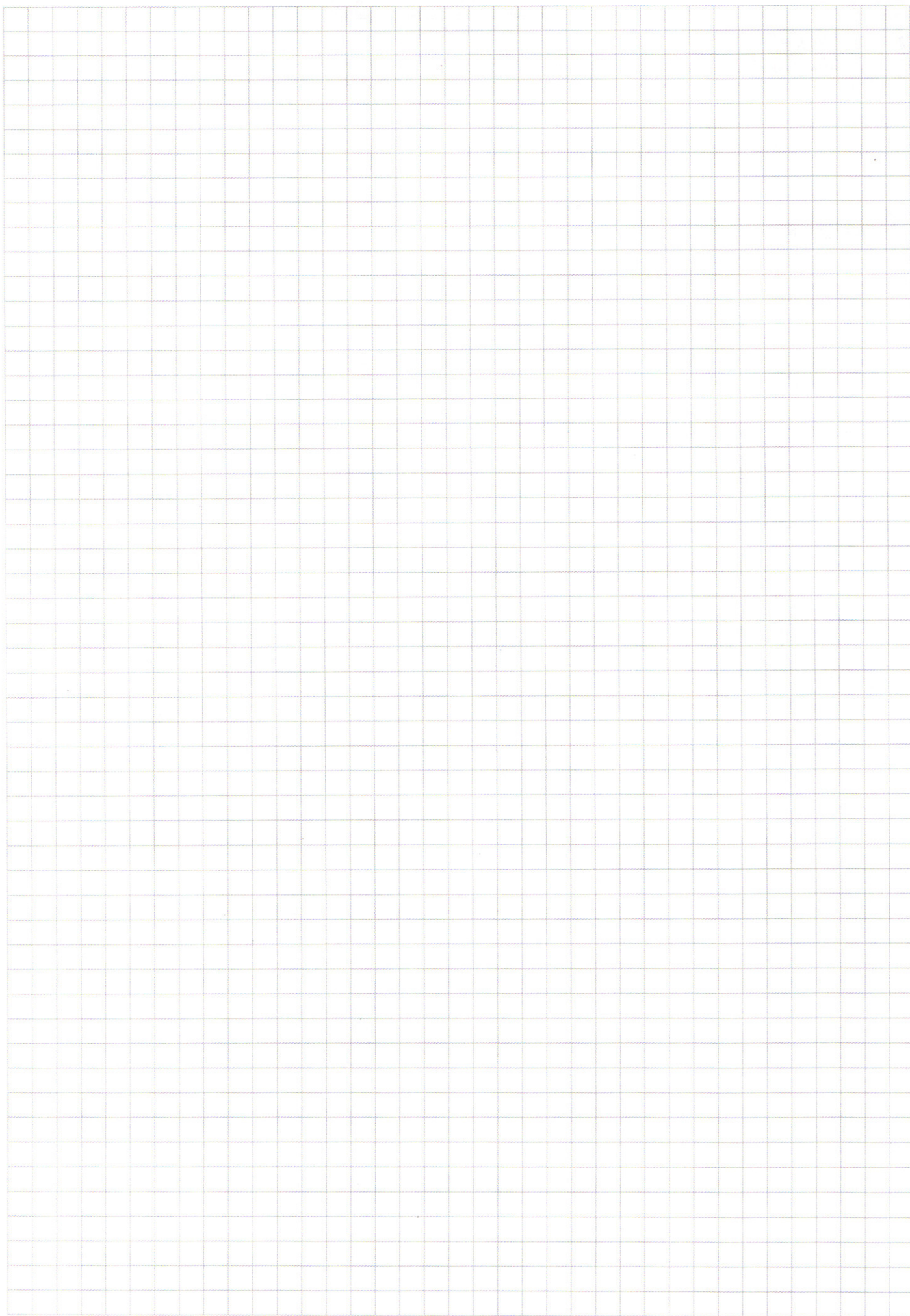
$$3^x + 4 \cdot 3^{2x} = 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

имеет 2 р-и: $x = 4$
 $x = 31$

Большее р-и-е не т.к. далее ф-я y будет «вз-ть
оценку» ф-ии $y_2 \Rightarrow$

Числом, получающ ответ на вопрос задачи будет
кон-во чисел точек (см. рис.)



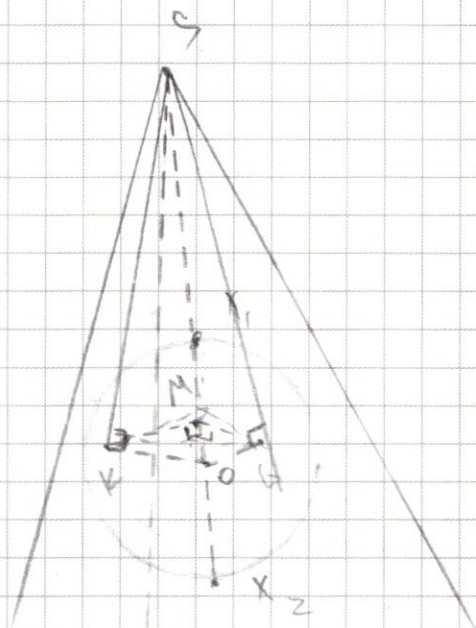


☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a) $\sqrt{v}$
 $\sqrt{v}$



$$\frac{SX_1}{SX_2} = \frac{3}{4}$$

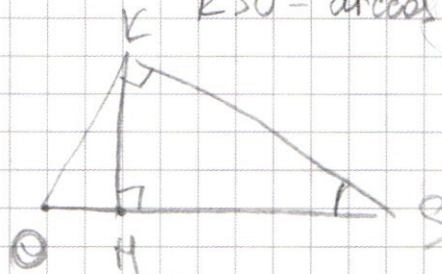
из и-и-и
теор.

$$3x \cdot 4x = SX^2$$

$$SX = 2\sqrt{3} \cdot x$$

$$\cos \angle SDO = \frac{2\sqrt{3}}{3.5}$$

$$\angle SDO = \arccos \frac{4\sqrt{3}}{7}$$



$$\cos = \frac{SH}{SK}$$

$$SH = SK \cdot \cos$$

$$SX_1 = \frac{2}{3.5} SO \quad \frac{SO}{SX_1} = \frac{3.5}{3}$$

$$\frac{SX}{SX_1} = \frac{SH}{SX_1}$$

$$\frac{KS \cdot \cos}{SO} = \cos^2$$

$$\frac{SH}{SO} = \cos^2$$

$$y(y+2x+4) = 3x(x+4)$$

$$y^2 + xy = 3x^2 - xy - 12x$$

$$y(y+x+4) = 3x(x + \frac{4}{3})$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right) \ln(-y) = x^2 \ln(xy^2)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x - 4y = 0 \quad | \cdot y^2$$

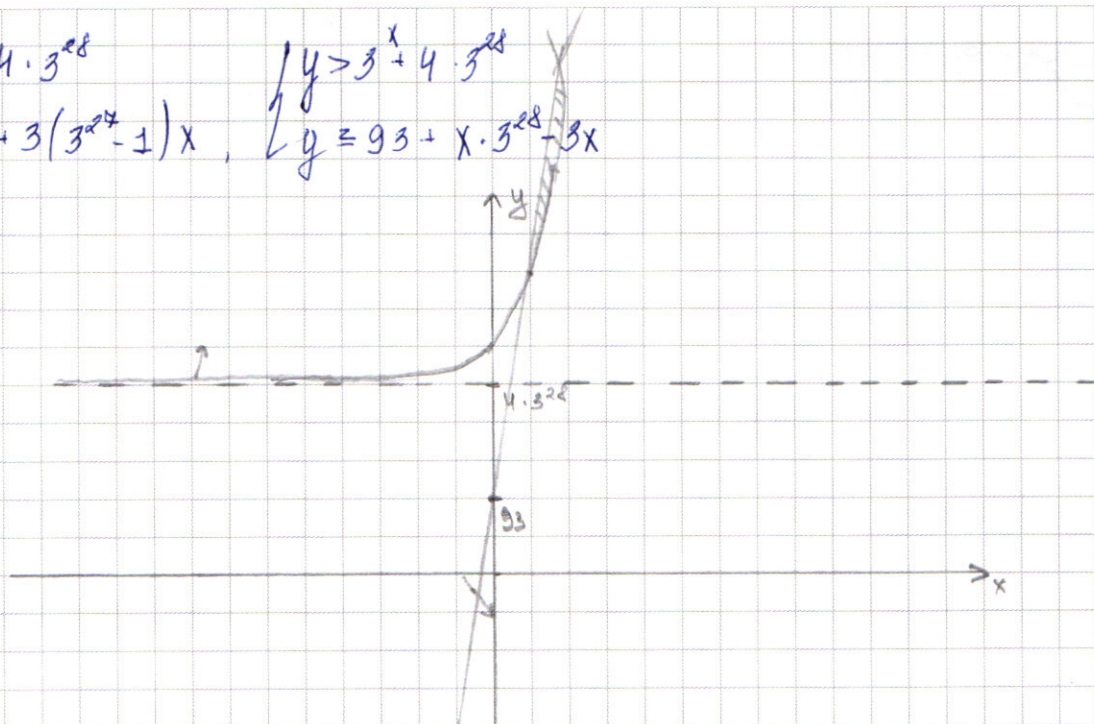
$$\begin{array}{r} \times 3.5 \\ 3.5 \\ \hline 175 \\ + 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 48 \\ 48 \\ \hline + 384 \\ \hline 192 \\ \hline \times 2304 \\ 1225 \\ \hline + 11520 \\ 4608 \\ \hline 4608 \\ 2304 \\ \hline 2822400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28224 \overline{) 2401} \\ 2401 \quad 11,75 \\ \hline 4214 \\ 2401 \\ \hline 18130 \\ 16807 \\ \hline 13230 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 49 \\ 49 \\ \hline + 441 \\ \hline 196 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{28} - 1)x \end{cases}, \quad \begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + x \cdot 3^{28} - 3x \end{cases}$$



$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + x \cdot 3^{28} - 3x$$

$$x = 4$$

$$3^x + 3x - 94 = 3^{28}(x - 4)$$

$$93 + 31 \cdot 3^{28} - 3 \cdot 31$$

$$93 + 4 \cdot 3^{28} - 3 \cdot 4$$

$$24 \cdot 3^{28} - 81$$

$$3^3 \cdot 3^{28} - 3^4$$

$$f(15) - f_2(15) \approx 2$$

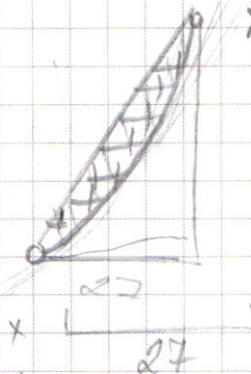
$$3^x = x \cdot 3(3^{28} - 1) \cdot 93 - 4 \cdot 3^{28}$$

$$3^x = 3^{28}x - 3x + 93 - 4 \cdot 3^{28}$$

$$3^x = 3^{28}(x - 4) - 3x + 93$$

$$x = 4$$

$$x = 31$$



$$f(31) - f(4) =$$

$$= (3^{31} - 3^4) =$$

$$\Delta y$$

$$\Delta x \quad 27$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x + \cos 3x + \cos 3x \sin 4x + \sin 3x \cos 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x - \sin 3x + \cos 3x (\cos 4x + \sin 4x) - \sin 3x (\sin 4x - \cos 4x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x (\cos 4x + \sin 4x + 1) - \sin 3x (\sin 4x + 1 - \cos 4x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64824 \overline{) 7} \\ 63 \quad \overline{) 9261} \\ \underline{18} \\ 14 \\ \underline{42} \\ 42 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ 9 \quad \overline{) 3084} \\ \underline{26} \\ 24 \\ \underline{21} \\ 21 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3084 \overline{) 3} \\ 3 \quad \overline{) 1029} \\ \underline{008} \\ 6 \\ \underline{24} \\ 24 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ 9 \quad \overline{) 1343} \\ \underline{12} \\ 12 \\ \underline{09} \\ 9 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 3} \\ 3 \quad \overline{) 11} \\ \underline{9} \\ 2 \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \quad \overline{) 49} \\ \underline{63} \\ 63 \\ \underline{0} \end{array}$$

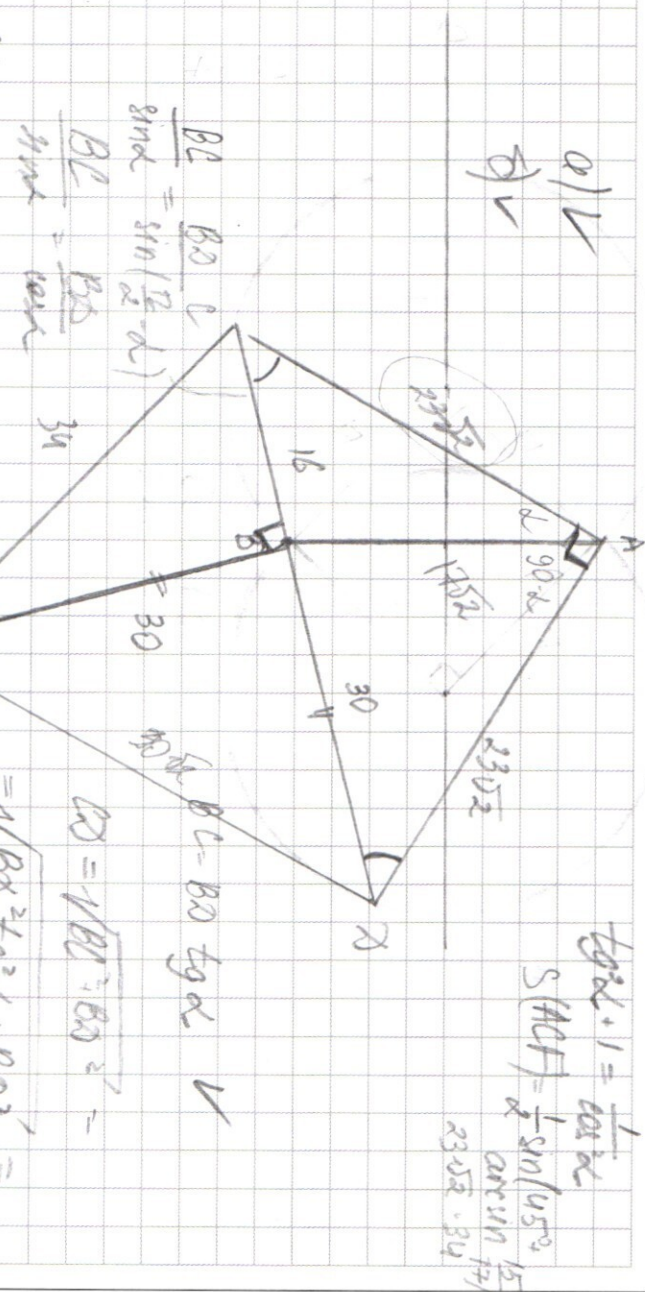
$$64824 = 7^4 \cdot 3^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 - \text{количество перестановок}$$

Период

7	7	7	7	3	3	3	1
7	7	7	7	3	3	1	3
7	7	7	7	3	1	3	3
7	7	7	7	3	3	3	3
7	7	7	1	7	3	3	3
7	7	7	1	3	4	3	3
7	7	7	1	3	3	7	3
7	7	7	1	3	3	3	7
7	7	1	7	3	3	3	7
7	7	1	7	3	3	7	3
7	7	1	7	3	7	3	3
7	7	1	7	7	3	3	3
7	7	1	3	7	3	3	7
7	7	1	3	4	3	4	3
7	7	1	3	4	4	3	3
7	7	1	3	3	7	3	7
7	7	1	3	3	7	7	3
7	7	1	3	3	3	7	7
7	1	7	7	7	3	3	3
7	1	7	7	3	7	3	3
7	1	7	7	3	3	7	3
7	1	7	7	3	3	3	7
7	1	7	3	7	7	3	3
7	1	7	3	7	3	7	3
7	1	7	3	7	3	3	7
7	1	7	3	3	7	3	7
7	1	7	3	3	7	7	3
7	1	7	3	3	3	7	7

$$\begin{aligned} BC &= 16 \\ BF &= \sqrt{16 + 16 + 34 + 16} = \sqrt{82} \\ CO &= 46 \Rightarrow AC = AO = 23\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= 16 \\ BF &= 34 \\ CO &= 46 \Rightarrow AC = AO = 23\sqrt{2} \end{aligned}$$



$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

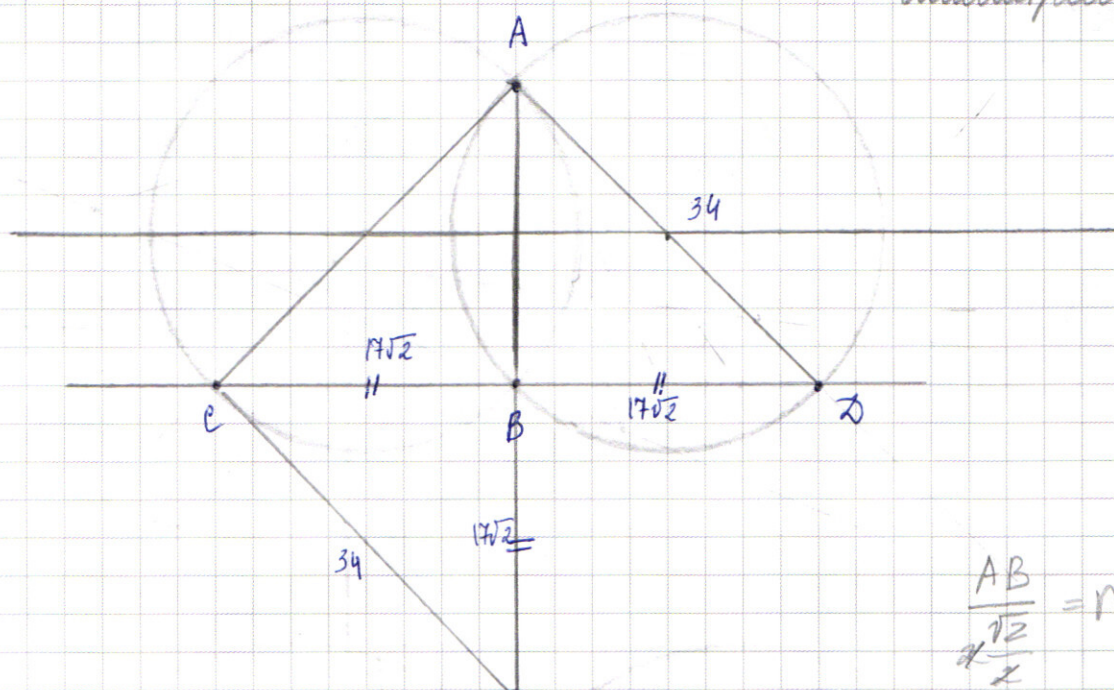
$$y^2 + 2xy + x^2 - 4(x^2 - 3x - y) = 0$$

$$(y+x)^2$$

$$|y+8+y| + |x-y+8| = 16 \quad (1)$$

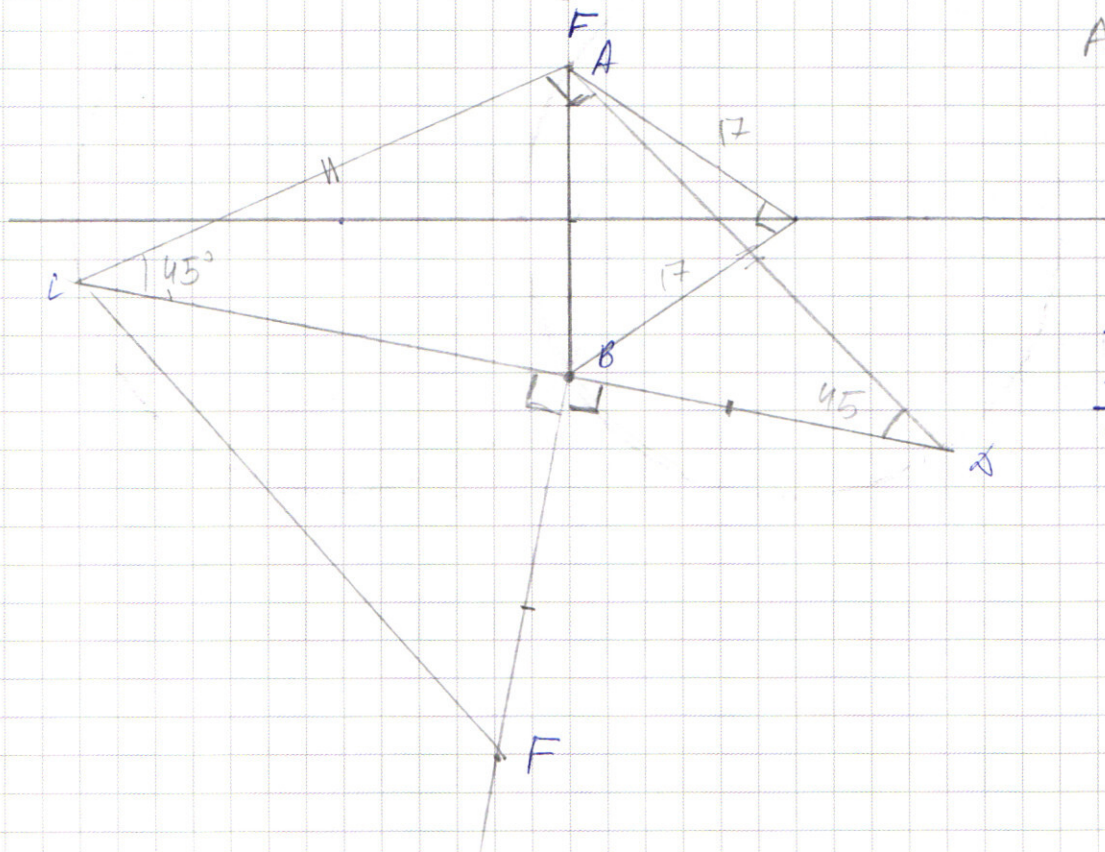
$$|(x-8)+y| + |(x-8)-y| = 16$$

Т. сим. $AB = AC$
симметрия



$$\frac{AB}{\frac{17\sqrt{2}}{2}} = r$$

$$AB = 17\sqrt{2}$$



$$\frac{23}{17} = \frac{161}{391}$$



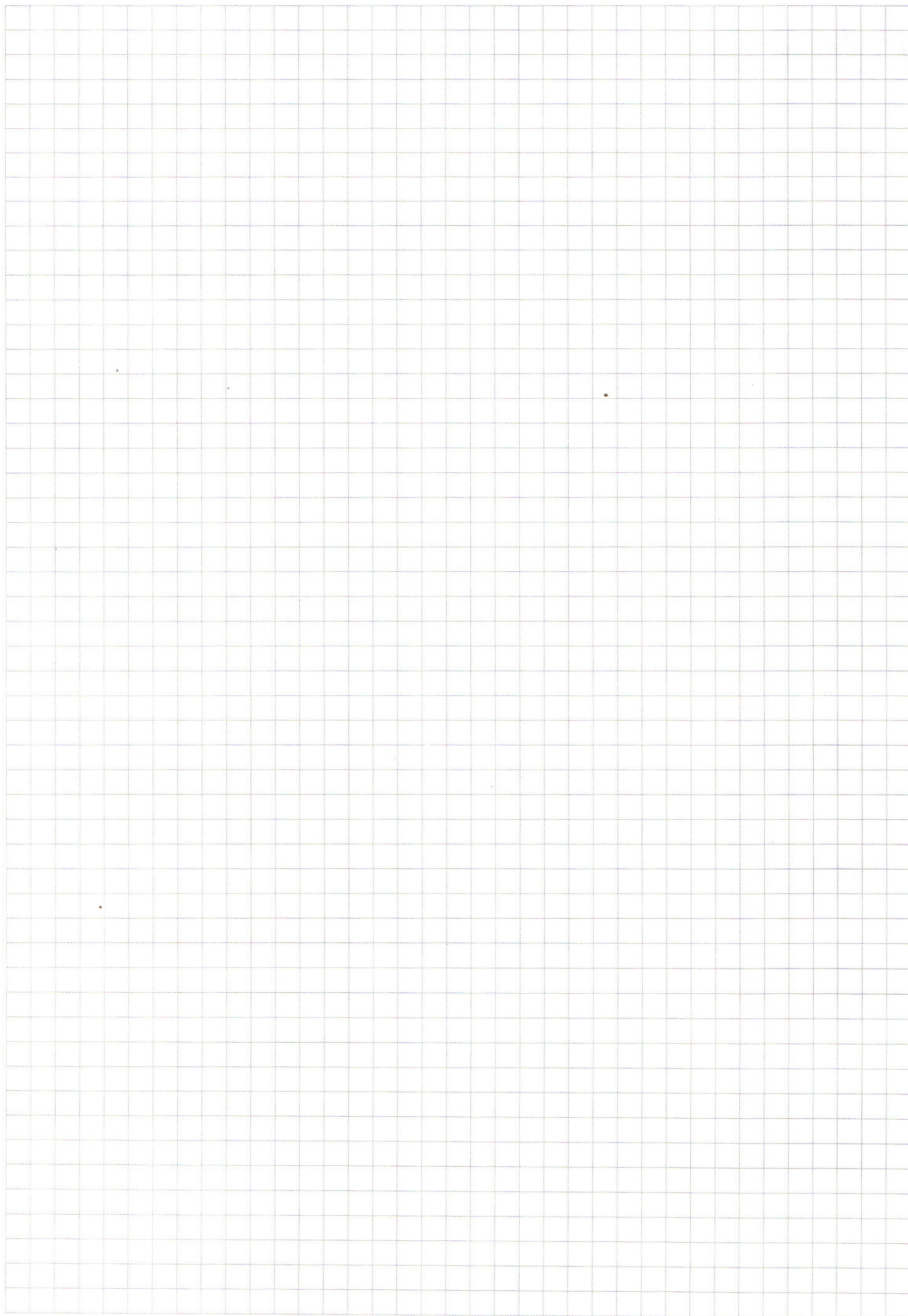
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)