

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

3. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

4. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.

5. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

6. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.

7. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

8. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

9. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{array}{r}
 64827 \\
 - 63 \\
 \hline
 18 \\
 - 18 \\
 \hline
 027 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7203 \\
 - 6 \\
 \hline
 12 \\
 - 003 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2401 \\
 - 21 \\
 \hline
 30 \\
 - 28 \\
 \hline
 21 \\
 - 21 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 343 \\
 - 28 \\
 \hline
 63
 \end{array}$$

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

Заметим, что простые числа в разложении всего 4, значит точно есть хотя бы одна единица. Также заметим, что $3 \cdot 3 = 9$, то есть 2 тройки можно заменить на 9. Тогда разберём 2 случая: ① Когда есть одна 9, одна 3 и четыре 7 и две 5. Начнём с 9. Её мы можем поставить на 8 мест. Тройку мы можем поставить на 4 оставшихся. Две единицы мы должны расставить на оставшихся шесть мест. Оставшихся 4 единицы встанут на незанятые места. ~~то есть~~ Т.О. кол-во таких чисел равно $8 \cdot 4 \cdot C_6^2 = 56 \cdot \frac{6!}{4!2!} = 56 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} = 56 \cdot 15 = 840$.

② Когда есть три тройки, четыре единицы и одна единица. Единицу поставим на одно из 8 мест. Три тройки расставим на оставшихся 7-ми местах (C_7^3). Оставшихся

сумму вставить на результирующую строку:

$$8 \cdot C_7^3 = 8 \cdot \frac{7!}{4!3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 280.$$

$$8 \cdot C_7^3 + 8 \cdot 7 \cdot C_6^2 = 280 + 840 = 1120.$$

Ответ: 1120.

$$\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \cos 4x + \cos 3x &= 2 \cos 5x \cos 2x \\ + \sin 7x - \sin 3x &= 2 \sin 2x \cos 5x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$\begin{aligned} &(\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = 0 \\ &\cos 5x (\cos 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = \\ &= \cos 5x (2 \cos \frac{\pi}{4} \cos(x - \frac{\pi}{4})) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = \\ &= \cos 5x (\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = \\ &= \sqrt{2} \cos 5x \cos(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = 0. \\ &\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} (\cos(6x - \frac{\pi}{4}) + \cos(4x - \frac{\pi}{4})) \end{aligned}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \cos^2 2x - \sqrt{2} \sin^2 2x = 0.$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x) + 2 \sin 2x (\cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x) = 0.$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0.$$

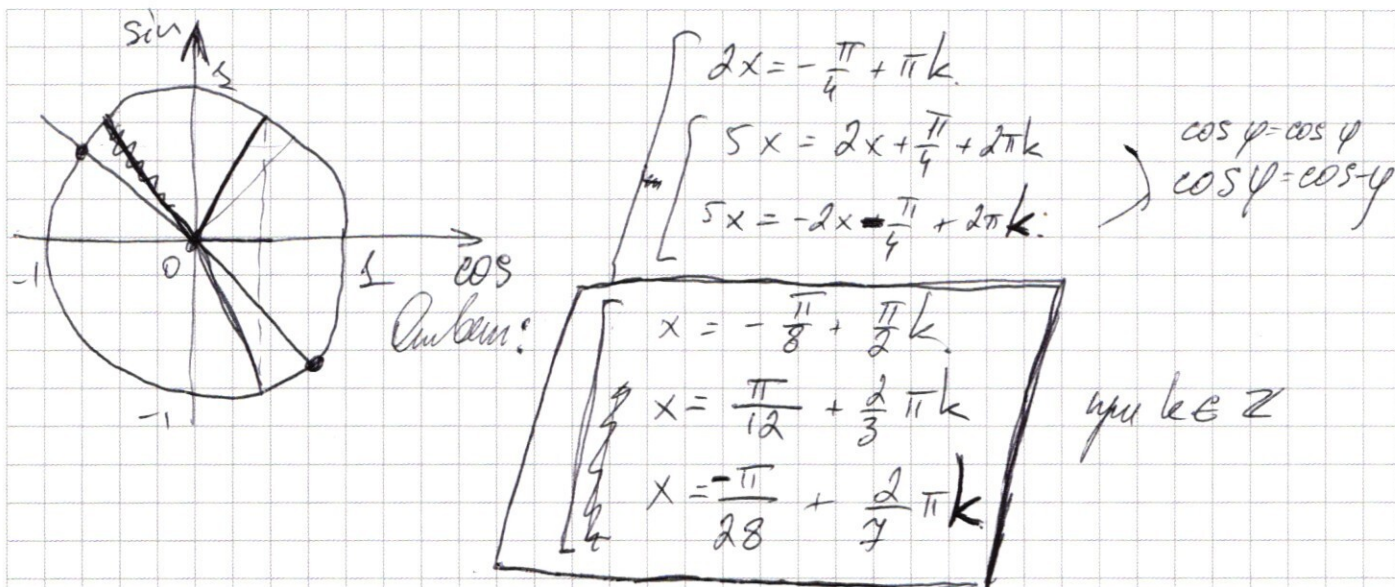
$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0.$$

$$\begin{cases} \cos 2x = -\sin 2x & \rightarrow \operatorname{tg} 2x = -1 \\ \cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{4} \\ &\sin \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{4} \\ &\cos \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2(\ln x + 2\ln|y|)}$$

возведе

ОДЗ

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{-x^{\ln|y|}}{y^{\ln|y|}} \cdot \frac{1}{x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln|y|}} = 1$$

т.к. $y < 0$.

$$\frac{x^{3\ln|y| - 2\ln x}}{|y|^{\ln|y|}} = 1$$

$$x^{3\ln|y| - 2\ln x} = |y|^{\ln|y|}$$

$$y^2 + y(2x + 4) + (2x - 3y)^2 = 0$$

$$D = (4(x-1))^2$$

$$y = \frac{-(2x+4) \pm 4(x-1)}{2} =$$

$$= (-x-2) + (2x-2)$$

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$y = -3x \quad x \quad 3 \ln 3x - 2 \ln x = (3x)^{\ln 3x} = 3^{\ln 3x} \cdot x^{\ln 3x} = 3^{\ln 3x} \cdot x^{\ln 3} \cdot x^{\ln x}$$

$$|y| = 3x, \text{ m.p. } x > 0.$$

$$\frac{(x^{\ln 3} \cdot x^{\ln x})^3}{(x^{\ln x})^2} = 3^{\ln 3x^2} \cdot x^{\ln x}$$

$$(x^{3 \ln 3})^3 = 3^{\ln 3x^2}$$

$$3^{3 \ln x} = 3^{\ln 3x^2}$$

$$x^3 = 3x^2$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

не подх.
но 0 и 3.

$$y = x - 4 \quad x \quad 3 \ln |x-4| - 2 \ln |x| = |x-4|^{\ln |x-4|}$$

x и y разных знаков

$$3 \ln (4-x) - 2 \ln x = (4-x)^{\ln (4-x)}$$

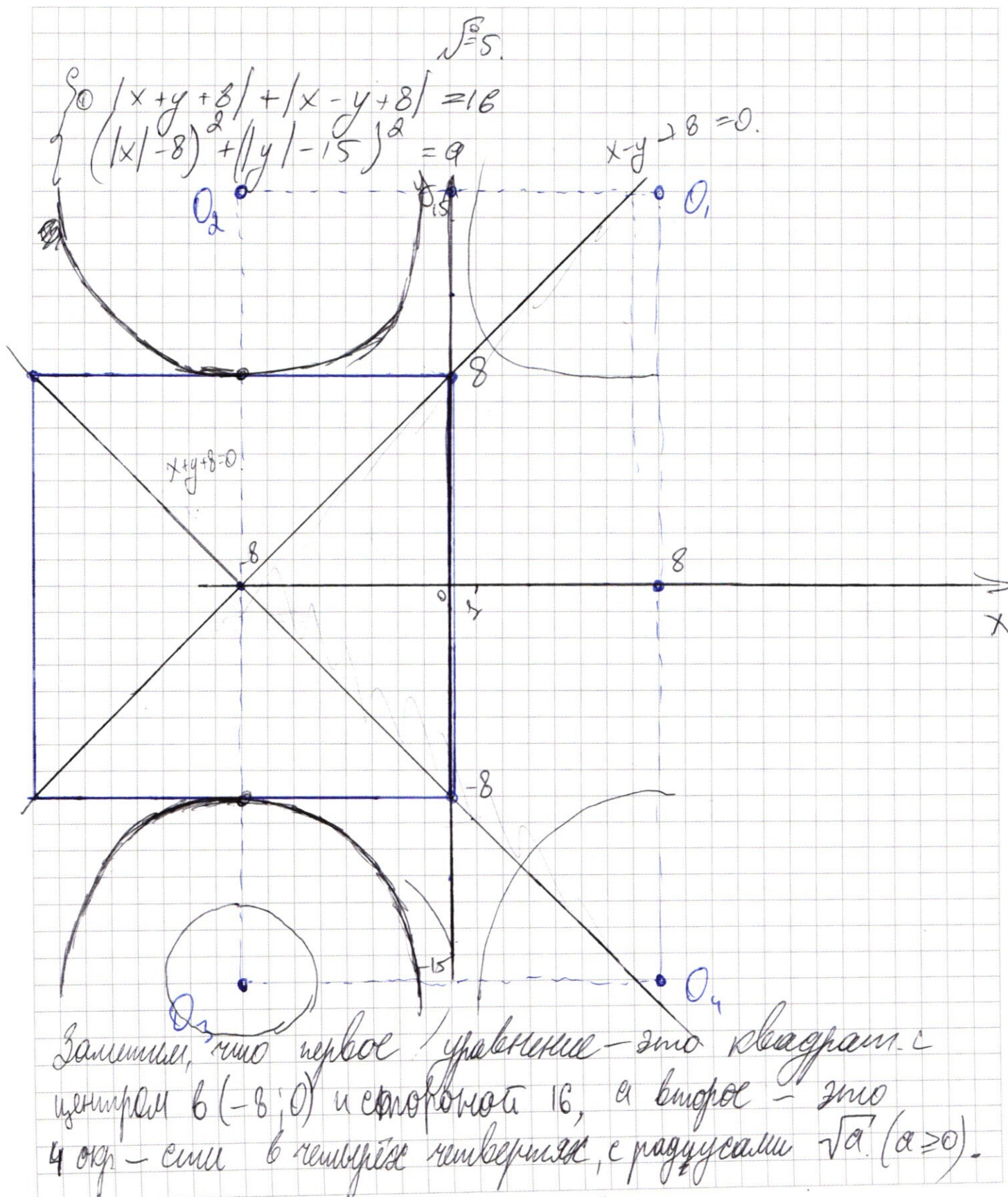
$$\left(\frac{x^3}{4-x} \right)^{\ln 4-x} = x^{2 \ln x}$$

$$\rightarrow y = -2$$

При $x = 2$ все сходится; замечает, что у этих функций всего одна т. пересечения, т.е. перед и после ~~для~~ $x = 2$ знаки их производных различны.

$$\text{Ответ: } (x; y): \{(2; -2); (3; -9)\}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Путем если точка лежит в какой-то четверти, то она должна лежать на окружности с номером этой же четверти. Заметим, что окружности O_2 и O_3 симметричны относительно осей $y=0$, как и квадрат. $\Rightarrow$ они будут давать одинаковое число корней с точностью до пересечений.

Кол-во корней равно 2-м, когда $a = \sqrt{7} \Leftrightarrow$ окр-сти O_2 и O_3 касаются квадрата, а O_1 и O_4 не достают до него. При $a < \sqrt{7}$ существует хотя бы 4 пересечения окр-стей с квадратом. Здесь d - расстояние от O_1 до т. $(0;0)$ $d = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$. При $d = 17$ снова 2 корня: $(0;0)$ и $(-16;0)$. Дале корней нет.

Ответ: $a \in \{\sqrt{7}, 17\}$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28} \cdot x - 3x$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27} < 31 + 3^{27} \cdot x - 3x$$

$$3^{x-1} + x - 31 < 3^{27} (x - 4)$$

при $x < 5$ корней нет.

Количество подходящих y при фикс. x :

$$A = 3^{28}(x-4) + 93 - 3x - 3$$

$$A = 0 \text{ при } x = 31$$

$$\begin{aligned} & \underset{x=5}{\overset{31}{\downarrow}} 3^{28} \cdot x - 4 \cdot 3^{28} + 93 - 3x - 3 = 27 \cdot (-4 \cdot 3^{28} + 93) + \\ & + \left(\underset{x=5}{\overset{28}{\downarrow}} 3 - 3 \right) \underset{x=5}{\overset{31}{\downarrow}} x - \underset{x=5}{\overset{31}{\downarrow}} 3 = \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$= 27 \cdot (-4 \cdot 3^{28} + 93) + (3^{28} - 3) \left(\frac{32 \cdot 31}{2} - 10 \right) - \frac{31}{4} 3^x \quad \text{---}$$

$$2 \cdot 3^x + 3^5 = 3^{32} \quad (\text{по соотношению о степенях})$$

$$x=5 \quad \frac{3^{32} - 3^5}{2}$$

$$\textcircled{=} -4 \cdot 3^{31} + 81 \cdot 31 + (3^{28} - 3) \cdot 486 - \frac{3^{32}}{2} + \frac{243}{2} - 3^{31} \left(\frac{11}{2} \right) + 3^4 \cdot 31 + \frac{243}{2} + (3^{28} - 3) \cdot 486 =$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 31 \\ \hline 243 \\ 2511 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 486 \\ 3 \\ \hline 1458 \\ -2511 \\ \hline 1053 \end{array}$$

$$= -\frac{11}{2} \cdot 3^{31} + 1053 + \frac{243}{2} + 3^{28} \cdot 486 =$$

$$= \left(-\frac{11}{2} + 18 \right) \cdot 3^{31} + \frac{2349}{2} = \frac{25 \cdot 3^{31}}{2} + \frac{2349}{2} =$$

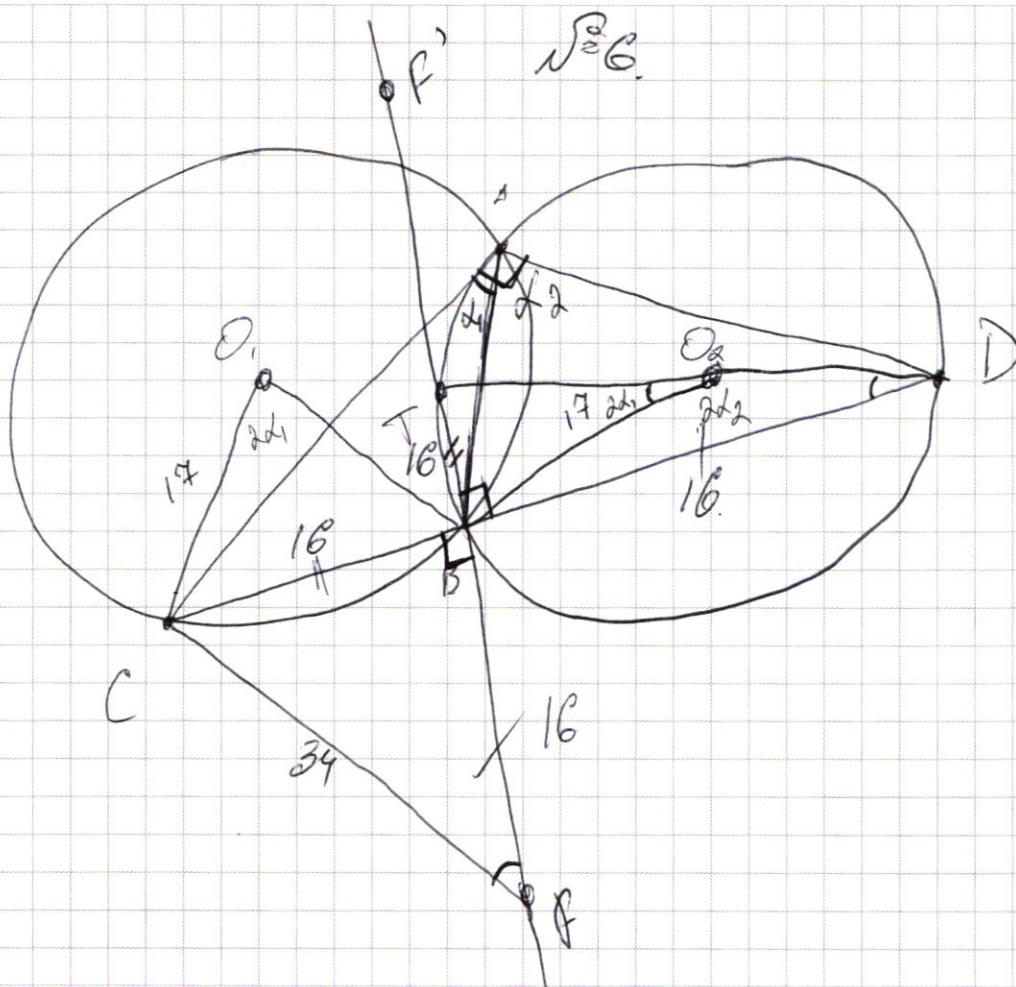
$$\begin{array}{r} 486 \overline{) 9} \\ 45 \overline{) 54} \quad 227 \\ \hline 36 \quad 2 \end{array}$$

$$486 = 3^5 \cdot 2$$

$$1053 \cdot 2 = 2106$$

$$\begin{array}{r} 2106 \\ + 243 \\ \hline 2349 \end{array}$$

Ответ: $\frac{25 \cdot 3^{31}}{2} + \frac{2349}{2}$



а) Проведем DO_2 до пересечения с второй окр-стью.
 Это точка T . Проведем AB . Тогда $\angle CAB = \alpha_1$, $\angle DAB = \alpha_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle CO_1B = 2\alpha_1$, $\angle BO_2D = 2\alpha_2$. Заметим, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 180^\circ \Rightarrow \angle TO_2B = 2\alpha_1 \Rightarrow$, т.к. радиусы
 окр-стей равны, то $CB = TB$. $\angle TBI = \angle CBF$ и
 $TB = CB$ и $BI = BF \Rightarrow \angle CBF = \angle TBI \Rightarrow$
 $\Rightarrow CF = TD = 2R = 2 \cdot 17 = \boxed{34}$

$$\cos \alpha_1 = \frac{2 \cdot 17^2 - 16^2}{2 \cdot 17^2} = \frac{322}{578} = \frac{161}{289}$$

$$2\alpha_2 = 180 - 2\alpha_1 \text{ (из @)}$$

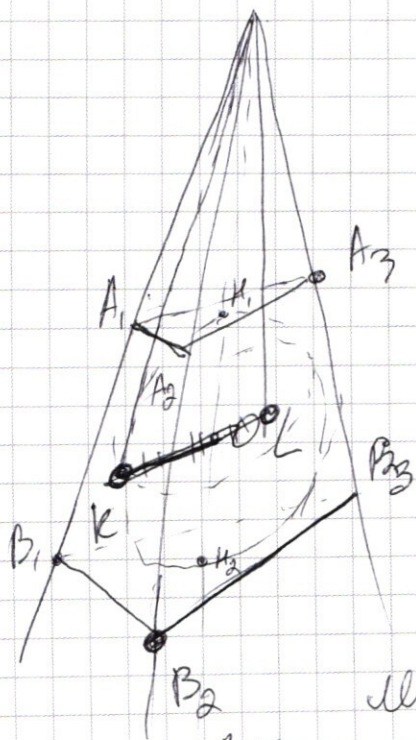
$$BI = \sqrt{2 \cdot 17^2 + 2 \cdot 17^2 \cdot \frac{161}{289}} = \sqrt{\frac{256}{1}} = 16$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 170 \\ \hline 289 \\ + 2 \\ \hline 578 \\ - 256 \\ \hline 322 \end{array} \quad \begin{array}{r} 289 \\ - 161 \\ \hline 128 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BC = BD \Rightarrow (BF)$ совпадает с (AB) (по симметрии).
Заметим, что T в таком случае совпадает с
м.к. $(BF) = (AB)$ и A и $T = \omega_2 \cap (AB)$. Т.к. $TB = BC = 16$ и
 $BF = BD = 16$, то CB - высота и медиана $\rightarrow \triangle ACF$ рф.
 $S(\triangle ACF) = \frac{1}{2} AF \cdot CB = \frac{1}{2} (AB + BE) \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot (16 + 16) \cdot 16 =$
 $= 256.$

Ответ: ~~256~~ а) 34 б) 256
№ 4

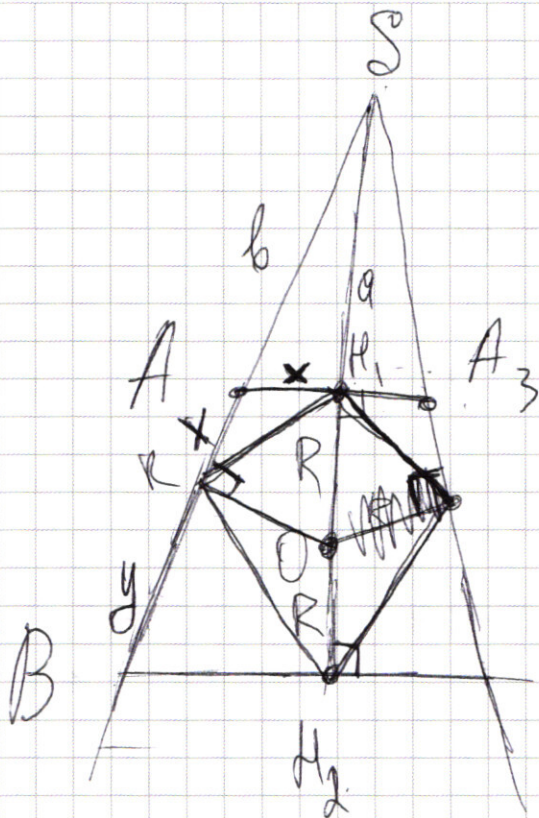


Заметим, что $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$,
т.к. расположенны в параллельных
плоскостях и выходящие
одинаковые плоскости.

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$A_2A_3 \parallel B_2B_3$
 $\triangle SA_2A_3 \sim \triangle SB_2B_3$
 $\triangle SA_1A_2 \sim \triangle SB_1B_2$
 $\triangle SA_1A_3 \sim \triangle SB_1B_3$

Синие KA_3 . Заметим, что O
лежит в нем, потому что O и
 K лежат на биссекторе угла, отсчитанного
на ребро SA_3 , а (KSA_3) и есть этот биссектор.



А и В - какие-то вершины
на ребрах A_1A_2 и B_1B_2 ,
а именно A_3A - биссектриса
угла $A_1A_2A_3$, а B_3B - биссектриса
 $\frac{A_3A}{B_3B} = \frac{2}{3}$.

$$\triangle SKO \sim \triangle SH_1$$

$$\sim \triangle SBH_2$$

$$SH_1 = a.$$

ст. т. с, они орт-сиг.

$$SK^2 = SH_1 \cdot SH_2$$

$$\frac{SK^2}{SH_1^2} = \frac{SH_2}{SK \cdot SH_1} = \frac{a}{3} \text{ (н. подобия)}$$

$$\frac{SK}{SH_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$SH_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} SK$$

$$SH_1^2 + x^2 = (SK - x)^2$$

$$\frac{3}{4} SK^2 + x^2 = SK^2 - 2SKx + x^2$$

$$\frac{SK}{4} = 2SK \cdot x$$

$$SK = 8x \Rightarrow SA = 4x \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) Заметим, что (из условия)

$$\frac{SA}{SB} = \frac{3}{4} = \frac{b}{b+x+y} = \frac{7x}{8x+y} = \frac{3}{4}$$

$$28x = 29x + 3y$$

$$4x = 3y$$

$$y = \frac{4}{3}x$$

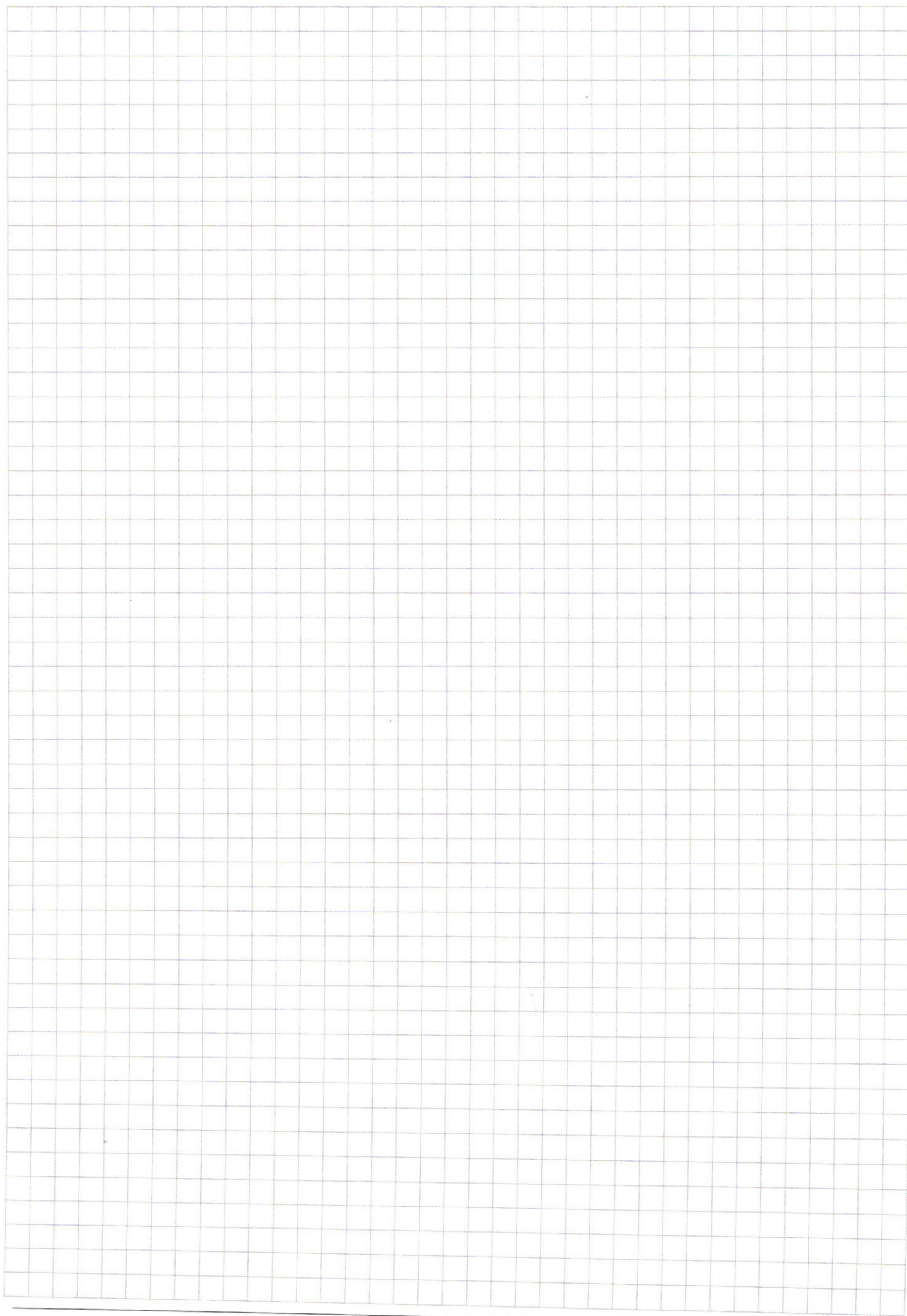
$$\frac{S(A_1A_2A_3)}{S(KLM)} = \left(\frac{SA}{SK}\right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$$

$$S(KLM) = \frac{64 \cdot S(A_1A_2A_3)}{49} = \frac{64 \cdot 9}{49} =$$

$$= \frac{576}{49}$$

$$\begin{array}{r} \times 64 \\ 9 \\ \hline 576 \end{array}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$; $S(KLM) = \frac{576}{49}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0.$$

$$y = 0 \rightarrow x = 4.$$

$$x = 0 \rightarrow y = -4$$

$$x = 4,$$

$$y^2 + 8y - 48 + 48 + 4y = 0.$$

$$y^2 + 12y = 0.$$

$$(y + 12)y = 0.$$

$$y = -12 \quad y = 0.$$

$$y = -4.$$

$$16 - 8x - 3x^2 + 12x - 16 = 0.$$

$$-3x^2 + 4x = 0.$$

$$x(4 - 3x) = 0.$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$x = 0$$

$$(y + ax)(y + bx) =$$

$$y^2 + y(2x + 4) + (12x - 3x^2) = 0.$$

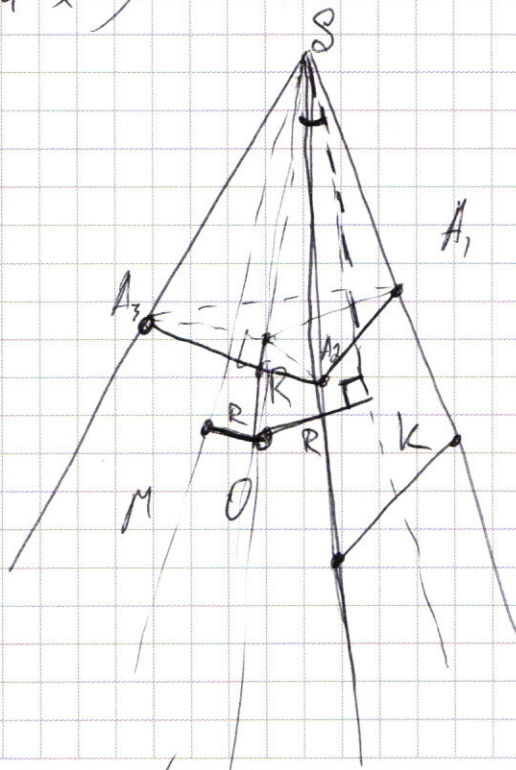
$$\begin{aligned} D &= 4x^2 + 16x + 16 - 48x + 12x^2 = \\ &= 16x^2 - 32x + 16 = (4x - 4)^2 = 16(x - 1)^2. \end{aligned}$$

$$\log_2 8 = 4^3$$

$$8 \log_2 4 = 8^2$$

$$\left(\frac{x^3}{|y|} \right)^{\ln y} = x^{2 \ln x}$$

$$\left(\frac{x^3}{4-x} \right)^{\ln 4-x} = x^{2 \ln x}$$



$$\frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} = \frac{2}{3}$$