

Бланк задания должен быть вложен в раf
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$64 \cdot 827 = 3^3 \cdot 7^4$$

значит восьмизначное число может
состоять из ~~цифр~~ ^{цифр} 9, 3, 7, 7
~~применяя~~ ^{число 9 только} ~~это~~

рассмотрим случай, где есть 9, тогда
~~в этом~~ ^{цифры} число состоит из ~~цифр~~ 9, 3, 7, 7, 7, 1, 1

из этих цифр можно составить

$$\frac{8!}{2! \cdot 4!} \text{ чисел} \Leftrightarrow \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840 \text{ чисел}$$

2й случай, где ~~цифры~~ ^{цифры} 9 заменяется на 2 тройки

тогда цифры числа - 7, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 7

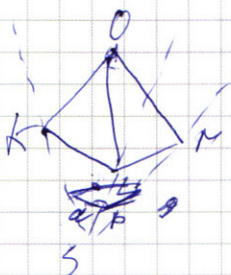
из этих цифр можно составить

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} \text{ чисел}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 40 \cdot 7 = 280 \text{ чисел}$$

Итого $280 + 840 = 1120$ чисел подходит

Ответ: 1120



№ 4

$$\frac{1}{2} \cos \varphi ab = 9$$

$$\frac{1}{2} \cos \varphi ab k^2 = 16$$

$$k^2 = \frac{16}{9}$$

$$k = \frac{4}{3}$$

площадь сечения - площадь
треугольника

k - коэффициент подобия



через O проходит плоскость с $\cos \varphi = \frac{k}{2}$

$\triangle OKS \sim \triangle QMS$ по 2м углам $\angle OSK = \angle MSQ$,

$\angle KSO = \angle MSQ$

$$\frac{\sin \alpha}{\left(\frac{kx}{2}\right)} = 2R \quad \sin \alpha = \frac{R}{\frac{kx}{2}} \text{ или } R$$

$$2R = \frac{kx}{2} \quad \therefore OL = \frac{kx}{2}$$

$$\triangle ZOS \sim \triangle OKS \quad \frac{\left(\frac{kx}{2}\right)}{OK} = \frac{\left(\frac{kx}{2}\right)}{KS}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\left(\frac{kx}{2}\right)} = 2R$$

$$\frac{QM}{KO} = \frac{R}{\frac{kx}{2}}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\left(\frac{kx}{2}\right)} = 2R \quad \sin \alpha = \frac{R}{\frac{kx}{2}} \quad R = \frac{kx}{2} \quad \sin \alpha = \frac{R}{\frac{kx}{2}} \quad \alpha \approx 30^\circ$$

$$\triangle KOE \sim \triangle KSO \quad \frac{R}{\frac{kx}{2}}$$

2004 560+

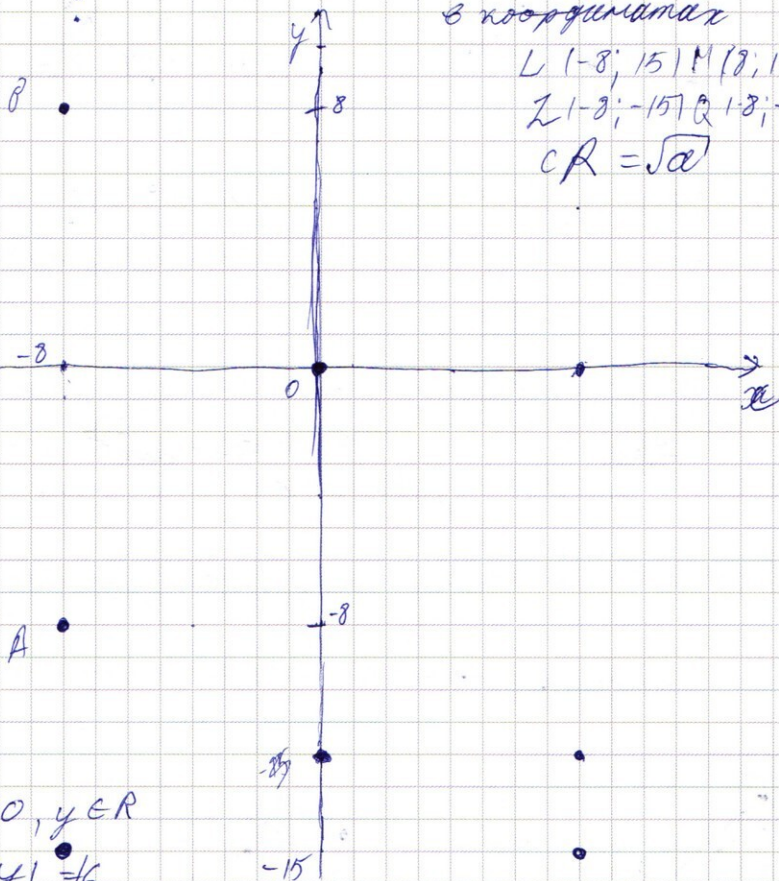
$$540 + 36 = 576$$

см. страницу № 5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & 1) \text{ при } x=0, y \in \mathbb{R} \\ |x-8|^2 + (y-15)^2 = a & \text{— окружности с центрами в координатах} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L(-8; 15) \quad M(8; 15) \\ L(-8; -15) \quad M(8; -15) \\ CR = \sqrt{a} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 1) \text{ при } x=0, y \in \mathbb{R} \\ |y+8| + |8-y| = 16 \end{aligned}$$

при $x \neq 0$
решения нет

при $x=y$

$$|2y+8|=8$$

$$y = -8$$

$$y = -8$$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ x &= 0 \\ A(-8; -8) \end{aligned}$$

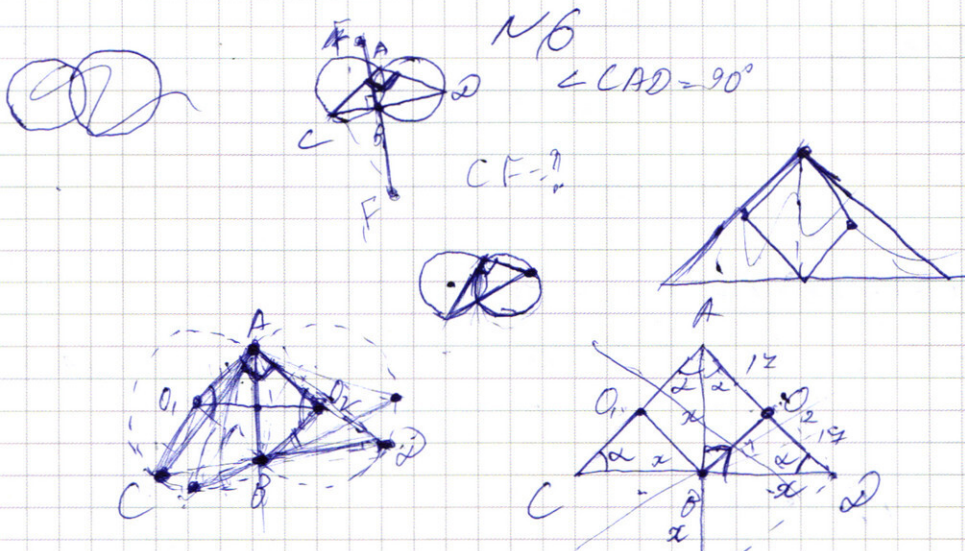
при $x=-y$

$$|-2y+8|=8$$

$$\begin{aligned} y &= 8 & y &= 0 \\ x &= -8 & x &= 8 \end{aligned}$$

$$B(-8; 8)$$

$$O(0; 0)$$

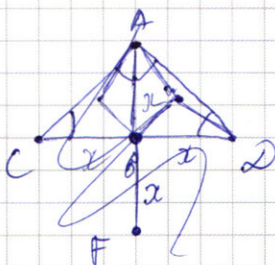


1) т.к. окружности имеют F равные радиусы, то $O_1 A O_2 B$ является ромбом, ~~т.к.~~
 $O_1 A = O_1 B = O_2 A = O_2 B$.

2) т.к. AB является общей хордой, ~~то $\angle ADB = \angle BDA$~~
 для углов ACB и ADB , тогда ~~тогда~~ $\angle BDA = \angle BCA = 45^\circ$
 значит $\triangle CAD$ - равнобедренный. $\Leftarrow$ "

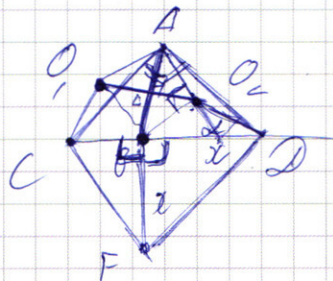
~~AD и CA являются диаметрами окружности~~

~~$ADFC$ - квадрат $\Rightarrow CF = AD = 17,2 = 34$~~



$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{AB \cdot 2}{\sqrt{2}} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{\sqrt{2}} \Rightarrow AB = 17\sqrt{2}$$



$$OL = \sqrt{17 \cdot 17 - \frac{17 \cdot 17}{2}}$$

$$OL = \frac{17}{\sqrt{2}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

значит 2 решения

система имеет 2 решения, когда окружности
проходят через точки A и B

$$2 \text{ окруж. } \sqrt{a} = AL = BL = 7 \Rightarrow a = 49$$

также 2 решения, когда $\sqrt{a} = \frac{2Q}{2} = \frac{LM}{2}$
т.к. окружности будут касаться осей OX и OY в 2-х точках

$$\sqrt{a} = 16 \Rightarrow a = 256$$

Ответ: 49, 256

и 7

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{20} \\ y \leq 93 + 31 \cdot 3^{27} - 71x \end{cases}$$

$$y \leq 93 + 31 \cdot 3^{27} - 71x$$

пусть $x = 4$, тогда

$$3^4 + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{20} \cdot 4 - 3^4$$

не выполняется

$$\Rightarrow x > 4$$

значит условие
не выполняется.

$$x = 31$$

$$3^{28} \cdot 27 + 4 \cdot 3^{28} > 93 + 31 \cdot 3^{27} - 31 \cdot 3$$

не выполняется

значит $x \in [5; 30]$ $\Rightarrow 26$ значений x
удовлетворяет пер. ву

$$x = 30$$

$$3^{28} \cdot 27 + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 30 \cdot 3^{27} - 90$$

не выполняется

$$2 + 6 + 0 + 2 - 4 + 2 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x_2

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 7x - 3 \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x + \cos 3x + \sin 3x \cos 4x + \sin 4x \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) + (\cos 3x - \sin 3x) (\sin 4x + 1) = 0$$

$$(1 - \sin 4x) / (1 + \sin 4x) (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) + (\cos 3x - \sin 3x) / (\sin 4x + 1) = 0$$

$$(\sin 4x + 1) (1 - \sin 4x) (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) + (\cos 3x - \sin 3x) = 0$$

$$\sin 4x = -1$$

$$4x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos 3x + \sqrt{2} - \sin 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x - \sin 4x \cdot \sqrt{2} = 0$$

$$\cos 4x = t \quad \cos 3x = q$$

$$tq - \sqrt{1-t^2} \sqrt{1-q^2} + q + t \sqrt{1-q^2} + q \sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-q^2} +$$

$$\sqrt{t^2 q^2 - \sqrt{1-t^2} - q^2 + (tq)^2} + q + \sqrt{t^2 - t^2 q^2} + \sqrt{q^2 - q^2 t^2} - \sqrt{1-q^2} + \sqrt{2} t = 0$$

$$+ \sqrt{2} t = 0$$

$QD = x$
 $CW = \cancel{K}L = \frac{42}{3}$

и упрощаем $\frac{QS}{CS} = \frac{L}{L+2R} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

$2R = 4L - 3L + 6R$
 $L = 6R$

$\sin \alpha = \frac{R}{R+L} = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7}$

$L = \arcsin \frac{1}{7}$

$\frac{KY}{MQ} = ?$

$\frac{KY}{KO} = \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{\sqrt{48}}{7}$

$\frac{OY}{KO} = \frac{R}{KO} = \frac{1}{7}$

$\frac{OY}{R} = \frac{1}{7}$

$R \cdot KO = \frac{R}{7}$

$OY = \frac{R}{7}$

$\frac{SY}{SQ} = \frac{7R - \frac{R}{7}}{6R} = k'$

$k' = \frac{40R}{42R} = \frac{40}{42} = \frac{8}{7}$

$S_{KLM} = S_{\text{малого}} \cdot (k')^2 = 9 \cdot \frac{8^2}{7^2} = \frac{576}{49}$

Ответ: $L = \arcsin \frac{1}{7}$

$S_{KLM} = \frac{576}{49}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{array}{r|l} 64827 & 9 \\ 7203 & 3 \\ 2407 & 7 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y < 99 + 3 \cdot 3^{27} - 7 \cdot 26$$

$$x = 1$$

$$3 + 4 \cdot 3^{20}$$

$$\begin{array}{r|l} 64827 & 9 \\ 63 & 3 \\ 18 & 6 \\ -18 & 12 \\ \hline 027 & \end{array}$$

$$y \leq 99 + 3^{28} - 7$$

$$\begin{array}{r|l} 2407 & 7 \\ 21 & 7 \\ 30 & 7 \\ -28 & 7 \\ \hline 21 & 7 \\ 63 & 7 \\ -63 & 7 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

значит восьмизначное число
состоит из 9, 3, 7 и 7

рассмотрим случай, где есть число 9

$$\underline{0} \quad \underline{7} \quad \underline{6} \quad \underline{5} \quad \underline{4} \quad \underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{1} \quad 9, 3, 7, 7, 7, 7, 7, 7$$

~~8! - возможных чисел~~ C_8^4 возможных чисел

рассмотрим случай, где 9 разложена на 3+3

$$\underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{2} \quad \underline{2} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \quad 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7, 7$$

~~8! - возможных~~

C_8^6 возможных чисел

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 8 \cdot 7$$

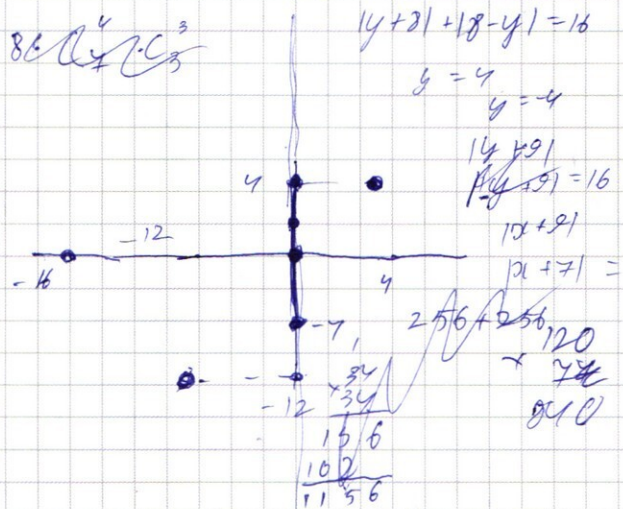
$$8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot C_3^3$$

$$x = 4 \quad |7y + 8| = 16$$

$$y = 4$$

$$|x + 8y| = 16$$

$$|x + 4y| + |x - 4y| = 16$$



$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x + \cos 3x + \sin 3x \cos 4x + \sin 4x \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin 3x (-\sin 4x + \cos 4x - 1) + \cos 3x (\cos 4x + 1 + \sin 4x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(\cos 4x - (\sin 4x + 1)) \sin 3x + \cos 3x (\cos 4x + 1 + \sin 4x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) - \sin 4x (-\sin 3x + \cos 3x) + (\cos 3x - \sin 3x) (\sin 4x + 1) = 0$$

$$\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) + (\cos 3x - \sin 3x) (\sin 4x + 1) = 0$$

$$(1 - \sin 4x) (1 + \sin 4x) (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) + (\cos 3x - \sin 3x) (\sin 4x + 1) = 0$$

$$(\sin 4x + 1) ((1 - \sin 4x) (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) + (\cos 3x - \sin 3x)) = 0$$

$$\sin 4x = -1 \quad 4x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

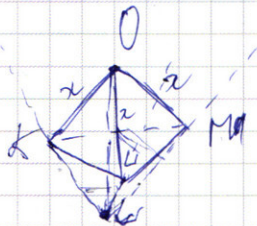
$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3^{28} x - 3x \end{cases}$$

$$93 = 3 \cdot 31$$

$$y : 3$$

$$x = 4$$

4

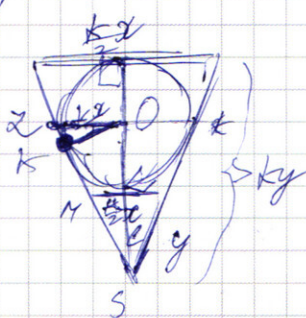


$$y > \sqrt{4 \cdot 3^{28} \cdot 3^x}$$



$$\angle KSO = ?$$

$$\angle KLM = ?$$



$$81 \cdot 4 \cdot 3^{28} < y \leq 93 + 4 \cdot 3^{28} - 12 \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot a \cdot b = 9$$

$$\frac{1}{2} \cos \alpha \cdot a \cdot b = 16$$

здесь площадь

подобия, $k = \frac{4}{3}$

иногда подобия.

$$\triangle OKS \sim \triangle LMS$$

$$\frac{12 \sin \alpha}{kx} = xR \quad \sin \alpha = \frac{R}{kx} = m \cdot x \quad R = \frac{kx}{2} \quad k(R-1) = 2R$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$



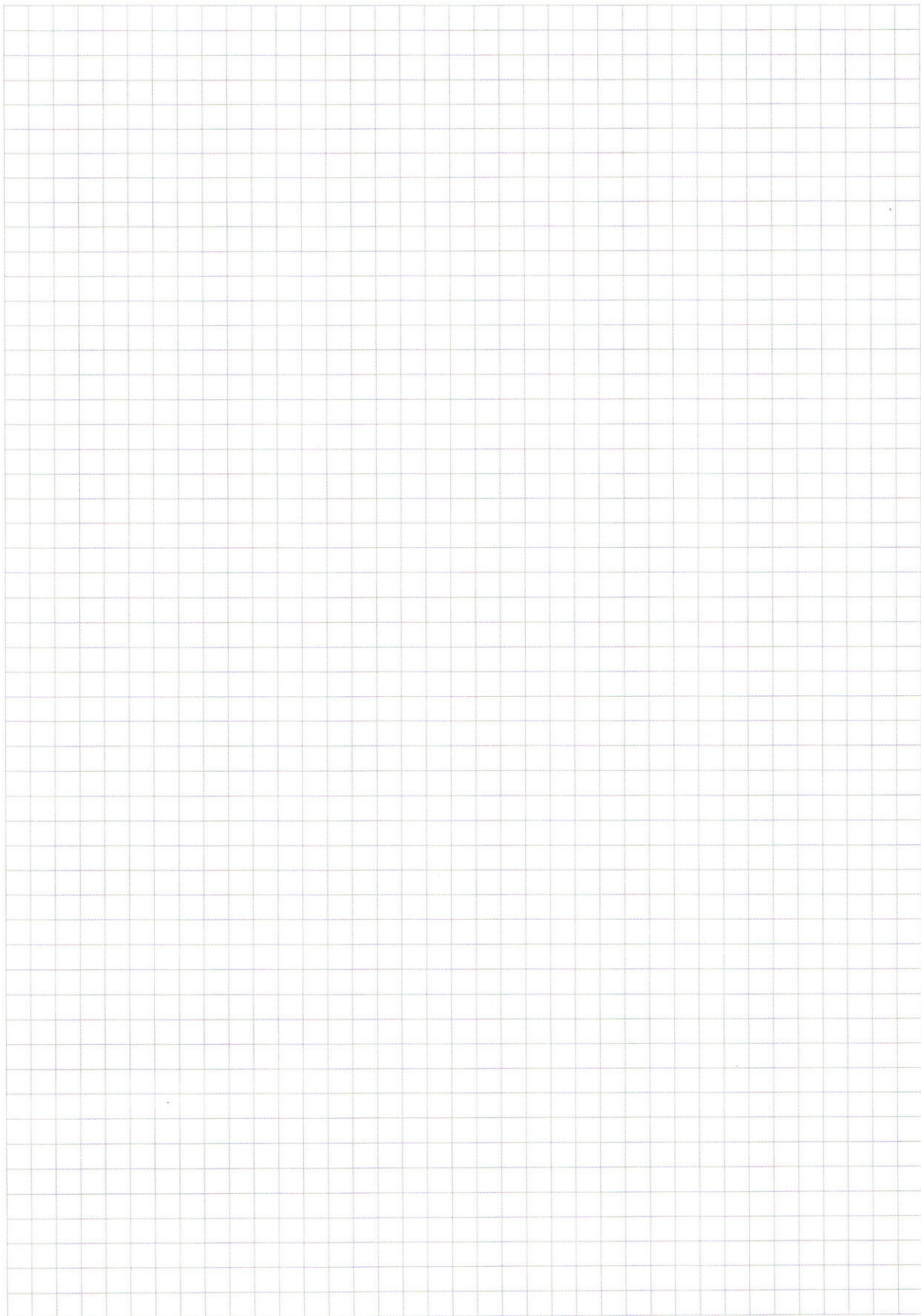
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)