

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

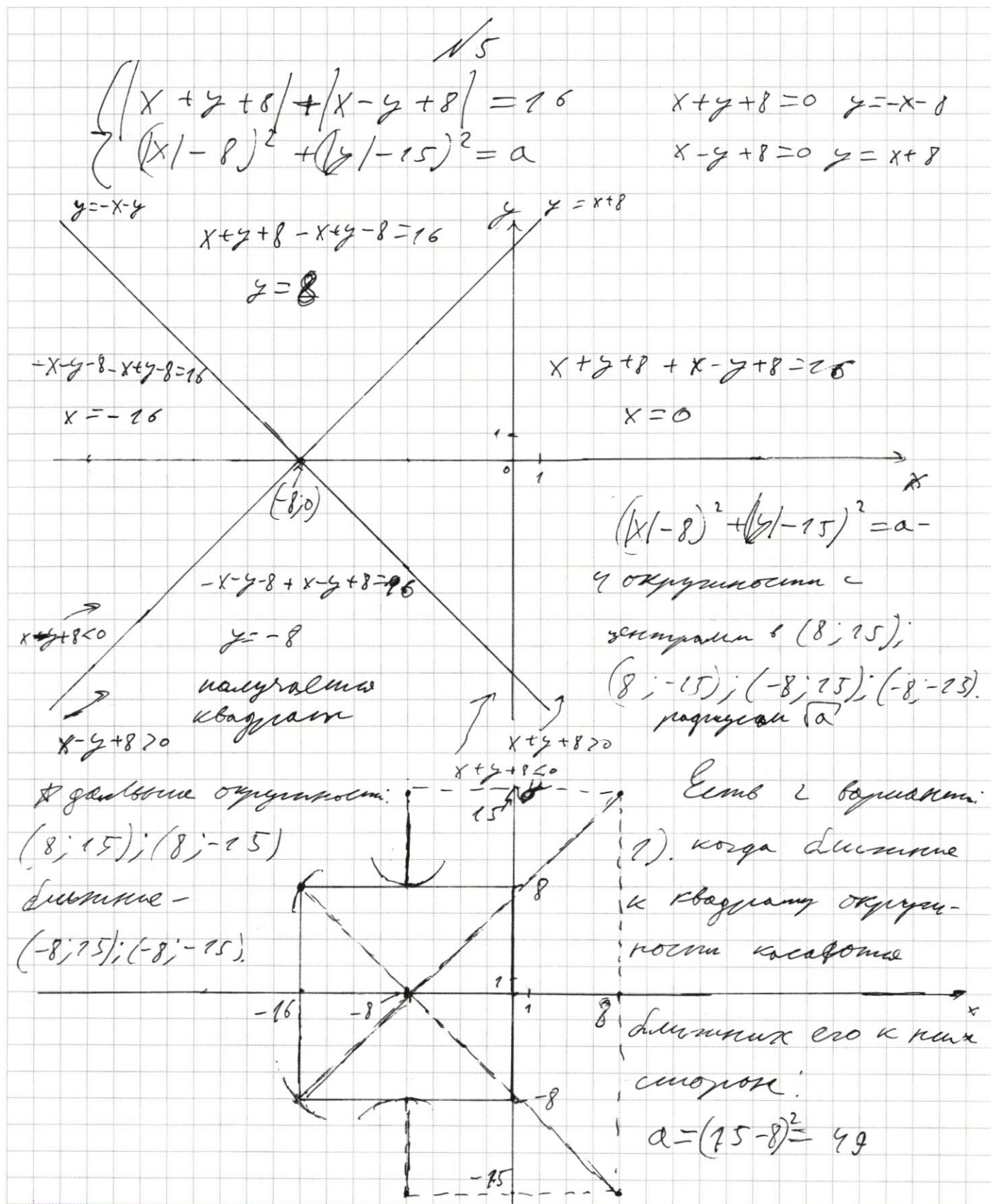
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

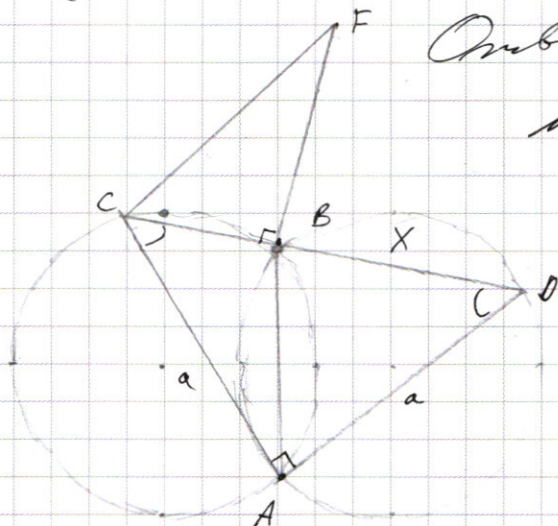


2) когда дуги от квадрата описанных окружностей пересекаются на дуге от своих центров точки квадрата (вместе образуют 2 дуги описанных окружностей квадрата внутри себя).

$$a = (15+8)^2 + (8-3)^2 = 23^2 + 5^2 = 529 + 25 = 554$$

Ответ: 49; 554.

16



Дано:

2 окр с центрами

O_1 и O_2

$R = 17$

$\angle CAD = 90^\circ$

$BF \perp CD$

$BF = BD$

$CF = ?$

$BC = 16$

$S_{\triangle ACF} = ?$

Длины дуг разных окружностей, от Т.А до Т.В равны (свойство равноудаленности радиусов), а значит и $\angle ACB$ и $\angle ADB$, которые на них опираются равны.

$\triangle ACD$: $\angle ACD + \angle CDA + \angle CAD = 180^\circ$ $\angle CAD = 90^\circ$,

значит $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$, значит

$\triangle ACP$ - равноб. (признак), значит $AC = AP = a$

(св-во). Пусть $BD = x$, тогда $CP = \sqrt{2} \cdot a$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{(CD - BD)^2 + BD^2} =$$

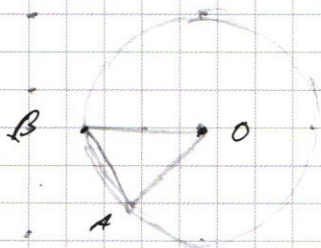
$$= \sqrt{(\sqrt{2}a - x)^2 + x^2} = \sqrt{2x^2 + 2a^2 - 2\sqrt{2}ax}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6 продолжение:

Условие $\angle CAD = 90^\circ$; $B \in CD$ не накладывает условия на конкретные расположения точек C и D на окружности, значит, мы можем расположить их как угодно для нахождения длины AB , ведь возможность условий $\angle CAD = 90^\circ$; $B \in CD$ определяется лишь взаимным расположением окружностей. Пусть $AB \perp CD$

5-центр
окружностей



$\angle BDA = 45^\circ$, значит

$$\angle BOA = 2\angle BPA = 90^\circ$$

$$\triangle BOA \quad BO = OA = 17$$

$$BA = (2 \cdot BO = 17\sqrt{2})$$

$$\triangle BAD \quad \cos \angle BDA = \frac{BD^2 + AD^2 - BA^2}{2 \cdot BD \cdot AD}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x^2 + a^2 - 17^2 \cdot 2}{2 \cdot x \cdot a}$$

$$\sqrt{2} \cdot x \cdot a = x^2 + a^2 - 17^2 \cdot 2$$

$$x^2 + a^2 - \sqrt{2} \cdot x \cdot a = 17^2 \cdot 2$$

$$2x^2 + 2a^2 - 2\sqrt{2} \cdot x \cdot a = 17^2 \cdot 4$$

$$\sqrt{2x^2 + 2a^2 - 2\sqrt{2} \cdot x \cdot a} = CF = 17 \cdot 2 = 34$$

$$BC=16$$

$$\triangle CBA: \cos \angle BCA = \frac{CB^2 + CA^2 - BA^2}{2CB \cdot CA}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{16^2 + a^2 - 2 \cdot 17^2}{2 \cdot 16 \cdot a}$$

$$a^2 - 16\sqrt{2}a - 302 = 0$$

$$D = 16^2 + 302 = 950 = (15\sqrt{2})^2$$

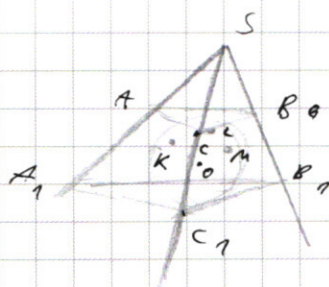
$$a = 8\sqrt{2} + 15\sqrt{2} = 23\sqrt{2}$$

$$\cos \angle FCB = \frac{16}{34} = \frac{8}{17} \quad \sin \angle FCB = \sqrt{1 - \frac{8^2}{17^2}} = \frac{15}{17}$$

$$\begin{aligned} \sin \angle FCA &= \sin(\angle FCB + \angle BCA) = \\ &= \sin \angle FCB \cdot \cos \angle BCA + \cos \angle FCB \cdot \sin \angle BCA = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{8}{17} + \frac{15}{17} \right) = \frac{23}{17\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle FCA} &= \frac{1}{2} FC \cdot AC \cdot \sin \angle FCA = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot \frac{23}{17\sqrt{2}} \cdot 23\sqrt{2} = \\ &= 23^2 = 529 \end{aligned}$$

Ответ: $CF=34$; $S_{\triangle FCA} = 529$.



$SO \perp \alpha$

$\triangle ABC \perp Q \perp \triangle A_1B_1C_1$

плоскости параллельные,

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (параллельные

стороны прикресленного угла),

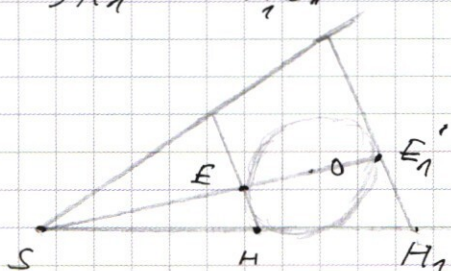
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 продолжение:

проведём перпендикуляры SH и SH_1
к AB и AB_1 соотв (они совпадают, т.к.
 $AB \parallel AB_1$ (лежат в одной плоскости)).

$$\frac{SH}{SH_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{3}{4} \quad (\triangle SAB \sim \triangle SA_1B_1).$$



E, E_1 принадлежат
окружности.

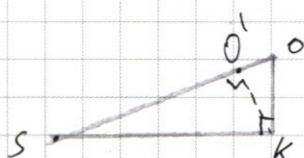
$$\triangle ESH \sim \triangle E_1SH_1$$

$$\frac{ES}{E_1S} = \frac{SH}{SH_1} = \frac{3}{4}$$

$EE_1 = 2r$ - радиус

$$\frac{ES}{EE_1 + E_1S} = \frac{ES}{EE_1 + ES} = \frac{3}{4}$$

$$ES = 3ES + 6r \quad r = \frac{ES}{6}$$



$$SO = ES + r \quad SO = SE + r = 2r$$

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

S_x - площадь, ^{сечения} проходящего через K, L, M

S_o - площадь сечения, проходящего через O .

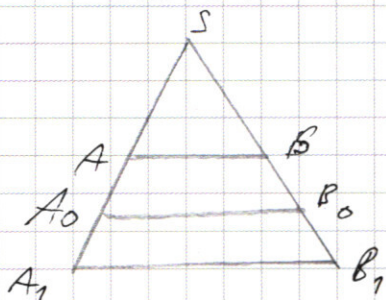
S_o соответствует SO^2

S_x соответствует $(SO')^2$

$$SO' = \cos^2 \angle KSO \cdot SO = (1 - \sin^2 \angle KSO) SO =$$

$$\left(1 - \frac{1}{49}\right) \cdot 50 = \frac{48}{49} \cdot 50$$

A_0B_0 - сторона сечения S_0 , ~~уже~~ лежащая в плоскости, где лежат AB и A_1B_1 .



Исходя из этих данных
далее подобий можно
получить соотношения

$$\frac{S_0}{S_{ABC}} = \left(\frac{A_0B_0}{AB}\right)^2 = \left(\frac{7r}{6r}\right)^2 = \frac{49}{36}$$

$$S_0 = S_{ABC} \cdot \frac{49}{36} = 9 \cdot \frac{49}{36} = \frac{49}{4}$$

$$S_x = S_0 \cdot \left(\frac{50'}{50}\right)^2 = \frac{49}{4} \cdot \frac{48}{49} = 12$$

Ответ: $\sin \angle KSO = \frac{1}{2}$; $S_x = 12$.

N3

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 3} \\ \underline{63} \\ 18 \end{array}$$

$$64827 = 64800 + 27$$

$$\frac{64827}{3} = \frac{64800}{3} + \frac{27}{3} = 7200 + 3 =$$

$$= 7203$$

$$7203 = 3 \cdot 2401$$

$$2401 = 2500 - 2 \cdot 50 + 1 = (50)^2 - 2 \cdot 50 + 1 =$$

$$= (50-1)^2 = 49^2 = 7^4$$

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 - 1 \text{ цифра}$$

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \text{ цифры}$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(y)} = x^2 \ln(xy^2) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$y^2 + 2y(x+2) - 3x(x-4) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{y} &= (x+2)^2 + 3x^2 - 12x = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x = \\ &= 4x^2 - 8x + 4 = (2(x-1))^2 \end{aligned}$$

$$y = -(x+2) \pm 2(x-1)$$

$$y = x - 3$$

$$y = -1 - 3x$$

$$x > 0$$

$$y \leq 0$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(y)} &= \frac{x^2 \ln(-y)}{(-y) \cdot \ln(-y)} = x^{(2 \ln x + 2 \ln y^2)} = \\ &= x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln(-y)} \quad x^{\ln y} \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^{3 \ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} &= \left(\frac{x^3}{-y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln x} \\ e^{\ln\left(\frac{x^3}{-y}\right) \cdot \ln(-y)} &= e^{2(\ln x)^2} \end{aligned}$$

$$3 \ln x \cdot \ln(-y) - (\ln(-y))^2 = 2(\ln x)^2$$

$$2\left(\frac{\ln x}{\ln(-y)}\right)^2 - 3\left(\frac{\ln x}{\ln(-y)}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{\ln x}{\ln(-y)} = 1 \quad \frac{\ln x}{\ln(-y)} = \frac{1}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln x = \ln -y$$

$$x = -y$$

$$-x = y$$

$$-x = x - 3$$

$$x = \frac{3}{2} \quad y = -\frac{3}{2}$$

$$-x = -1 - 3x$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad x > 0$$

не подходит

$$x^2 = -1 - 3x$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 + 4 = 13$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} > 0$$

$$y = -1 - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} \sqrt{13} - \frac{9}{2} \right) =$$

$$= \frac{2}{2} - \frac{3}{2} \sqrt{13} < 0$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \ln (-y)$$

$$x = \sqrt{-y}$$

$$x \ln x^2 = \ln -y$$

$$x^2 = 3 - x$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} > 0$$

$$y = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} + 3 = \frac{\sqrt{13} - 7}{2} < 0$$

подходит

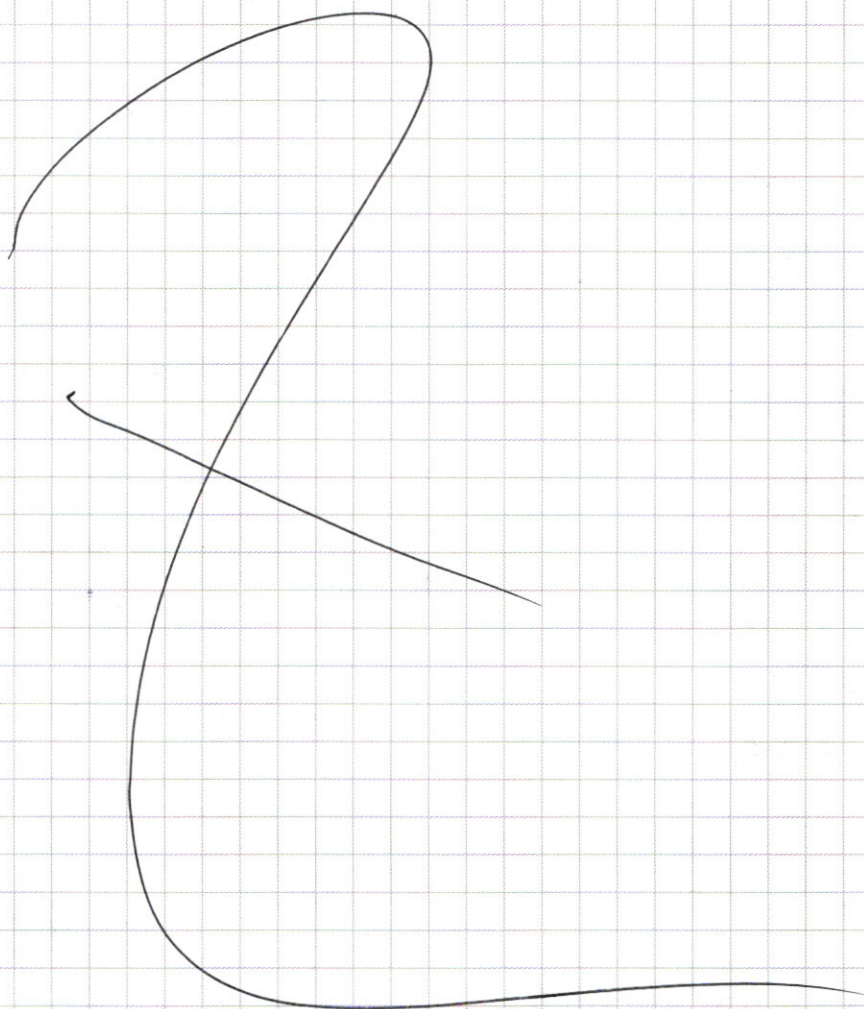
$$x^2 = -1 - 3x$$

*

Ответ: $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right);$

$$\left(\frac{\sqrt{13} - 1}{2}; \frac{\sqrt{13} - 7}{2} \right);$$

$$\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; \frac{2}{2} - \frac{3}{2} \sqrt{13} \right).$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^x + K$
 $\sqrt[3]{3}$
 $2 < 0$

$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{\ln y} = x^{2 \ln(x^2)} \quad x \neq 0$

$\frac{x^{2 \ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2 \ln x} \cdot x^{2 \ln(-y)}$
 $x=0$ по условию

$y^2 + 2y(x+2) + x^{4 \ln(-y)} \neq 0$
 $y = -x - 2 \pm 2(x-1) \leq$
 $y = 2x - 3$

$3x^2 + 12x = 0$
 $x^{3 \ln(-y)} = (-y)^{\ln(-y)} \cdot x^{2 \ln x} \quad y \neq 1 - 3x$

$\frac{D}{y} = (x+2)^2 +$
 $y = x - 3$
 $y = 2 - 3x$
 $x \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

$+ 3x(x^2 - y) =$
 $x^3 = -y \cdot x \cdot \frac{\ln x}{\ln(-y)}$

$= x^2 + 9x + 4 =$
 $x^{3-2 \frac{\ln x}{\ln(-y)}} = -$

$= x^2 - 8x + 4 =$
 $(\frac{y}{x})^2 \cdot 2 \cdot 2$

$= (2(x-1))^2$
 $-y \geq 0$
 $3x - 1 \leq 0$
 $3 - x$

$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

$(y+a)^2 + (x+b)^2 + (cx+dy)^2 = 0$

$y^2 + 2ay + a^2 + x^2$

$y^2 + 2xy + x^2 - y(x^2 - 3x)$

$-y - x - (y-x)^2 + 4y + y^2 + 2 - 2x^2 + 12x - 2 = 0$

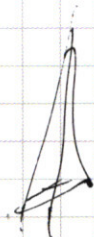
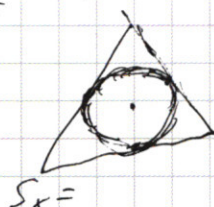
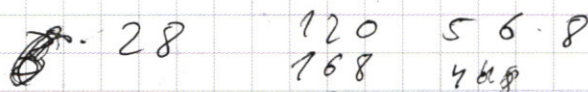
$y(y + 2x + 4) - 3x^2 - 12x$

$-(y-x)^2 +$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 29 \\ \hline 216 \\ 480 \\ \hline 696 \end{array}$$

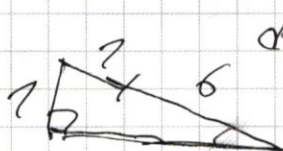
$$\text{X} \quad \text{Q} \rightarrow (A+8) + (B+8) = 10$$

• $A = 0$ $B = 0$ $A = -B_u$



$$a = \sqrt{29^2 + (25+8)^2} =$$

$$= \sqrt{29^2 + 23^2}$$



$$\sin 150 = \frac{1}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^{3-2\frac{\ln x}{\ln 3-x}}$$

$$x^{3\ln(3-x)} = (3-x)^{\ln 3-x} \cdot x^{2\ln x}$$

$$\cos x + \cos 3x =$$

$$= 2 \cos \frac{x+3x}{2} \cdot \cos \frac{x-3x}{2}$$

$$\frac{x^{3\ln 3 / \ln x}}{3-x} = x^{2\frac{\ln x}{\ln 3-x}}$$

$$\sin x + \sin 3x =$$

$$= 2 \cdot \sin \frac{x+3x}{2} \cdot \cos \frac{x-3x}{2}$$

$$\frac{x^{3\ln(3-x) - 3\ln x}}{(3-x)^{\ln(3-x)}} = x^{2\ln x - 3\ln x}$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x +$$

$$+ 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 5x$$

$$x^3 = (3-x)^2 \frac{\ln x}{\ln 3-x}$$

$$5x^2 =$$

$$x \left(x^{2-2\frac{\ln x}{\ln 3-x}} + 1 \right) = 3$$

$$e^{\ln \left(\frac{x^3}{3-x} \right) \cdot \ln 3} =$$

$$= e^{2(\ln x)^2}$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 43 + 3 \cdot (3^{28} - 1)x$$

$$(3^{x-28} (4+3) - 3^{28}) \approx 3^{28} \cdot x$$

$$3^{x-28} \cdot 4 > x$$

$$4+3 \leq 30$$

$$4+27 \geq 31$$

$$x=4 \text{ or } x=31$$

$$93 + 3^{28}x - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$\ln 33^x = 3^{28} - 1$$

$$(3^x - 5 - 93 - 4 \cdot x) /$$

$$3^x = 3^{28} - 1x$$

$$x \approx 28$$

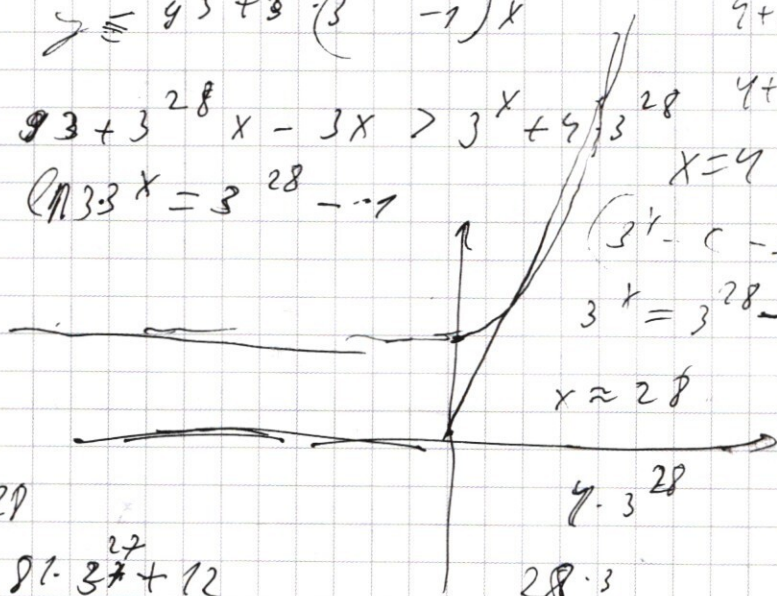
$$4 \cdot 3^{28}$$

$$28 \cdot 3$$

$$27 \leq x < 29$$

$$13 \cdot 3^{27} < 991 \cdot 3^{27} + 12$$

$$5 \cdot 3^{28} <$$

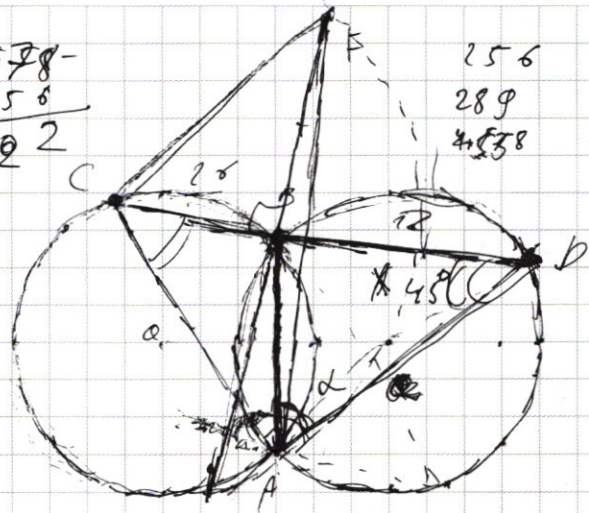


$$289 - 54 = 235$$

$$3 \quad 8 \quad 13 \quad 18 \quad 23 \quad 28$$

$$10 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 578 \\ - 258 \\ \hline 320 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 256 \\ 289 \\ \hline 4538 \end{array}$$



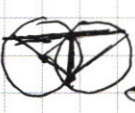
$$2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\sqrt{x^2 + (\sqrt{2}a - x)^2} = \frac{238}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2x^2 + 2a^2 - 2\sqrt{2}ax + \frac{46}{8-20}}$$

$$x^2 + a^2 - \sqrt{2}ax = \cos \alpha$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \sqrt{2}\frac{x}{a} + 1 = \cos \alpha$$



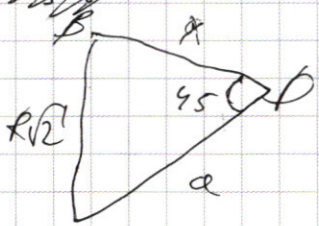
$$AB = R\sqrt{2}$$

$$\frac{x}{a} = \dots$$

1 $\alpha = \text{угол} = 45^\circ$ $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$

$\angle C = \angle D = 45^\circ$

ортогональный



гипот.

$\sin \alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{1}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}$$

$$\frac{a^2 + x^2 - 2ax}{2ax} = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\pm \frac{BC^2}{2}$ ортогональный

$$a^2 + x^2 - xa \frac{1}{\sqrt{2}} = R^2 = 2R^2$$

1) CA

2) $\angle FCB$

3) $\angle ACF$

4) $\sin \angle ACF$

5) S_{ACF}

$$2(a^2 + x^2 - xa \frac{1}{\sqrt{2}}) = 4R^2$$

$CF = 2R$

$$\begin{array}{r} 24 \cdot 27 = \\ \frac{24 \cdot 27}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} \end{array}$$

$$49 \cdot 49$$

$$64827 \div 3 =$$

$$50^2 + 1 - 100 =$$

$$= 20000 + 1600 + 9 =$$

$$= 21609 : 3 = 2000 + 203 =$$

$$= 2203 : 3 = 2901$$

$$2401 =$$

$$= 2100 + 280 + 21 =$$

$$= 300 + 40 + 3 =$$

$$= 343 = 7^3$$

$$\frac{3^x}{e^{43}} + 4 \cdot 3^{21}x - 93x - 3^{21} \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{e^{43}} 3^x - x^2 \left(\frac{3^{21}}{2} - \frac{1}{2} \right) + x(4 \cdot 3^{21} - 93)$$