МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① 1) $64827 : 7 = 9261$; $9261 : 3 = 3087$; $3087 : 3 = 1029$

$1029 : 3 = 343$

$343 = 7^3$

⇓

$64827 = 7^4 \cdot 3^3$

2) восьмизначное число может сост из цифр 1, 7, 3, 9 (т.к. иные комбинации $7^n \cdot 3^m$, $n, m \in Z$, $n \le 4$; $m \le 3$ дают только числа в кот. более 1^й^ цифры)

3) в числе обязательно должны быть 4 семёрки (т.к. 7 – простое, и ~~только~~ как уже написано, никакая комбинация без 4^х^ семёрок не даст нужное число)

4) Оставшиеся 4 цифры (8-4=4) могут быть 3 тройки и одна единица; 1 – „3"; 1 – „9" и 2 – „1" – т.к. это единственные комбин. 4^х^ цифр произведение которых $= 27$

наборы цифр

1) 7, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 1 – набор 1

2) 7, 7, 7, 7, 3, 9, 1, 1 – набор 2

5) количество чисел из набора 1:

1. Пусть „1" – первая цифра, ~~тогда кол-во чисел, в удовл.~~

7^2

$$\begin{array}{r} \times 49 \\ 7 \\ \hline \times 343 \\ 3 \\ \hline \times 1029 \\ 3 \\ \hline \times 3087 \\ 3 \\ \hline \times 9261 \\ 7 \\ \hline 64827 \end{array}$$

$7^4 \cdot 3^3$

$\cos 7 \cdot \cos\frac{x-y}{2} =$

$2\sin\frac{x+y}{2}$

$2 \cdot \frac{1}{2}$

7777 333 1

7777 3911

$\cancel{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8}$

3.

$1\ 777 \underbrace{3\ 3\ 3}_{4}$

1 7 7 373 3 3

1 7 7 7

3 3 3

1 7 7 7 7 333

1 3 3 3 7 7 7 7

$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8$

$1777 \underbrace{3\ 3\ 3}_{4}$

$1773 7 \underbrace{3\ 3}_{3}$

$1773|3 \underbrace{7\ 7}_{3}$ 6

1737 − 6

$7x - \frac{\pi}{4}$

173|3 − 4

13

$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = -2 \cdot \sin 45 \cdot \sin 30$

cos30 cos60

$\cancel{\cos x + \sin y} = 2\sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2}$

$\sin x - \cos y$

$\cancel{\sin}\ \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} =$

$-2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2} = -2 \cdot \frac{1}{2}(\cos(\cancel{x+y}) - \cos(x))$

$\cos\frac{x+y}{2}$

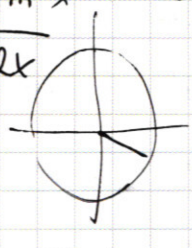
$= -2\sin 0 \cdot \sin$

$\cos 0 \cdot \cos\frac{\pi}{4}$

$\cos x/2$ 2

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$



$\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) + \sin(\frac{\pi}{4} - 3x)$

$2\cos(\frac{\pi}{4} - 5x) \cdot \cos(-2x)$

$\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = 2\cos 0 \cdot \cos\frac{\pi}{4}$

$\cancel{1\cos}\ 2\cos\frac{x+y}{}$

$-2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2} = -2 \cdot (\sqrt{\frac{1-\cos(x+y)}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(x-y)}{2}} =$

$= -\sqrt{(1-(\cos x\cos y + \sin x\sin y)(1 - (\cos x\cos y + \sin x\sin y)} =$

$= -\sqrt{(1-\cos x\cos y)^2 - (\sin x\sin y)^2} = \sqrt{1-2}$

$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = -2\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos 0$

$\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 2\sin 45 \cdot$

30 60 cos30.

$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

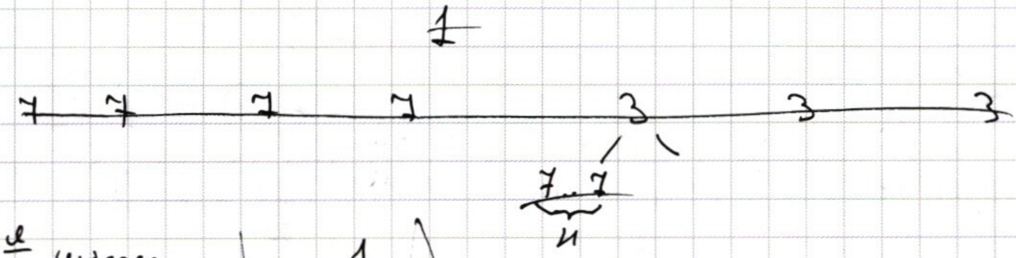
Страница №__

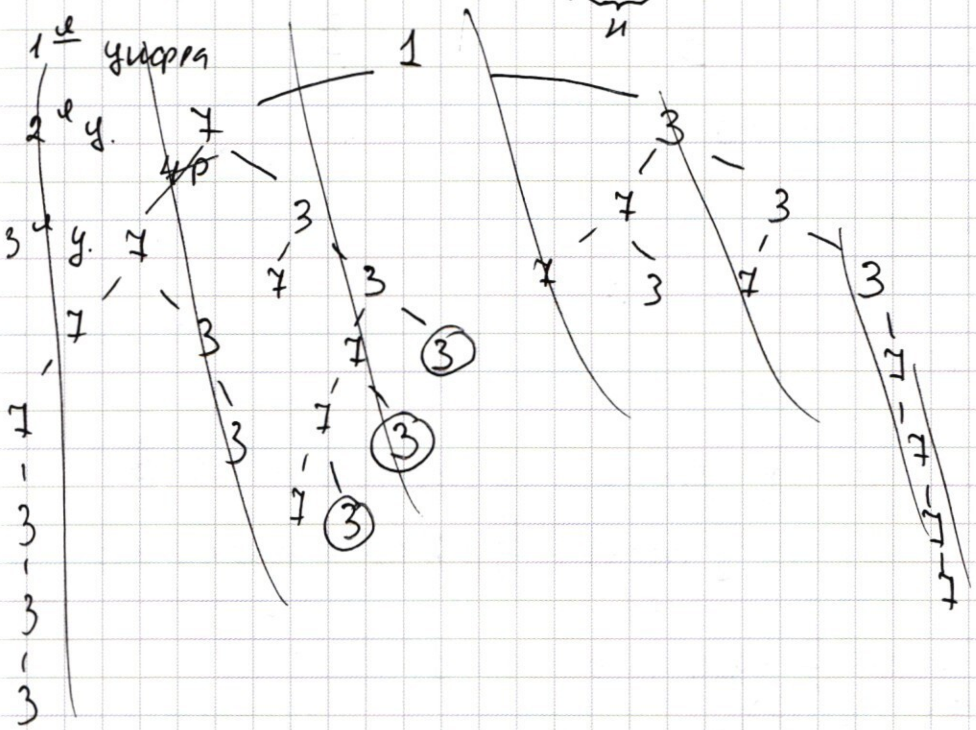
(Нумеровать только чистовики)

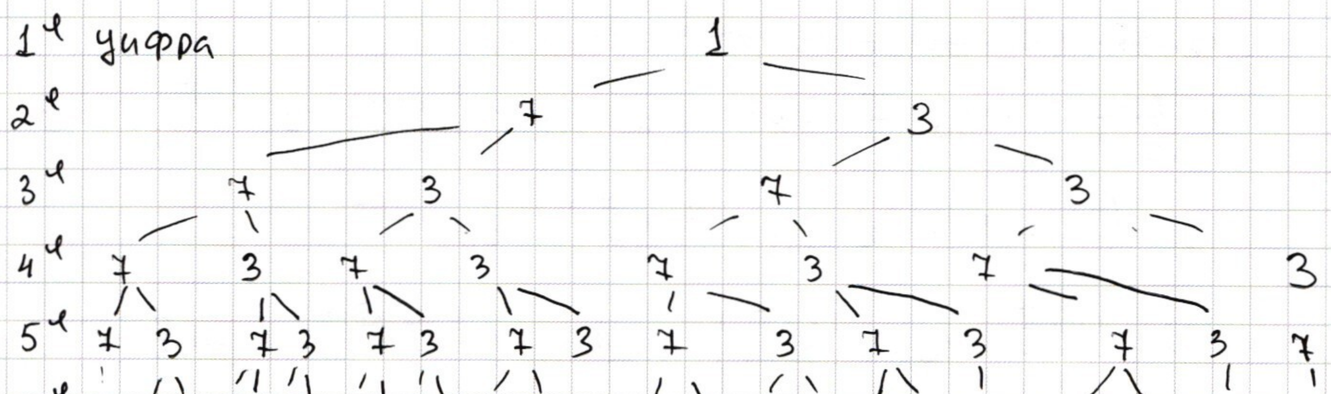
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~условию: $1 \cdot 2^6 \cdot 1$ (первая цифра фиксирована, на месте 6ти цифр может с~~

Рассмотрим все возм. комбин

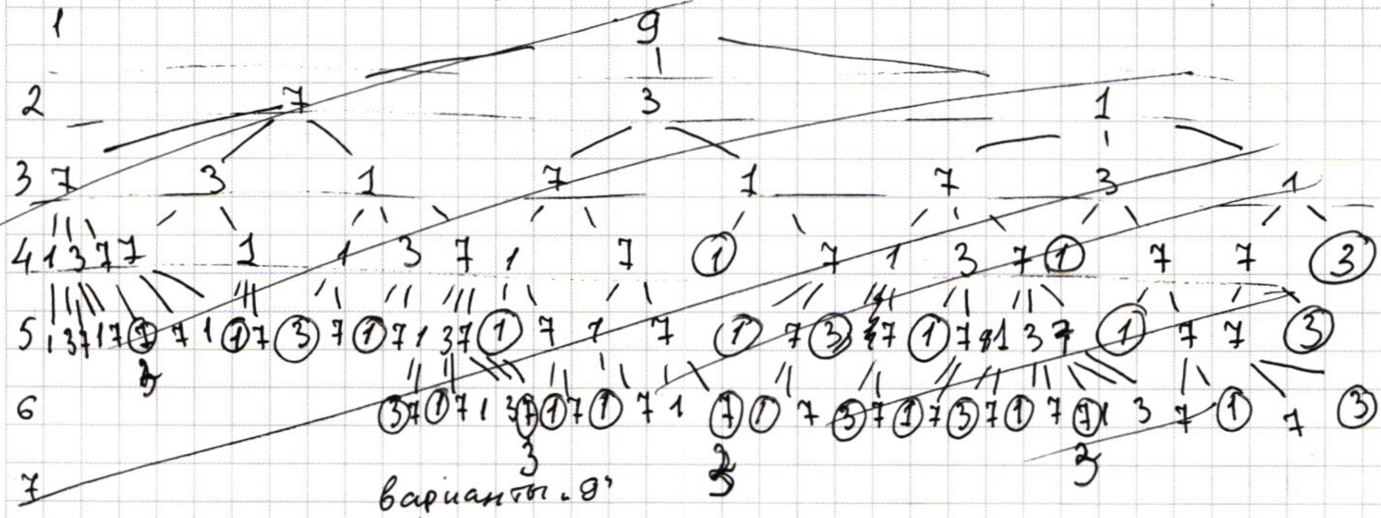






всего 33 вар, также „1" - может стоять на 8 местах ⇒ $33 \cdot 8 = 264$ - чисел из набора 1

б) количество из набора 2 (~~пусто „9" - первая~~):



варианты „9"

8 $\quad 2^4 \cdot 7 \cdot 8 = 896$

варианты „3" отн („1" и „7")

~~1 и~~ варианты „1" и „7" отн. друг друга

Ответ: $896 + 264 = \underline{1160}$

② $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0 \quad / \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x + \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + \cos 4x = 0$$

$$\cancel{-2\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)\sin(2x) = -\cos 4x}$$

$$\cancel{+2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \cdot \sin(5x) = \cos 4x}$$

$$\cancel{2 \cdot \frac{1}{2}} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 7x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - x}{2}\right) = 0$$

$$\cancel{2}\sin\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) + \cancel{2}\cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)\left(\sin\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} + \cos\frac{\frac{\pi}{4} - x}{2}\right) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

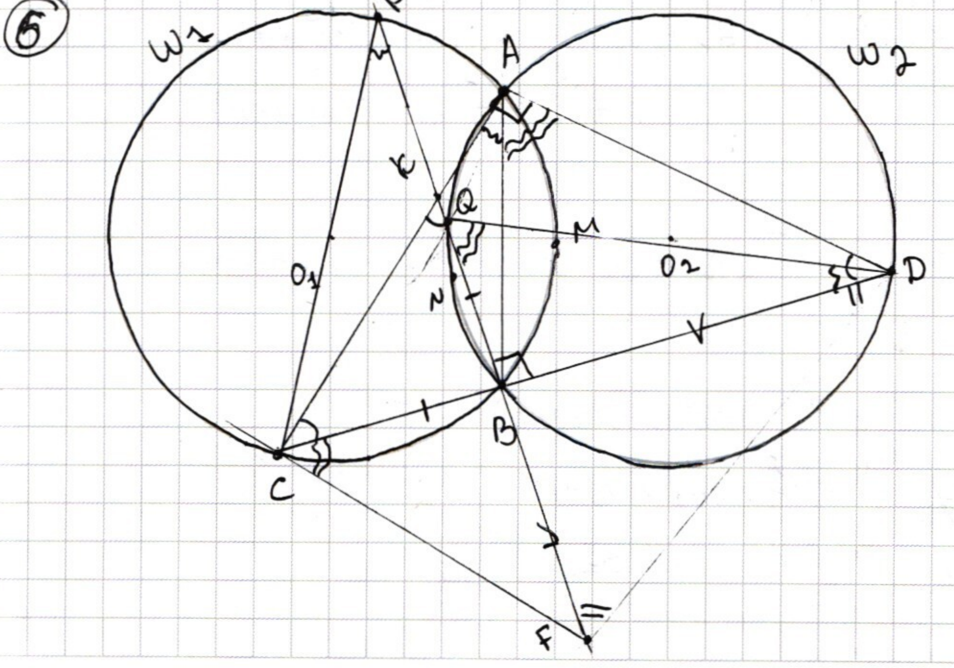
$$\left[\begin{aligned}&\cos\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}=0,\\&\cancel{s\,\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{}}\sin\frac{7x+\pi/4}{2}=-\cos\frac{\pi/4-x}{2};\end{aligned}\right.\qquad \left[\begin{aligned}&\frac{7x+\pi/4}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\\&\sin\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}+\sin\left(\frac{\pi-\pi/4+x}{2}\right)=0;\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&7x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z,\\&2\sin\frac{8x+\pi}{4}\cdot\cos\frac{6x-\frac{\pi}{2}}{4}=0;\end{aligned}\right.\qquad \left[\begin{aligned}&x=\frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7},\ n\in Z,\\&2x+\frac{\pi}{4}=\pi n,\\&\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\pi n;\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&x=\frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7},\\&x=\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{8},\quad n\in Z\\&x=\frac{2}{3}\left(\frac{5\pi}{8}+\pi n\right);\end{aligned}\right.\qquad \left[\begin{aligned}&x=\frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7},\\&x=\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{8},\quad n\in Z\\&x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3},\end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{aligned}&x=\frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7},\\&x=\frac{\pi n}{2}-\pi/8,\quad n\in Z\\&x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}\end{aligned}\right.$

5



а) 1. $\cup AMB = \cup ANB$ (т.к. они стягив. одной хордой AB, а $R_1 = R_2$) (по с-ву окружн)

2) $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AMB = \frac{1}{2} \cup ANB$ (по док) $= \angle ADB$ (как впис) $= \beta$

$\triangle ACB$ - р/б (по пр) $\Rightarrow AC = AB = x$ (по опр.)

3) $\triangle BFD$ - р/б $\triangle$ (по опр) $\Rightarrow \angle BFD = \angle BDF$ (по ~~пр.~~ с-ву) $= \alpha$

4) $\triangle CBF$ - ~~р/б~~ п/у $\triangle$ (по опр) $\Rightarrow \angle BCF + \angle BFC = 90°$ (по с-ву п/у $\triangle$)

5) ~~четырехуг $ACFD$: $360° = \angle CAD + \angle$~~

~~$\triangle CDF$: $180° = 2\cdot\alpha + \angle BCF + \angle BFC \Rightarrow \alpha = \frac{90°}{2}$~~ ~~90° (по усл)~~

$\triangle ACB$ - п/у $\triangle$; р/б $\triangle$ (по док) $\Rightarrow \beta = 45°$
$\triangle CBF$ - п/у $\triangle$; р/б $\triangle$ (по док) $\Rightarrow \alpha = 45°$ $\Rightarrow \angle ADF = 2\cdot 45° = 90°$

6) $AC \perp AD$, $FD \perp AD$ (по док и по усл) $\Rightarrow AC \parallel FD$ (по пр.)

$\angle BFD = \angle CKB =$ как н/л $\angle$ $= 45°$ (т$K = BF \cap AC$)

$\triangle CBK$ - р/б $\triangle$ (по опр)

7) $BF \cap \omega_1 =$ тP, $\angle PBC = 90°$ (по усл) $\Rightarrow CP$ - диаметр $= 34$ (по с-ву ω)

Аналогично $BF \cap \omega_2 =$ тQ и QD - диаметр $= 34$

8) $\angle QAD = 90°$ (по с-ву ω), $\angle CAD = 90°$ (по усл) $\Rightarrow Q \in CA \Rightarrow$ тK и тQ - совпадают

9) Рассмотрим $\triangle QBD$ и $\triangle CBF$:

$\angle QBD = \angle CBF = 90°$ (по усл) как верт
$BF = BD$ (по усл)
$QB = BC$ (по док)
$\Rightarrow \triangle QBD = \triangle CBF$ (по пр)

$CF = QD = 34$ (по док)

Ответ: $CF = 34$

б) 1) из п/у $\triangle QBD$: $BD = \sqrt{34^2 - QB^2} = 30$ ($QB = BC = 16$ (по док)

2) $AC = \frac{CD\sqrt{2}}{2} = 23\sqrt{2}$

3) $\angle DQB = \angle BCF$ (по с-ву равн. фигур)

$\cos\angle DQB = \frac{34}{16} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17} = \cos\angle BCF$

$\sin\angle BCF = \sqrt{1 - \frac{8^2}{17^2}} = \frac{\sqrt{9\cdot 25}}{17} = \frac{15}{17}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\angle ACF = \sin 45 \cdot \cos\angle BCF + \cos 45 \cdot \sin\angle BCF = \frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{8}{17}+\frac{15}{17}\right) =$

$= \frac{23\sqrt2}{34}$

4) $S_{FCA} = \frac12 \cdot CF \cdot CA \cdot \sin\angle ACF = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{34} \cdot 23\cancel{\sqrt2} \cdot \frac{23\cancel{\sqrt2}}{\cancel{34}} = 23^2 = 529$

Ответ: $S_{FCA} = 529$

~~③~~ $\cancel{\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0; \end{cases}}$

⑤ $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \quad (1), \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \quad (2); \end{cases}$ $a \geq 0$

~~Метод вершин для (1)~~

~~x −10 −8 0 8 10~~

~~y~~

Для (1) $y \geq 0$

$|x+y+8|$: − (до $-y-8$), + , + ; $|x-y+8|$: − , − (до $y-8$), + ; ось x; области I, II, III

I $x \leq -y-8$

$-x-y-8-x+y-8=16$

$-2x = 32$

$x = -16$

$-16 \leq -y-8$

$y \leq 8$

II $x \in (-y-8;\ y-8)$

$\cancel{x}+y+\cancel{8}-\cancel{x}+y-\cancel{8}=16$

$y=8$

$x \in (-16;0)$

III $x \geq y-8$

$x+y+\cancel{8}+x-y+\cancel{8}=\cancel{16}$

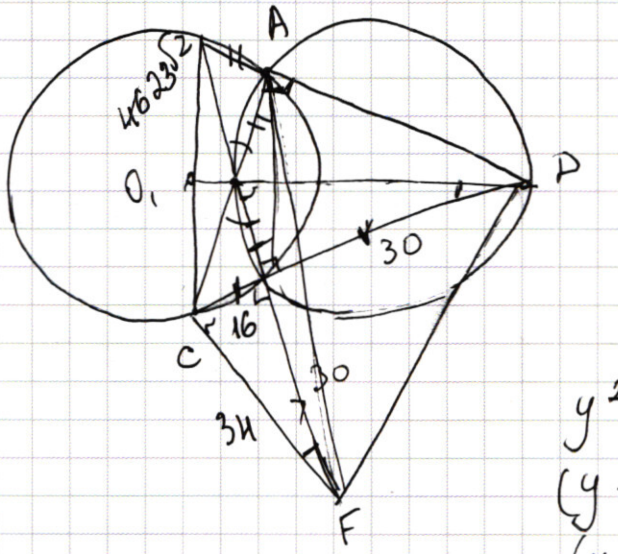
$x=0$

$y \leq 8$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$81 + 4\cdot 3^{28} = 93 + 4\cdot 3^{28}$ $\cancel{x}$ -12 $\cancel{93}$ $9\cdot 3$ $11\ 7\ 7\ 7\ 7$

$11\ \cancel{2}\ -3$



$\sqrt{34^2-16^2} =$

$= \sqrt{18\cdot 50} = 5\cdot 2\cdot 3 = 30$

23×23: 69, 46, 529

$y^2 + 2xy + 12x + 4y - 3x^2 = 0$

$(y+x)^2 + 12x + 4y - 4x^2 = 0$

$(y+x)^2 + 4(3x + y - x^2) = 0$

$(y^2+2)^2$ -4

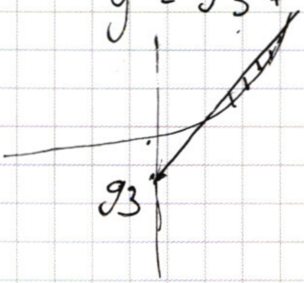
$x>0$

$y<0$

$y > 3^x + 4\cdot 3^{28}$

$y \le 93 + 3x(3^{27}-1)$

$y \le 93 + 3^{28}x - 3x$

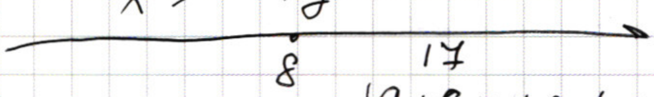


$3^x + 4\cdot 3^{28} = 93 + 3^{28}\cdot x - 3x$

$3^{28}(4-x) = 93 - 3x - 3^x$

$x > -8-y$

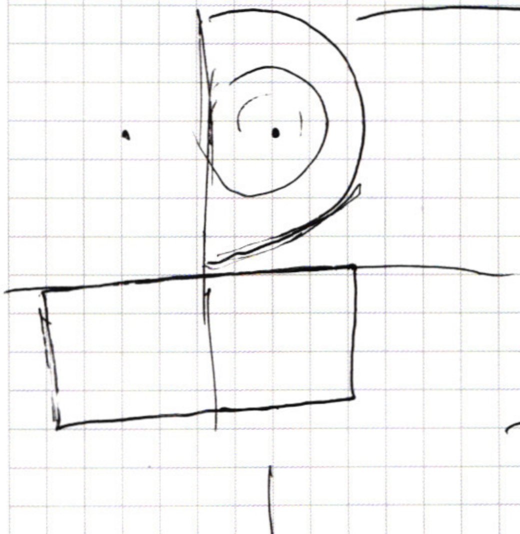
$x > -8+y$

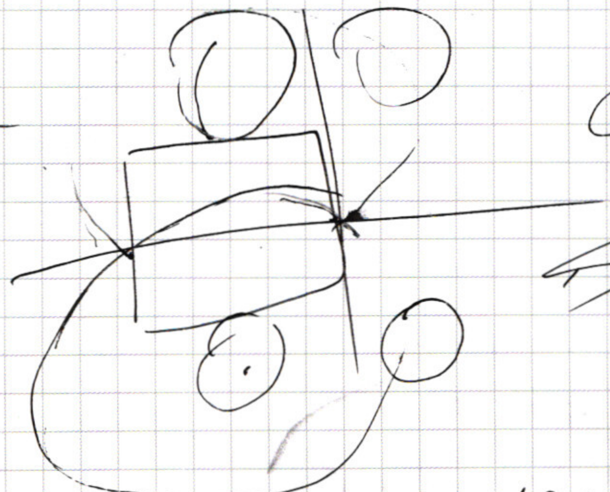


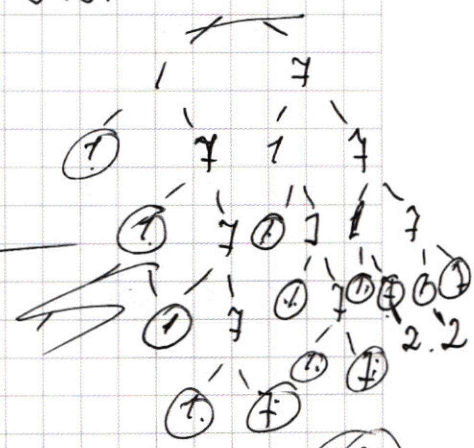
16×56: 96, 896

17 180

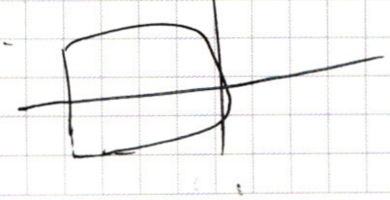
$|9 + \cancel{8} + x| + |x - \cancel{9+8}| = 16$







16



$16\cdot 7\cdot 8$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Для (1) $y<0$

$|x+y+8|$ − − +

$|x-y+8|$ − $y-8$ + $-y-8$ + x

I II III

I $x \le y-8$

$x=-16$

$y \geq -8$

II $x \in (y-8; -y-8)$

~~$y=8$~~ $-x-y-8+\cancel{x}-y+8=16$

~~$x\in($~~ $y=-8$

$x \in (-16; 0)$

III $x \geq -y-8$

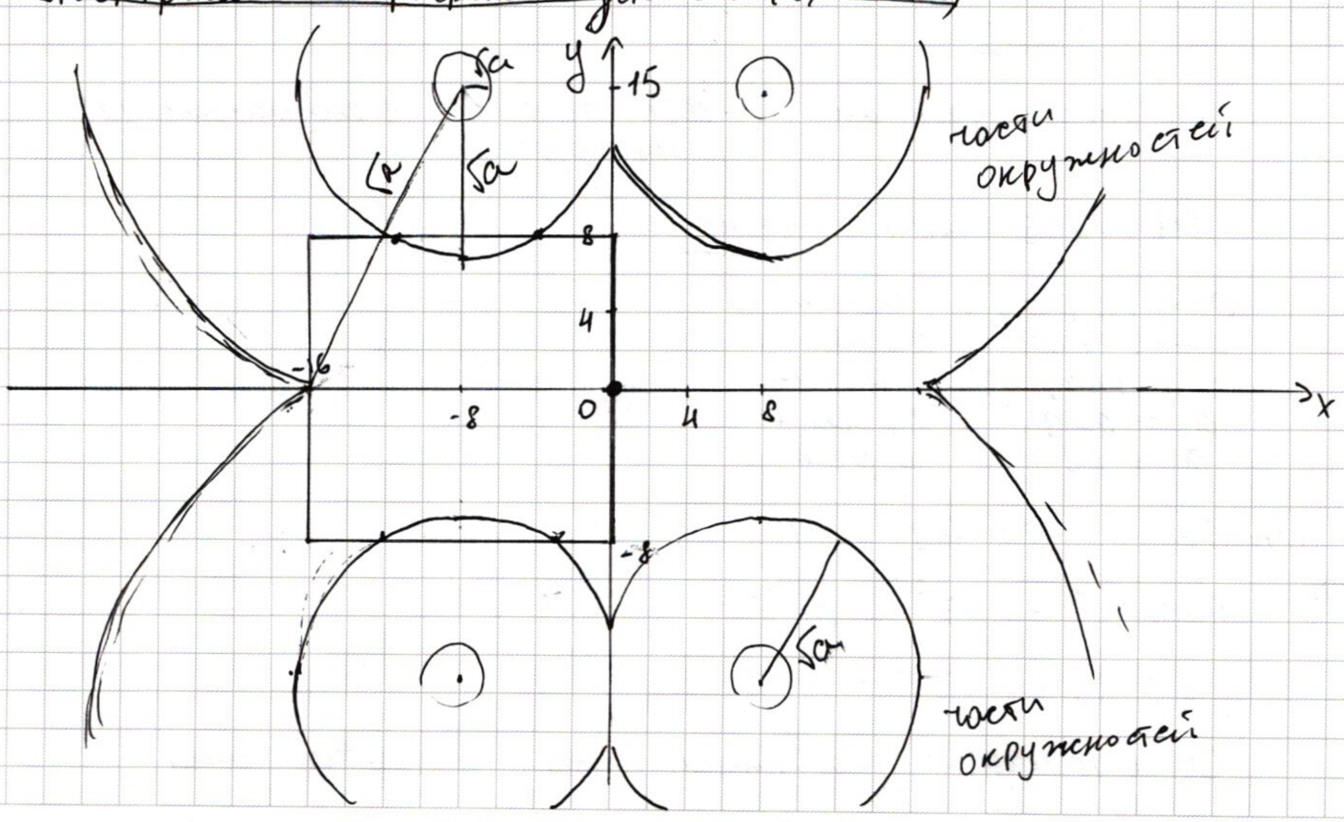
$x=0$

$y \geq -8$

Для (2)

Это график зависимости $|y|(|x|)$ – имеющий вид окружности с ц. в т$(8; 15)$ ~~и радиусом $5a$~~ радиусом $5a$

~~Построим графики завис. (1) и (2)~~



Т.к. ф-ия (2) симметрична отн. ox и oy ~~, а~~ · (в силу „раскрытие" модуля); а ф-ия (1) симметрична отн. ox, то система ~~будет иметь 2 реш~~ имеет только чётное кол-во реш.
(n реш. выше ox и n решений ниже ox в силу симм.),
& единственный не симм. случай при ~~x=0~~ y=0
~~Так~~ Кроме этого система имеет 2 реш. только в сл, когда выше ox есть одно реш, т.е. окружность касается графика ф-ии (1)

1. ~~D~~ график ф-ии (2) касается (1)
⇕
$15 - 8 = \sqrt{a}$
$a = 49$

~~Проверим~~

2 ~~$x=0$, $y \in [-8; 8]$ из (1)~~ ~~$y=0$, $x = \pm$~~ $y=0$ $x=-16$; $x=0$ (из (1))
~~$64 + (|y| - 15)^2 = a$~~ Подставим (0; 0) в (2)
$64 + 225 = a$
$\underline{a = 289}$
Проверим будет ли (−16; 0) также решением (2) при этом a
$64 + 225 = 289$ <u>верно</u>

3. $a \in [0; 49)$ − 0 реш
$a ~~\in [~~ = 49$ − 2 реш ✓
$a \in (49; 289)$ − 4 реш
$a = 289$ − 2 реш ✓
$a > 289$ − 0 реш

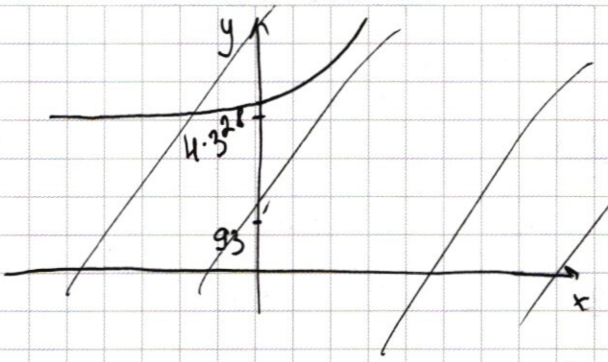
из графика

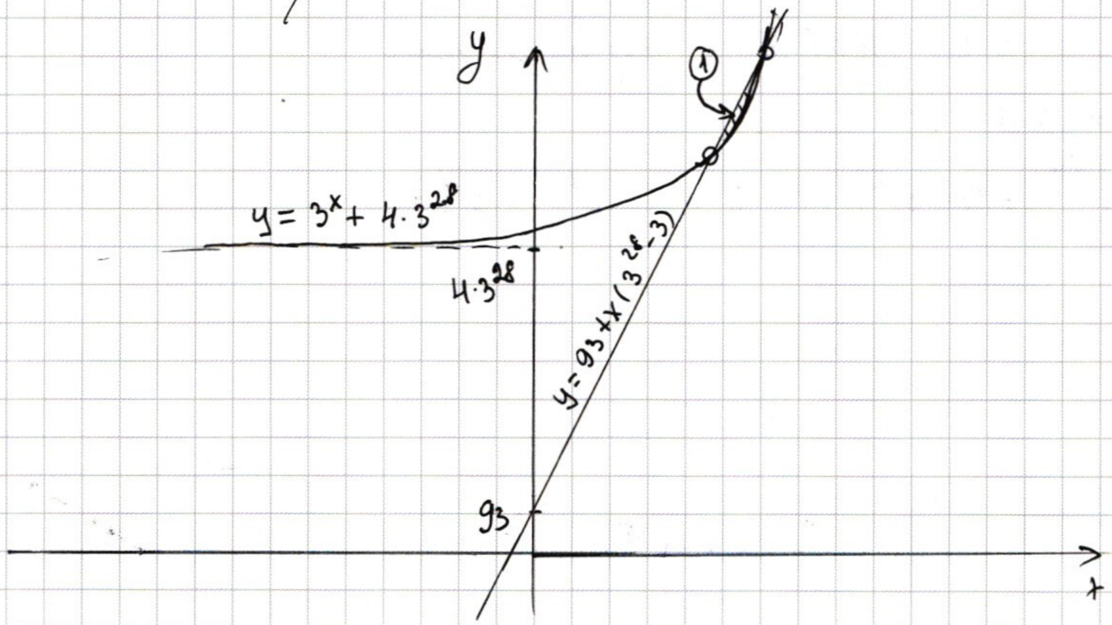
Ответ: $a = 49; 289$

(7) $\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} & (1); \\ y \le 93 + 3 \cdot (3^{27} - 1)x & (2); \end{cases}$
Схематически изобразим графики этих ф-ий

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





Нужные нам точки должны лежать в области (1)

Найдём т пересечения этих графиков

$3^x + 4\cdot 3^{28} = 93 + (3^{28}-3)x$

~~x~~ Пусть $x=4$

$81 + 4\cdot 3^{28} = 93 - 12 + 4\cdot 3^{28}$

$0=0 \Rightarrow x=4$ является корнем данного ур-ие (но не системы, т.к. одно из неравенств строгое)

Подставим $x=5$ в сист:

$y > 243(1+4\cdot 3^{23})$

$y \le 93 - 15 + \cancel{15}\, 5\cdot 3^{28}$

Сравним правые части неравенс

$243(1 + 4\cdot 3^{23}) < 78 + 5\cdot 3^{28}$

$243 - 78 < 3^{28}$

$x = 5$ - подходит

Найдём сколько целых $y \in$ этому промежутку

$93 + 3\cdot(3^{27} - 1)\cdot 5 - 243 \ast 4\cdot 3^{28} =$

$= 78 - 243 + 3^{28} = \underline{3^{28} - 165}$

При $x = 6$

(число y) $= 93x - 18 + 6\cdot 3^{28} - \underset{729}{3^{6}} - 4\cdot 3^{28} = 2\cdot 3^{28} - 654$

~~При $x = 7$~~ Найдём ~~ко~~ последний x

$x = 27$

$3^{27} + 4\cdot 3^{28} \vee 93x - 3^4 + 3^{31}$