

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Разложим 64827 на множители: $64827 = 3^3 \cdot 7^4$

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

Значит, в записи числа обязательно присутствуют четыре семерки +

+ 1) три тройки

2) девятка и тройка

3) две девятки

4) три девятки

5) четыре девятки

Рассмотрим (1) случай. 7 цифр как задано, а еще одна 9 может быть любой. Исключим цифру '9', ведь её присутствие задает случай (2). Кол-во вариантов $\frac{7! \cdot 9}{4! \cdot 3!} - 1 = 314$

Один вариант лишний, т.к. в нем первом месте стоит '0'. Рассмотрим (2) случай. Задано уже всего 6 цифр и две позиции под любые числа. Исключим повторение цифр '9'.

Кол-во вариантов $\frac{6! \cdot 9 \cdot 9}{4!} - 1 = 2429$

Рассмотрим (3) случай. Задано снова 6 цифр и две позиции под любые числа. Снова исключим повторение '9'. Вариантов $\frac{6! \cdot 9 \cdot 9}{4! \cdot 2} - 1 = 1214$

Аналогично, для случаев (4) получаем $\frac{7! \cdot 9}{4! \cdot 3!} - 1 = 314$

для случая (5) $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 140$

Всего получаем $314 + 2429 + 1214 + 314 + 140 = 4411$

Ответ: 4411

$$3. \begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2), & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases} \quad x > 0, y < 0$$

$$(1): \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2), \quad | \cdot (-y)^{\ln(-y)}$$

$$x^7 \ln(-y) = x^2 \ln x \cdot x^2 \ln y^2 \cdot (-y)^{\ln(-y)},$$

$$x^7 \ln(-y) = x^2 \ln x \cdot x^4 \ln(y) \cdot (-y)^{\ln(-y)}, \quad | : x^{2 \ln x + 4 \ln y} = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2$$

$$x^{3 \ln y} - 2 \ln x = (-y)^{\ln(-y)}$$

$$(2) y^2 + 2(x+2)y - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\frac{D}{4} = (x+2)^2 + 3x^2 - 12x =$$

$$y = -x - 2 \pm (2x - 2)$$

Трансформировав по основанию e

$$\ln x^{3 \ln(-y) - 2 \ln x} = \ln(-y)^{\ln(-y)}$$

$$\ln x (3 \ln(-y) - 2 \ln x) = \ln^2(-y)$$

$$\ln^2(-y) - 3 \ln x \cdot \ln(-y) + 2 \ln^2 x = 0, \quad | : \ln^2 x$$

$$\left(\frac{\ln(-y)}{\ln x}\right)^2 - 3 \frac{\ln(-y)}{\ln x} + 2 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\ln(-y)}{\ln x} = 1 \\ \frac{\ln(-y)}{\ln x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(-y) = \ln x \\ \ln(-y) = 2 \ln x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y = x \\ -y = x^2 \end{cases}$$

корень $x=1$
 $y=-1$

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -3x \end{cases}$$

Решаем систему:

$$1) \begin{cases} -3x = -y \\ x = 0 \end{cases} \quad (3; -9)$$

$$2) \begin{cases} -3x = -x^2 \\ x(x-3) = 0 \\ x = 0 \quad \text{или} \quad x = 3 \end{cases} \Rightarrow y = -9$$

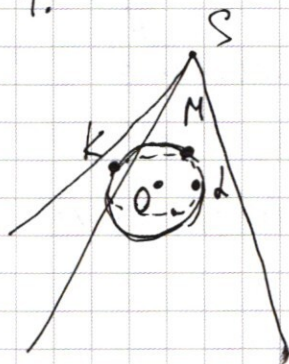
$$3) \begin{cases} x - 4 = -x \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -2$$

$$4) \begin{cases} x - 4 = -x^2 \\ x^2 + x - 4 = 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{17} - 7}{2}$$

Ответ: $(3; -9); (2; -2);$
 $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-7}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



Рассмотрим сечения. Пусть R - радиус сферы. Показанные сечения вместе с точкой S , являющейся вершиной тетраэдра, образуют подобные ~~фигуры~~ ^{тела}.
 $k^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow k = \frac{4}{3}$

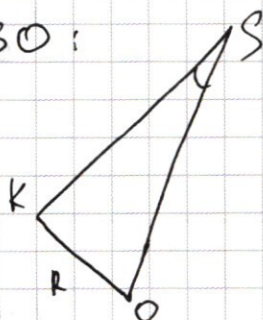
Заметим, что сечения $\perp$ -ны SO и касаются сферы $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Высоты тетраэдров равны $SO - R$ и $SO + R$

$$\frac{SO + R}{SO - R} = k \Rightarrow \frac{SO + R}{SO - R} = \frac{4}{3}$$

$$3SO + 3R = 4SO - 4R$$

$$7R = SO \quad (*)$$

Рассмотрим $\angle KSO$:



$$KO = R$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{SO} = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7} \Rightarrow$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$$

В сечении угла плоскостью KLM и сечениями ^x по 9 и 16 получаются подобные треугольники

SK, SH, SM - касательные к сфере $\Rightarrow$ изверенные

тетраэдра $SKMK$ являются средним геометрическим для исходных сечений 9 и 16

$$S_{KLM} = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{7}$; 12

$$5. \begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1): рассмотрим все случаи раскрытия модуля

$$\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \leq x+8 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 \leq y \leq 8 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \\ 2y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -8-y \\ x \leq y-8 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16 \leq x \leq 0 \\ y = 8 \end{cases}$$

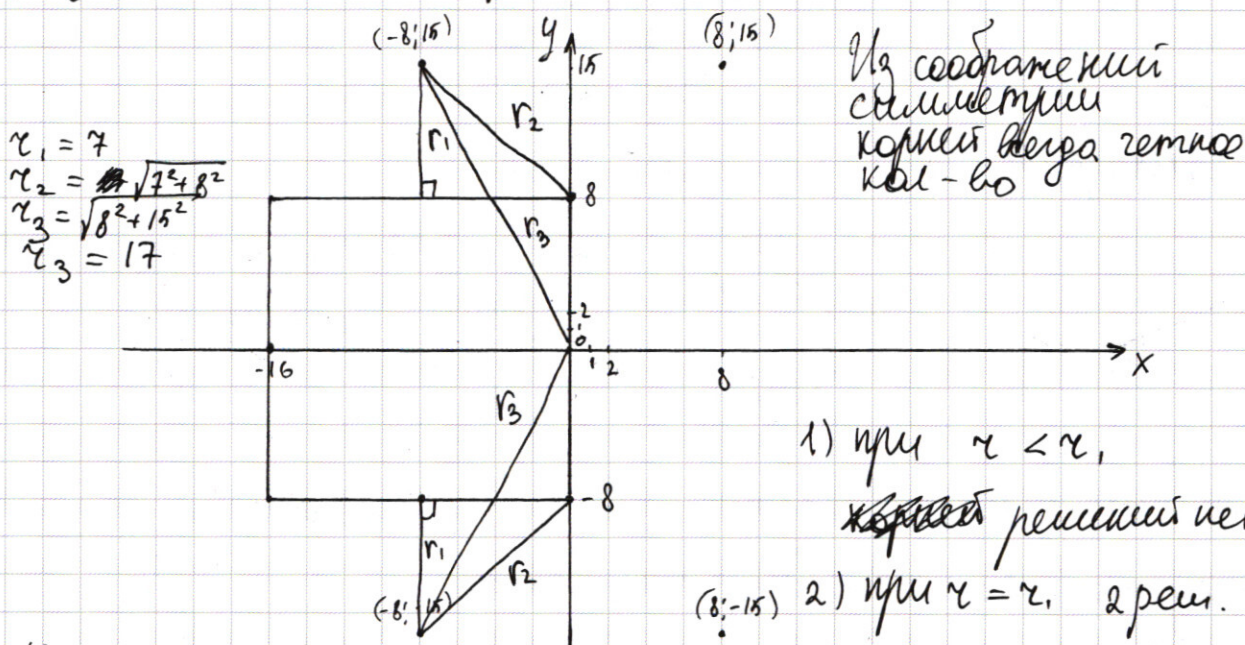
$$\begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ -2y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -y-8 \\ x \geq y-8 \\ y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16 \leq x \leq 0 \\ y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \\ 2x = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq -x-8 \\ y \geq x+8 \\ x = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 \leq y \leq 8 \\ x = 16 \end{cases}$$

Получаем квадрат с вершинами в точках $(-16; 8); (-16; -8); (0; 8); (0; -8)$

$$(2): (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$$

Уравнение задает для каждой четверти окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центрами в точках $(8; 15); (-8; 15); (-8; -15); (8; -15)$



$$\begin{aligned} r_1 &= 7 \\ r_2 &= \sqrt{7^2 + 8^2} \\ r_3 &= \sqrt{8^2 + 15^2} \\ r_4 &= 17 \end{aligned}$$

Получаем, что в решении системы будет иметь при

$$\begin{cases} \sqrt{a} = 7 \\ \sqrt{a} = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 49 \\ a = 289 \end{cases}$$

- 1) при $\sqrt{a} < r_1$, ~~хвост~~ решений нет
- 2) при $\sqrt{a} = r_1$, 2 реш. $\checkmark$
- 3) при $r_1 < \sqrt{a} < r_3$, 4 реш.
- 4) при $\sqrt{a} = r_3$, 2 реш. $\checkmark$
- 5) при $\sqrt{a} > r_3$, решений нет

Ответ: 49; 289

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \ln(3-x) = \ln x \\ \ln(3-x) = \ln x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = x \\ 3-x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{\sqrt{13}-7}{2} \end{cases}$$

$y = x - 3$

$$1) \begin{cases} x^{7 \ln(3x+1)} \cdot (3x+1)^{-\ln(3x+1)} = x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln(3x+1)} \\ x^{3 \ln(3x+1)} = x^{2 \ln x} \cdot (3x+1)^{\ln(3x+1)} \end{cases} \quad y = 3x+1$$

$$\ln x \cdot 3 \ln(3x+1) = \ln x \cdot 2 \ln x + \ln(3x+1) \cdot \ln(3x+1)$$

$$\ln x (3 \ln(3x+1) - 2 \ln x) = \ln(3x+1)^2$$

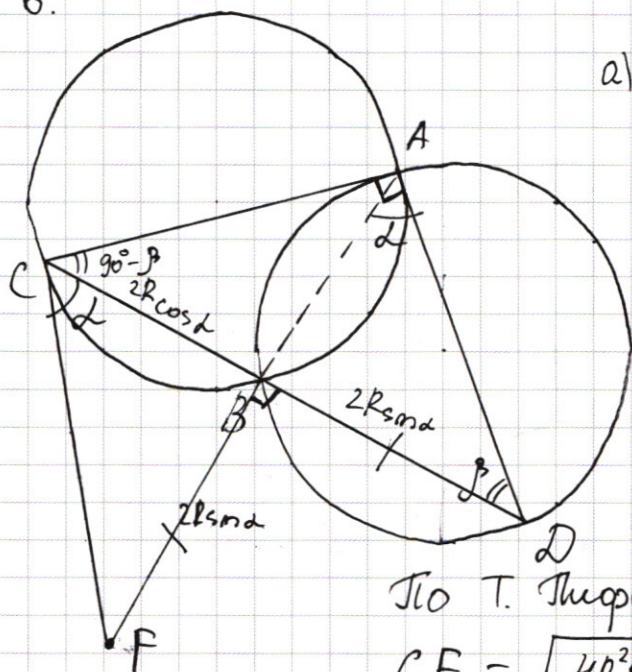
$$\begin{cases} \ln(3x+1) = \ln x \\ \ln(3x+1) = \ln x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = x \\ 3x+1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad y = -\frac{9 - 3\sqrt{13}}{2} - 1$$

6.

CF - ?

R = 17

а) Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда

$$\angle CAB = 90^\circ - \alpha$$

По Т. синусов:

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow BD = 2R \sin \alpha$$

$$\frac{BC}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R \Rightarrow BC = 2R \cos \alpha$$

$$BF = BD = 2R \sin \alpha$$

По Т. Пифагора $CF^2 = CB^2 + BF^2$

$$CF = \sqrt{4R^2 \cos^2 \alpha + 4R^2 \sin^2 \alpha} = 2R$$

$$CF = 2 \cdot 17 = 34$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} \angle BCF = \frac{BF}{BC} = \frac{2R \sin \alpha}{2R \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \angle BCF = \alpha$$

$$BC = 16 \Rightarrow 2R \cos \alpha = 16$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{R} = \frac{8}{17} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{15}{17}$$

Пусть $\angle ADB = \beta$, тогда $\angle ACB = 90^\circ - \beta$ Т. синусов: $\frac{AB}{\sin \beta} = 2R$

$$\Rightarrow \sin \beta = \cos \alpha$$

$$\frac{AB}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R$$

$$\beta = 45^\circ \Rightarrow AB = R\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$$

$$\angle ABC = 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R \Rightarrow AC = \sin(\alpha + \beta) \cdot 2R = 2R \cdot (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

$$AC = 2 \cdot 17 \cdot \left(\frac{15}{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{8}{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 23\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(\alpha + 45^\circ)$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 23\sqrt{2} \cdot \left(\frac{15}{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{8}{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 23 \cdot 23 = 529$$

Ответ: 34; 529

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7. \begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3^{28} - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 3^{28} > 3^x + 3^{29} \\ y - 3^{28} \leq 93 - 3x \end{cases}$$

Заменим $y - 3^{28}$ на t , т.к. каждому t соответствует

единственный y эта замена рав справедлива

$$\begin{cases} t > 3^x + 3^{29} \\ t \leq 93 - 3x \end{cases} \quad \text{Видно, что } x < 0 \quad (\text{При неотрицательных} \\ \text{точно не будет решений)} \Rightarrow 3^x < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{\min} = 3^{29} + 1$$

$$93 - 3x > 3^x + 3^{29}$$

$$3^x + 3x < 93 - 3^{29}$$

$$3^{x-1} + x < 31 - 3^{28}$$

$$x_{\max} = 30 - 3^{28}$$

$$x \leq 30 - 3^{28}$$

$$t > 3^x + 3^{29} \Rightarrow t \geq 3^{29} + 1$$

$$t \leq 93 - 3x \quad t + 3x \leq 93$$

$$t + 90 - 3^{29} \leq 93$$

$$t - 3^{29} \leq 3$$

$$\begin{cases} t \geq 3^{29} + 1 \\ t \leq 93 - 90 + 3^{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 3^{29} + 1 \\ t \leq 3 + 3^{29} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 30 - 3^{28} \text{ соответствует}$$

3 значения y

$$\begin{cases} t \geq 3^{29} + 1 \\ t \leq 3^{29} + 3 \end{cases}$$

$$t \in \{3^{29} + 1; 3^{29} + 2; 3^{29} + 3\}$$

Значит, y может принимать всего 3 значения
Определим, сколько значений может принимать x

$$t \leq 93 - 3x$$

$$3^{29} + 3 \leq 93 - 3x$$

$$3^{29} \leq 90 - 3x$$

$$3^{28} \leq 30 - x \Rightarrow x \leq 30 - 3^{28}$$

$$Q = 3 \cdot N_x = 6 \cdot 3^{28} + 3$$

$$\log_3(t - 3^{29}) > \log_3 3^x$$

$$\log_3(t - 93) \leq \log_3(-3x)$$

$$N_x = 2 \cdot 3^{28} + 1$$

$$\text{Ответ: } 6 \cdot 3^{28} + 3$$

$$2. \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0, | : 2$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = 0$$

$$\cos 5x \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \left(\cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right) = 0$$

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} + 2x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos 5x + 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{1}{2} \cos 5x + \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \cos x = 0$$

~~Решение~~

$$\text{Ответ: } \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{8}; k \in \mathbb{Z}$$

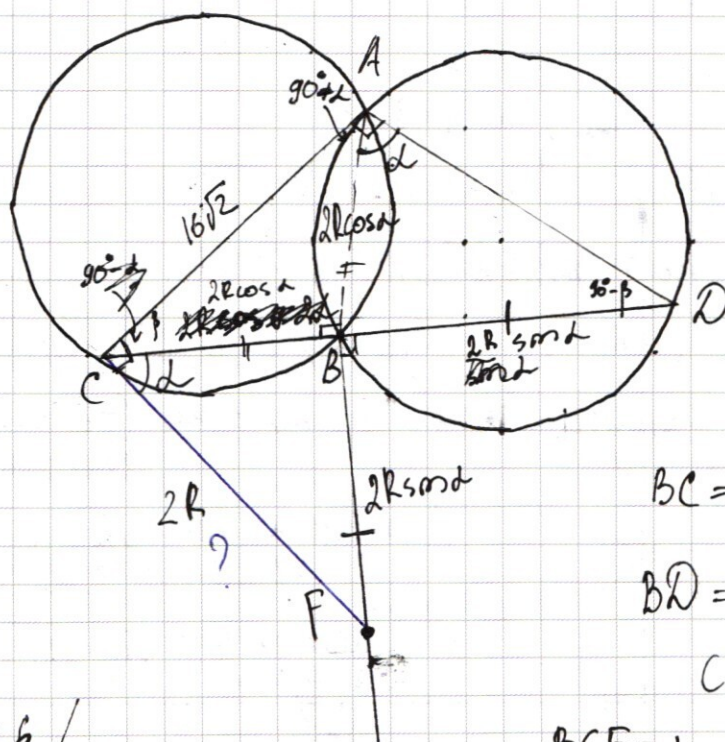
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x &= 0 \\ 2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x &= 0 \\ 2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} \cos 4x &= 0\end{aligned}$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cdot \sin 2x + \sqrt{2} \cos 5x \cos 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0,$$

6.



$$CF = 2R$$

$$\begin{aligned}\frac{BD}{\sin \alpha} &= 2R \Rightarrow BD = 2R \sin \alpha \\ \frac{BC}{\cos \alpha} &= 2R \Rightarrow BC = 2R \cos \alpha \\ CF &= 2R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BC &= 16 \quad 16 = 2 \cdot 17 \cos \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{8}{17}\end{aligned}$$

$$BD = 2R \cdot \frac{15}{17} = 30 = BF$$

$$CF = 34$$

$$\begin{aligned}\frac{AC}{\sin 2\alpha} &= 2R \\ AC &= 2R \cdot \sin 2\alpha = \\ &= 4R \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{ACF} &= \frac{1}{2} AC \cdot CF \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot 16\sqrt{2} \cdot 34 \cdot \frac{8}{17} \\ &= 34 \cdot 8\sqrt{2} = 272\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle BCF &= \alpha = \angle BAD \\ BF &= BD \\ \angle CBF &= \angle ABD\end{aligned} \Rightarrow \triangle CBF \cong \triangle ABD \Rightarrow AD = 2R \cdot AB = 2R \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\frac{2R \cos \alpha}{\cos \beta} &= 2R \\ \cos \alpha &= \cos \beta \\ \alpha &= \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^{7 \ln(-y)} \cdot (-y)^{-\ln(-y)} &= x^{2 \ln x + \ln(y)} \\ x^{3 \ln(y)} \cdot (-y)^{-\ln(y)} &= x^{2 \ln x} \\ x^{(3 \ln(y) - 2 \ln x)} &= (-y)^{\ln(y)} \\ \ln x (3 \ln(-y) - 2 \ln x) &= \ln^2(-y) \\ \begin{cases} \ln(-y) = \ln x \\ \ln(-y) = 2 \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = x \\ -y = x^2 \end{cases}\end{aligned}$$

$$5. |x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$x=0: |8+y| + |8-y| = 16$$

$$y \in [-8; 8]$$

$$x=1: |9+y| + |9-y| = 16$$

$$x=-8: |y| + |-y| = 16$$

$$y = \pm 8$$

$$1) \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \leq x+8 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -8 \\ y \leq 8 \\ x=0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \\ 2y=16 \\ y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -8-y \\ x \leq y-8 \\ y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -16 \\ x \leq 0 \\ y=8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ -2y=16 \\ y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -y-8 \\ x \geq y-8 \\ y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -16 \\ y=-8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \\ -2x-16=16 \\ x=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -x-8 \\ y \geq x+8 \\ x=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 8 \\ y \geq -8 \\ x=-16 \end{cases}$$

Первое уравнение - квадрат ~~ABCD~~ ~~A(-16; -8), B(-16; 8), C(0; 8), D(0; -8)~~

вершинами в точках $(-16; -8), (-16; 8), (0; 8), (0; -8)$

Второе уравнение: окружности с центрами $(\pm 8; \pm 15)$ и $(\pm 8; \mp 15)$

и радиусами $\sqrt{a}$

0 реш

1) касание при $\sqrt{a} = 7$
2) реш $\Rightarrow a = 49$

2) вершины при $\sqrt{a} = \sqrt{49+64}$
4) реш

3) достиг (0;0) ...
 $\sqrt{a} = 17$ $a = 289$
2) реш

0 реш

Ответ: 49 ; 289

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 64827 \overline{) 3} \\
 \underline{21609} \\
 7203 \\
 \underline{2701} \\
 2401 \overline{) 7} \\
 \underline{21} \\
 30 \\
 \underline{21} \\
 9 \\
 \underline{6} \\
 3 \\
 \underline{3} \\
 0
 \end{array}$$

В числе 4 тройки, 3 семёрки и любое число
ответ: 349

$$2. \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \left(\sin 3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0, \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 5x \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$

$$3. \int \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2)$$

$$1) y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + 2(x+2)y - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\frac{D}{4} = (x+2)^2 + 3x^2 - 12x = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2$$

$$y = -x - 2 \pm 2x - 1$$

$$y = -x - 2 \pm 2x - 1$$

$$1) \int_{y=-3x-1}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{-3x-1} \right) \ln(3x+1) = x^2 \ln(x(3x+1)^2)$$

$$\begin{cases} y = -3x - 1 & (1) \\ y = x - 3 & (2) \end{cases}$$

$$2) \left\{ \left(\frac{-x}{x-3} \right)^{2 \ln(3-x)} = x^{2 \ln(x-3)^2} \right.$$

~~He go. off. to (x,y)~~

$$x^{7 \ln(3-x)} \cdot (3-x)^{-\ln(3-x)} = x^{2 \ln x + 2 \ln(3-x)^2}$$

$$\ln x \cdot (3 \ln(3-x) - 2 \ln x) = \ln^2(3-x)$$

$$\ln^2(3-x) - 3\ln x \cdot \ln(3-x) + 2\ln^2 x = 0$$

$$\frac{d}{dx} \ln(3-x) = \frac{\ln(3-x)}{\ln(x)} - 3 \dots = 0$$

5. $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$
 $a > 0$

$$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$$

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

окружность с центром $(8; 15)$

радиусом $\sqrt{a}$

с модулем slope в координат
четверти

++: $2x+16=16 \Rightarrow x=0$
 +-: $2y=16 \Rightarrow y=8$
 -+: $y=0$
 --: $2x=32$
 $x=16$

$$y=x+8$$

+-

--

$$y=-x-8$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

① $\begin{cases} y > x+8 \\ y > -x-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+16=16 \\ x=0 \end{cases}$

луч вертикальный от точки $(0; 8)$

7. $\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \\ y \leq 3^{28} + 3 \cdot 31 - 3x \end{cases}$

$$x < 31 - 3^{28}$$

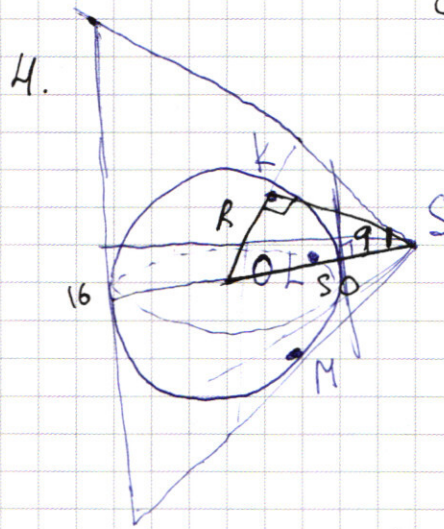
$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < y \leq 3^{28} + 93 - 3x$$

$$3^x + 3^{28} < y - 3^{28} \leq 93 - 3x$$

$$3^x + 3^{28} \leq 93 - 3x$$

$$3^x + 3x \leq 93 - 3^{28}$$

$$3^{x-1} + x \leq 31 - 3^{28}$$



$$\frac{SO-R}{SO+R} = \frac{9}{16}$$

$$16SO - 16R = 9SO + 9R$$

$$7SO = 25R$$

$$R = \frac{7}{25}SO$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{SO} = \frac{7}{25}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin(0,28)$

$$\frac{SO-R}{SO+R} = \frac{3}{4}$$

$$4SO - 4R = 3SO + 3R$$

$$SO = 7R$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$$

$$\begin{array}{r} 314 \\ 314 \\ + 2429 \\ 1214 \\ \hline 140 \\ \hline 4411 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 23 \\ \times 30 \\ \hline 69 \\ 746 \\ \hline 529 \end{array}$$