

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

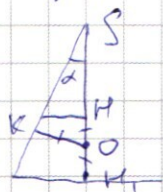
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $64827 = 3^3 \cdot 7^4$ возможные варианты 77773331 и все перестановки
 77779311

всего $\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 280 + 280 \cdot 3 = 1120$
вариантов.

2) т.к. сегмент $\perp$ одной из сторон от параллельных отрезков.

т.к. точка верхнего основания сегмента содержит т.к. т.к. нижнее основание сегмента содержит т.к. тогда, окружность вписана в сегмент т.к. $SO \perp NH$,



$$ON = OH = R = \frac{1}{2} NH,$$

т.к. фигура ~~состоит~~ ^{является} из верхнего сегмента

и центр окружности находится в сегменте.

т.к. $SO \perp NH$ и SO является высотой треугольника.

$$k^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow k = \frac{3}{4} \quad \text{т.к. все соответствующие значения}$$

тогда $\sin \alpha = \frac{KO}{SO} \quad SO = 3NH, \text{ т.к. } SO + NH = \frac{4}{3} SO.$

$$NH = x \quad \text{тогда } SO = 3x \quad ON = \frac{1}{2} NH = \frac{1}{2} x = KO = R.$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{1}{2} x}{3x + \frac{1}{2} x} = \frac{\frac{1}{2}}{3 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{7} \quad \alpha = \arcsin \frac{1}{7}$$

3) $x = -3^{28}$

$$y = 93 + 3^{28} - 3 \cdot (-3^{28}) = 93 + 3^{28} + 3^{29}.$$

$$93 + 3^{28} + 3^{29} > 3^{28} + 4 \cdot 3^{28}.$$

$$93 > \frac{1}{3^{28}} \quad \text{очев. тогда}$$

если $x = -3^b \quad b \geq 28$ то $y = 93 + 3^{28} + 3^{b+1}$

$$\text{а это } y > \frac{1}{3^b} + 4 \cdot 3^{28} \quad \text{т.к. } 3^{b+1} > 3^{29} \text{ т.к. } b \geq 28$$

$$93 > \frac{1}{3^b} \quad \text{т.к. } \frac{1}{3^b} < 1$$

значит бесконечно много значений.

5) $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

$y \leq x+8 \quad y \geq -x-8 \quad x=0$

$y \geq x+8 \quad y \leq -x-8 \quad x=-16$

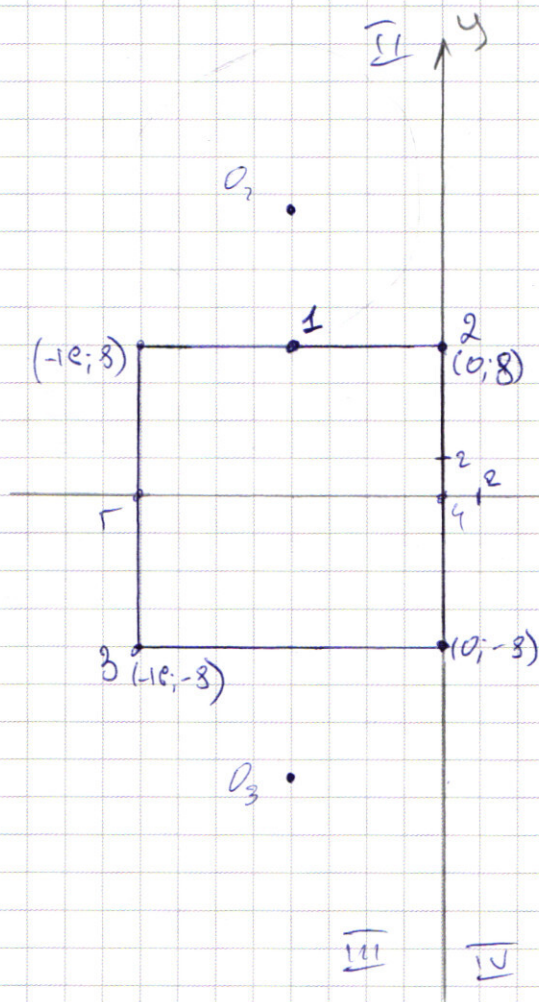
$y \leq x+8 \quad y \leq -x-8 \quad y=-8$

$y \geq x+8 \quad y \geq -x-8 \quad y=8$

$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$

тогда окр. с ц. в $R = \sqrt{a}$ и с верш. в $(8; 15); (8; -15); (-8; 15); (-8; -15)$

если $\sqrt{a}$ достаточно велик, то только есть окр. в четверти ^{соответствующей} центра.



т.е. при $y=0$.

откуда $y=0$.

то, сверху и снизу
должно быть по две
точки.

окр. O_2 имеет одну
точку только
если $\sqrt{a} < 8$.

окр. O_1 имеет одну
точку если $\sqrt{a} < 15$
тогда $\sqrt{a} < 15$ или $\sqrt{a} < 8$

если:

если решение верха
и низа будут совпадать,
то O_2 будет пересекать.

в.т. y и x по тогда
очевидно что O_1 пересекать
в точках y и x т.е.

будет всего 4 решения
а нужно 2.
невозможно.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

когда в т. 1 тогда $\rho_1(O_2; 1) = \sqrt{(15-8)^2} = 7$

тогда $\sqrt{a} = 7$ то $\rho_2(O_1; 2) = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{113}$

$\rho_2 > \rho_1$, т.е. касания не будет.

$a = 49$ уг.

когда в т. 2. тогда $\sqrt{a} = \sqrt{113}$ т.е. это больше чем ρ_1

и меньше чем $\rho_3(O_2; 3) = \sqrt{8^2 + 23^2}$

значит окр O_2 будет пересекать окружность еще 2 раза.

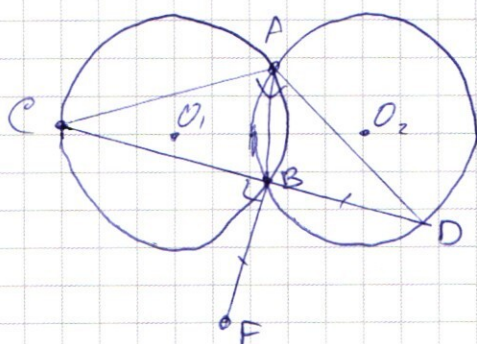
$a = 113$ касат.

$\rho_4(O_1; 3) = \sqrt{24^2 + 23^2} = \sqrt{1105}$ $\rho_4 > \rho_3$

т.е. $a = 1105$ уг.

ответ: $a = 49$ и $a = 1105$

б)



т.к. $R_1 = R_2$

то $\angle C = \angle D$ т.к. опущены радиусы.

тогда $\triangle ADC$ - р/д и $\angle C = \angle D = 45^\circ$

затем $\angle ABC = \angle D$

тогда по т. синусов.

$$\frac{CB}{\sin(180-45-\alpha)} = 2R \quad \frac{BD}{\sin(180-15-(180-\alpha))} = 2R$$

$$CB = 2R \sin(45+\alpha) \quad BD = 2R \sin(\alpha-45)$$

по т. Пифагора.

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2 =$$

$$= \frac{1}{2} 4R^2 ((\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2) = 4R^2$$

$$CF = 2R = 34$$

$$2) BC = 16. \quad \sin(45^\circ + \angle) = \frac{16}{2R}$$

$$BD = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{50 \cdot 18} = 30$$

$$CD = 46$$

$$\text{т.к. } \angle D = 45^\circ \quad \text{то } \frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R \quad AR = \sqrt{2}R = 17\sqrt{2}$$

по т. кос.

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cdot \cos 45^\circ$$

$$2 \cdot 17^2 = 4 \cdot 17^2 - 16^2 + AD^2 - \sqrt{2} \cdot 30 \cdot AD$$

$$AD^2 - \sqrt{2} \cdot 30 \cdot AD + 2 \cdot 17^2 - 16^2 = 0$$

$$D = 2 \cdot 30^2 - 8 \cdot 17^2 + 4 \cdot 16^2 =$$

$$= 2 \cdot 34^2 - 2 \cdot 16^2 = 8 \cdot 17^2 + 4 \cdot 16^2 = 2 \cdot 16^2$$

$$AD = \frac{\sqrt{2} \cdot 30 \pm \sqrt{2} \cdot 16}{2}$$

$$AD = \sqrt{2} \cdot 7 \text{ км; померла}$$

$$AD = 23\sqrt{2} = AC$$

$$\sin \angle BCF = \frac{BF}{CF} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$$

$$\cos \angle BCF = \frac{8}{17}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(\angle BCF + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 34 \cdot \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \angle BCF + \cos \angle BCF) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{23}{17}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 34 \cdot \frac{23}{\sqrt{2} \cdot 17} = \frac{23^2}{1} = 23^2 = 529.$$

$$3) y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y+x)^2 + (3 + \frac{2}{3}y)^2 = (2x-3)^2 + \frac{4}{3}y^2$$

$$(y+x - \frac{2}{3}y)(y+x + \frac{2}{3}y) = (2x-3 - 3 - \frac{2}{3}y)(2x-3 + 3 + \frac{2}{3}y)$$

$$(\frac{1}{3}y+x)(\frac{5}{3}y+x) = (2x-6 - \frac{2}{3}y)(2x + \frac{2}{3}y)$$

$$(\frac{1}{3}y+x)(\frac{5}{3}y+x - 4x + 12 + \frac{4}{3}y) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y = -3x \\ 3y - 3x + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^3)}$$

$$y = -3x \quad \left(\frac{-x^7}{-3x}\right)^{\ln 3x} = x^{2\ln(9x^3)} \quad x \neq 0 \quad x > 0$$

$$x^{7 \cdot \ln 3x} = (3x)^{\ln 3x} \cdot x^{2\ln(9x^3)}$$

$$x^{\ln 3x} = 3^{\ln 3x} \cdot x^{\ln(3x + 81x^6)}$$

$$x^{6\ln 3x} = 3^{\ln 3x} \cdot x^{\ln 81 \cdot x^6}$$

$$x^{\ln 3^6 \cdot x^6} = 3^{\ln 3x} \cdot x^{\ln 3x}$$

$$x^{6\ln 3} \cdot x^{\ln x^6} = 3^{\ln 3x} \cdot x^{\ln 81} \cdot x^{\ln x^6}$$

$$x^{\ln 9} = 3^{\ln 3x}$$

$$\left(\frac{x^7}{3}\right)^{\ln 3} = 3^{\ln x}$$

$$\left(\frac{x^7}{3}\right)^{\ln 3} = x^{\ln 3}$$

$$\frac{x^7}{3} = x \quad x(x-3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \text{ у.е.} \\ x = 0 \text{ не у.е.} \end{cases}$$

$$x = 3, y = -9$$

$$y = x - 4 \quad \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad 0 < x < 4$$

$$\left(\frac{x^2}{x-4} \right)^{\ln(4-x)} = x^2 \ln(x(x-4)^2)$$

$$\left(\frac{x^2}{4-x} \right)^{\ln(4-x)} = x^2 \ln x + 4 \ln(4-x)$$

$$x^2 \cdot \ln(4-x) = (4-x)^{\ln(4-x)} \cdot x^2 \cdot \ln x \cdot x^4 \ln(4-x)$$

$$\cancel{x^3 \ln(4-x)} \quad x^{3 \ln(4-x)} = (4-x)^{\ln(4-x)} \cdot x^{2 \ln x}$$



значит не более одного решения.

$$x = 2 \quad y = -2.$$

отв: $(3; -9)$
 $(2; -2)$



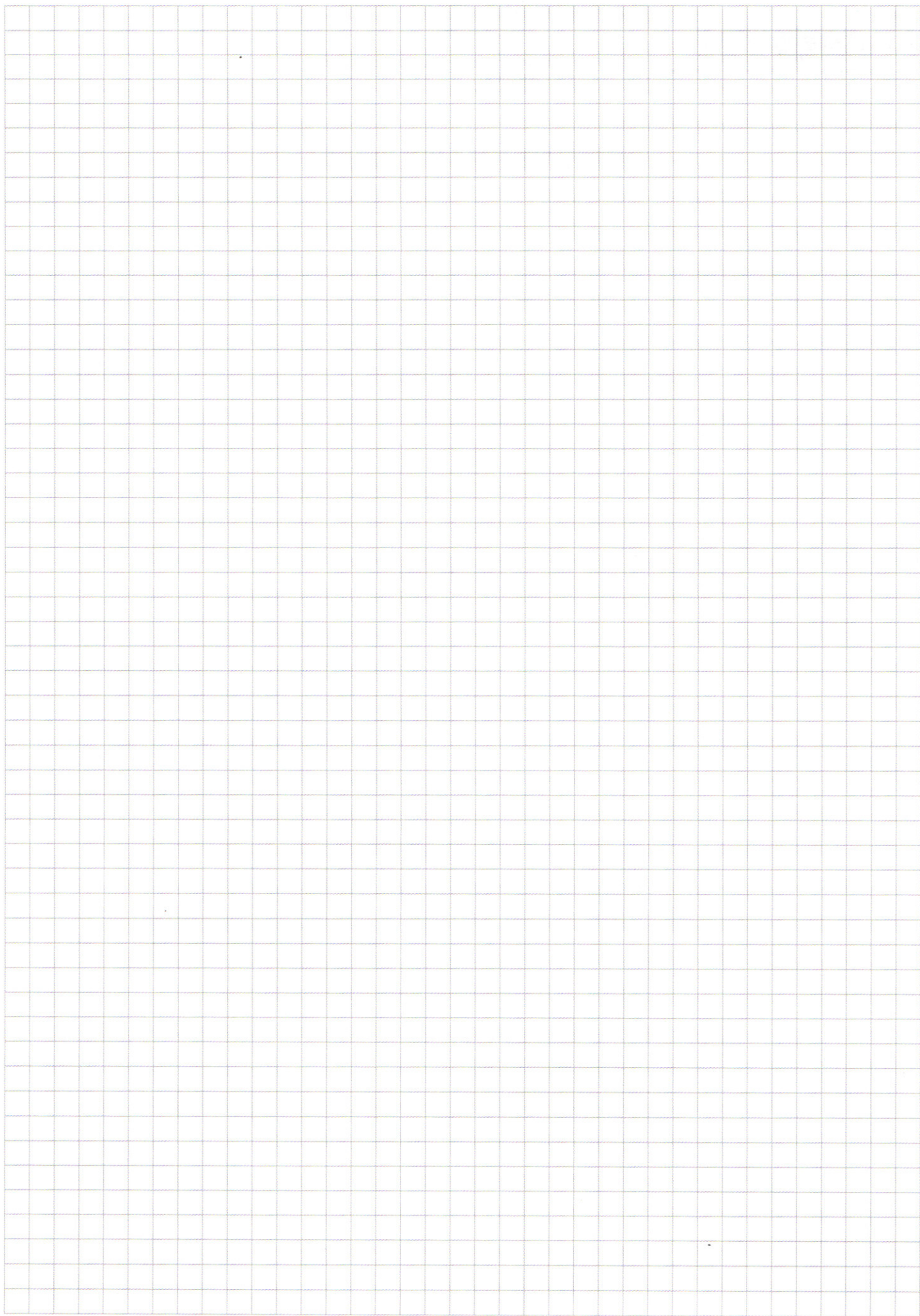
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



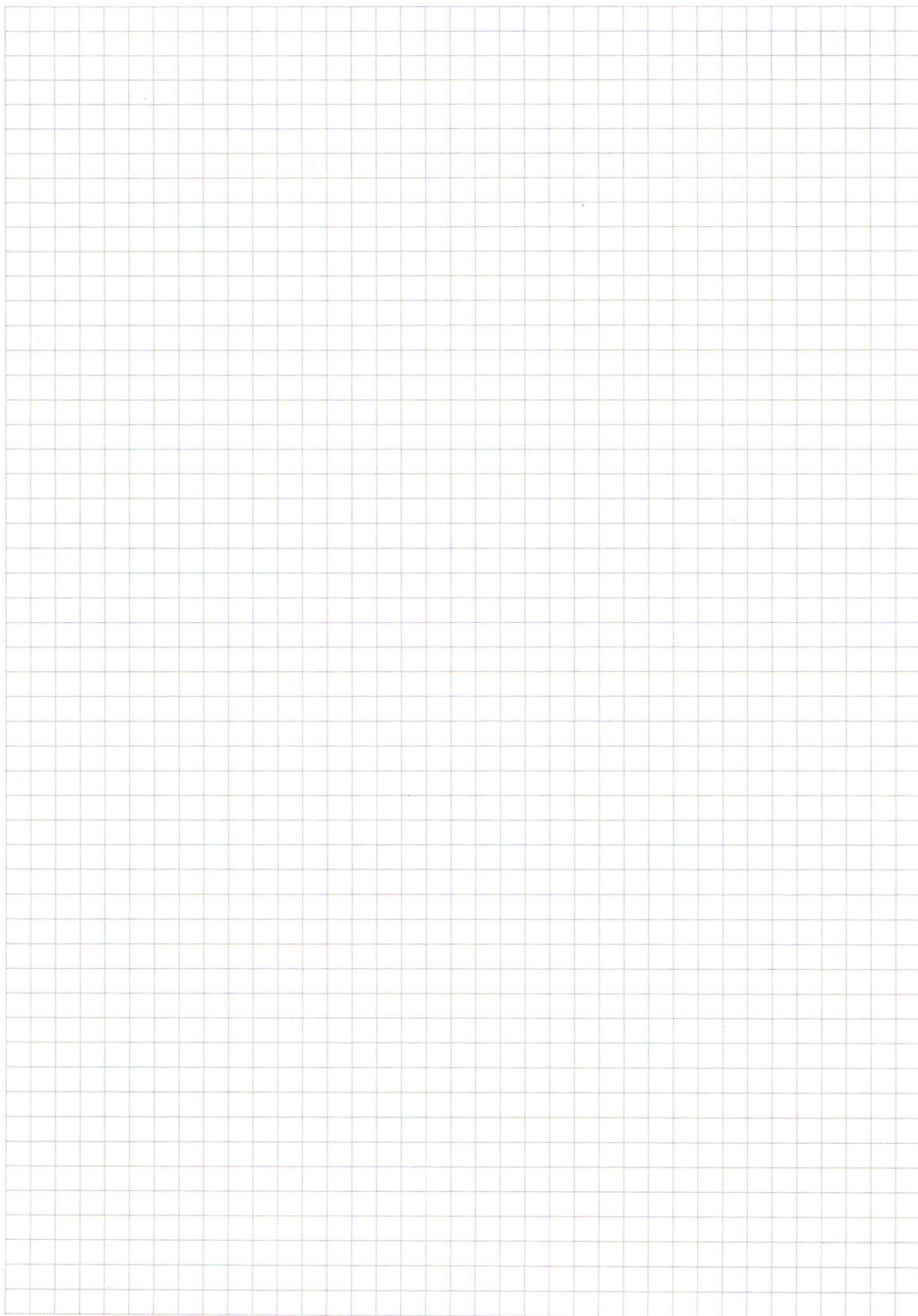
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)