

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.

- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

Handwritten notes: $7x - y/2 + x - y + 8$, $-2y = 16$, $y = -8$, $|x| + |x + 16|$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

- ✓ 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$64827 = 3^5 \cdot 2401 = 3^3 \cdot 7^4$, $7 \cdot 3 = 21 > 10$, значит 7-
мощно цифра числа $3 \cdot 3 = 9$ - цифра; $3^5 = 27 > 10$, значит
это величина число в размах которого цифра:
1, 3, 9, 7. Два случая:

1) 7 - 4 буквы, 3 - 3 буквы, 1 - 1 буква. Всего таких чисел: $C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^1 = 8 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$

2) 7 - 4 карты, 9 - 1 карта, 3 - 1 карта, 1 - 2 карты без мажора "елен".

$$\underset{\substack{\uparrow 8 \\ 9}}{C'_8} \cdot \underset{\substack{\uparrow 7 \\ 3}}{C'_7} \cdot \underset{\substack{\uparrow 6 \\ 4}}{C'_6} \cdot \underset{\substack{\uparrow 4 \\ 7}}{C'_4} = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 1 = 56 \cdot 3 \cdot 5 = 840$$

Всего: $180 - 840 = 1120$

Amber: 1120

n 2

$$\cos 7x + \cos 3x + \overset{N2}{\sin 7x} - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \sqrt{2} \left(\cos 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$(\cos 7x + \cos 3x) + (\sin 7x - \sin 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) / (\sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) \cdot \cos\left(3,5x - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(1,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{f}g 2x &= -1 \\ \cos(35x + \frac{\pi}{8}) &= 0 \\ \cos(1,5x - \frac{\pi}{8}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{3}{28}\pi + \frac{2}{7}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Andem: $-\frac{\pi}{8} \rightarrow \frac{2\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
 $\frac{3}{28} \rightarrow \frac{2}{4} \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $\frac{5\pi}{12} \rightarrow \frac{2}{3} \pi m, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \quad \text{или}$$

или, если $\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$$\ln(-y)(\ln(x^7) - \ln(-y)) = 2 \ln(x)(\ln(x) + 2 \ln(-y))$$

$$+ \ln^2(y) - 3 \ln(x) \cdot \ln(-y) + 2 \ln^2 x = 0$$

$$(\ln(-y) - 2 \ln(x))(\ln(-y) - \ln(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln(-y) = 2 \ln(x) \\ \ln(-y) = \ln(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = x^2 \\ -y = x \end{cases}$$

1) $-y = x^2 \Rightarrow y < 0 \quad (x \neq 0)$

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$

$$x(x^3 - 2x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -9 \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \\ y = -\frac{9 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = -\frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = 3 - \text{корень}$$

$$(3^3 - 2 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 12 = 0 \text{ (в.)})$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 7x + 12 & x - 3 \\ \hline x^3 - 3x^2 & \\ \hline -x^2 - 7x + 12 & \\ -x^2 - 3x & \\ \hline -4x + 12 & \\ -4x + 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} - \text{не подходит}$$

$$\frac{\sqrt{17} - 1}{2} \approx 1,5 > 0$$

2) $-y = x$:

$$x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$\begin{cases} x(x - 2) = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Корни подходят по условию

Ответ: $(3; -9); \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; -\frac{9 + \sqrt{17}}{2}\right); \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; -\frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right); (2; -2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано:
 $S_1 = 9$
 $S_2 = 16$

О- центр сферы, α и β - подобные треуголь-

$\angle LSO$
 $\beta - LSO$

Найти:
 $\angle KSO$

Решение: №4

Дано: $\angle LSO, \beta - LSO = \alpha \parallel \beta$

и β - подобные треуголь-
ники, где S - центр ко-
м. м. в плоскости: $(SKO) \rightarrow 2$

Пусть $SO \cap \alpha = M, SO \cap \beta = N$; R - радиус окр.

$x = SM$; но $MO = OK = ON = R$; $\triangle STM \sim \triangle SPN$

($\angle S$ - общ; $TM \parallel PN \Rightarrow \angle STM = \angle SPN$) $S_1 : S_2 = k^2$, где k - коэф.
пропорциональности $\Rightarrow k = \frac{4}{3} \Rightarrow PN = \frac{4}{3} TM \Rightarrow$

$\frac{x}{x+2R} = \frac{3}{4}$; $4x = 3x + 6R \Rightarrow x = 6R$; $KO \perp KS$, т.к. KO -

касательная $\Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{R}{x+R} = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{7}$

№6

Дано:

$R = 14$

$BE \perp CD$

$\angle CAD = 90^\circ$

$BF = BD$

а) Найти $\angle CF$

б) $BC = 16$

Найти: $\angle CF$

Решение:
Заметим, что хорды AB и CD перпендикулярны, т.к. радиусы OA и OC перпендикулярны, т.к. $\angle CAD = 90^\circ$.

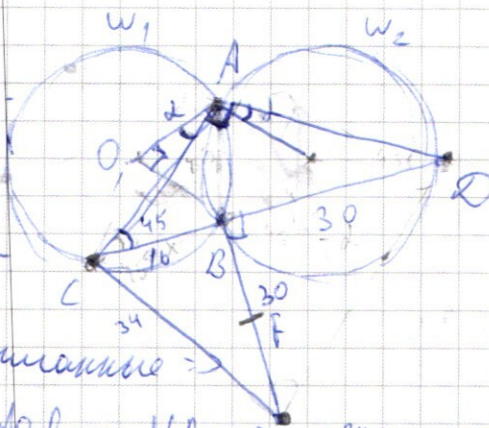
$\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2} = \angle ADB$ - вписанные $\Rightarrow$

$\triangle CAD$ - равнобедр. $\Rightarrow \angle ACB = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$; $\angle AOB = 2 \cdot \angle ACB = 90^\circ$ - центральный $\angle$, $AB = R\sqrt{2}$

$BD = BF \Rightarrow \triangle BDF$ - равнобедр. $\Rightarrow \angle BDF = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$; $\angle CAD = \angle ADF = 90^\circ \Rightarrow \angle ACF = 180^\circ \Rightarrow \triangle ACF$ - равнобедр. $\Rightarrow \angle ACF = 45^\circ$

$\angle CAB = 45^\circ - \angle ACB = 45^\circ - 45^\circ = 0^\circ$; но $\angle CAB$ - вписанный $\Rightarrow \angle CAB = 45^\circ$; $\angle BAC = 45^\circ$; $\angle BAC = 45^\circ$; $\angle BAC = 45^\circ$; $\angle BAC = 45^\circ$

Применяя теорему Пифагора: $CF = \sqrt{BC^2 + BF^2}$ (продолж. далее)



$$\sin(45^\circ + 2) = \cos(45^\circ - 2) \Rightarrow \text{(применение 6)}$$

$$CF = \sqrt{(2R)^2 (\sin^2(45^\circ - 2) + \cos^2(45^\circ - 2))} = 2R = 34$$

Ответ: ~~34~~ 34

$$\delta) BC=16; \text{ по Т. Пифагора } \triangle CBF: BF = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{15^2 - 2^2} = 30 \Rightarrow BD = BF = 30; CA = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{BF + BC}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF$$

$$\sin \angle ACF = \sin \angle BCF \cdot \cos 45^\circ + \cos \angle BCF \cdot \sin 45^\circ = \frac{30}{34} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{16}{34} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{34} = \frac{23\sqrt{2}}{34}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 34 \cdot \frac{23\sqrt{2}}{34} = 529$$

Ответ: 529

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+8 \geq 0 & | & x-y+8 \geq 0 \\ y \geq -x-8 & | & y \leq x+8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 1 & 10 \\ 2 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 1 & 15 \\ 2 & 13 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (0;0) & \quad (0;0) \\ 0+0+8 \geq 0(1) & \quad 0-0+8 \geq 0(1) \end{aligned}$$

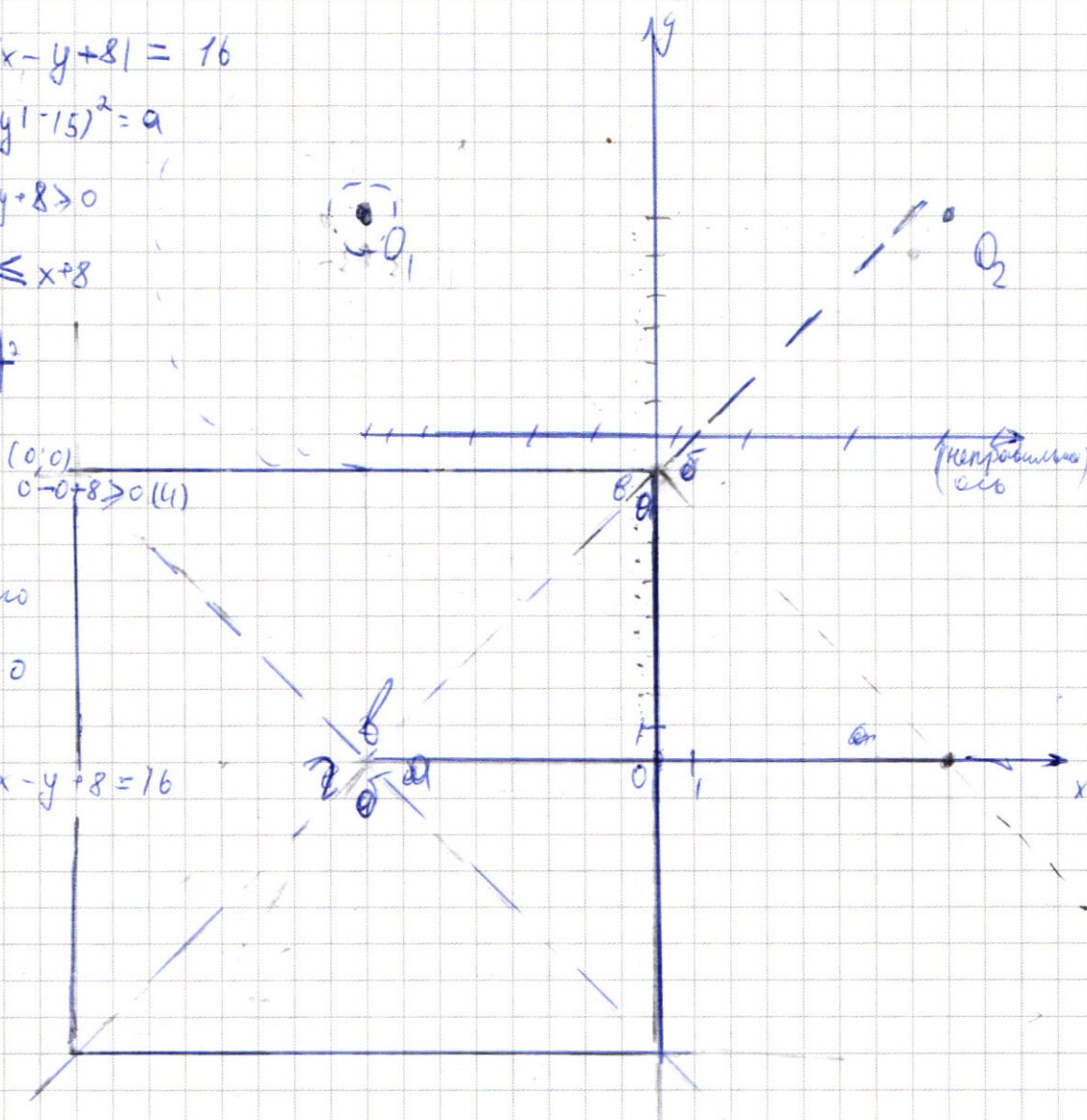
$$\begin{aligned} a) & \quad x+y+8 \geq 0 \\ & \quad x-y+8 \geq 0, \text{ то} \end{aligned}$$

$$2x = 0; x = 0$$

$$\begin{aligned} b) & \quad x+y+8 \leq 0 \\ & \quad x-y+8 \geq 0 \\ & \quad -x-y-8+x-y+8=16 \\ & \quad y = -8 \end{aligned}$$

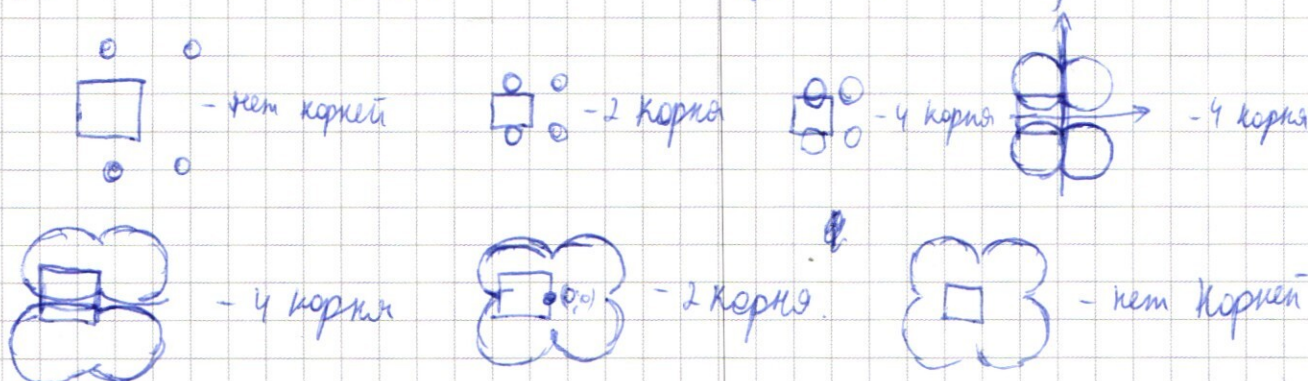
$$\begin{aligned} b) & \quad x+y+8 \geq 0 \\ & \quad x-y+8 \leq 0 \\ & \quad y = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z) & \quad x+y+8 \leq 0 \\ & \quad x-y-8 \leq 0 \\ & \quad x = -16 \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Верхнее уравнение ^(N 5 продолжение) квадрат ^{16 и 16},
второе ур-е ^{найти} 4 окружности, каждая лежит в одной четверти,
примем. (X, y) , где $|x|=8$, $|y|=15$ - центр каждой из 4-ех.
замечим, что как окружности, так и квадрат симметричны
относительно $Ox \Rightarrow$ корней всегда четное кол-во, кроме
случаев, когда корни лежат на Ox и совпадают: 15 - радиус
окружностей. (O_2 дальше от квадрата, чем O_1)



$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma a = \sqrt{(15^2 - 8^2)^2 + 0^2} \Rightarrow a = 49 \\ a = 15^2 + 8^2 = 289 \end{cases}$$

Ответ: 49; 289

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 83 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases} \quad N 7$$

$y = 3^x$ - возрастающая функция
 $y = -3x$ - убывающая

$$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{28}; f'(x) = \ln 3 \cdot 3^x - \text{возрастает}$$

$$g(x) = 83 + 3(3^{27} - 1)x, g'(x) = 3(3^{27} - 1) - \text{константа}$$

$\Rightarrow$ эти значения

x , после которых $f(x)$ возрастает быстрее $g(x) \Rightarrow$ не более
1 корня до этого x и не более одного корня после этого x в
уравнении $f(x) = g(x)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$64827 \mid$$

$$64827 = 2401 \cdot 27$$

$$64827 = 3^3 \cdot 2401 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$112$$

C

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 8 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times 75 \\ \hline 280 \\ 50 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64827 \\ 54 \overline{) 27} \\ 102 \\ \hline 108 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 27} \\ 21 \overline{) 343} \\ 30 \\ \hline 38 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 27} \\ 28 \overline{) 49} \\ 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline 441 \\ 196 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1122 \\ \times 22 \\ \hline 2244 \\ 2244 \\ \hline 2464 \end{array}$$

$$C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 6$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 15 \\ \hline 280 \\ 56 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \cos 4x$$

$$2 \sin 2x \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 2x - \sin 3x + 5 \cos(7x - 3x)$$

$$\cos \frac{7+3}{2}$$

$$\cos(7x - 3x) = \cos 7x \cdot \cos 3x + \sin 7x \cdot \sin 3x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) = \sin 2$$

$$(\cos 7x + 1) / (\cos 3x + 1) = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$- \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x$$

$$- \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 1$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos 5x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x \cdot \ln(x y^2)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 = 12x + 4y = 0 \quad (y+x)^2$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$x^{\ln(-y)} \cdot (-y)^{\ln(x)} \begin{matrix} y \leq 0 \\ x > 0 \end{matrix}$$

$$y^{-\ln y}$$

$$4(3x+y) - y^2 - 3x^2$$

$$27 - 18 - 21 = 12$$

$$-18$$

$$15x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{5\pi}{8} + \frac{2}{3}$$

$$\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\ln(-y) (\ln(x^2) - \ln(-\frac{y}{x})) = 2 \ln x (\ln(x) + \ln(x y^2))$$

$$\ln(-y) \cdot (2 \ln(x) - \ln(-y)) = 2 \ln x (\ln x + 2 \ln(-y))$$

$$- \ln^2(-y) + 2 \ln(-y) \ln(x) = 2 \ln^2 x - 4 \ln x \cdot \ln(-y)$$

$$\ln^2(-y) + 3 \ln(x) \cdot \ln(-y) + 2 \ln^2 x = 0$$

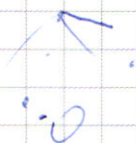
$$\frac{\ln y}{\ln x} ;$$

$$(1 + \sqrt{17})^2 = 1 + 17 + 2\sqrt{17} = \frac{(10 + 2\sqrt{17})}{2} = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$$



16

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$



$$3,5x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

$$3,5x = \frac{3\pi}{8}$$

$$|x + y + 8| = |x - y + 8| = 16$$

$$3^x = 4 \cdot 3^{28} = 33 + 3^{28} - 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos 5x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 5x$$

$$\cos 5x / (2 (\cos 2x + \sin 2x))$$

$$\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x = \sin 2x$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4})$$





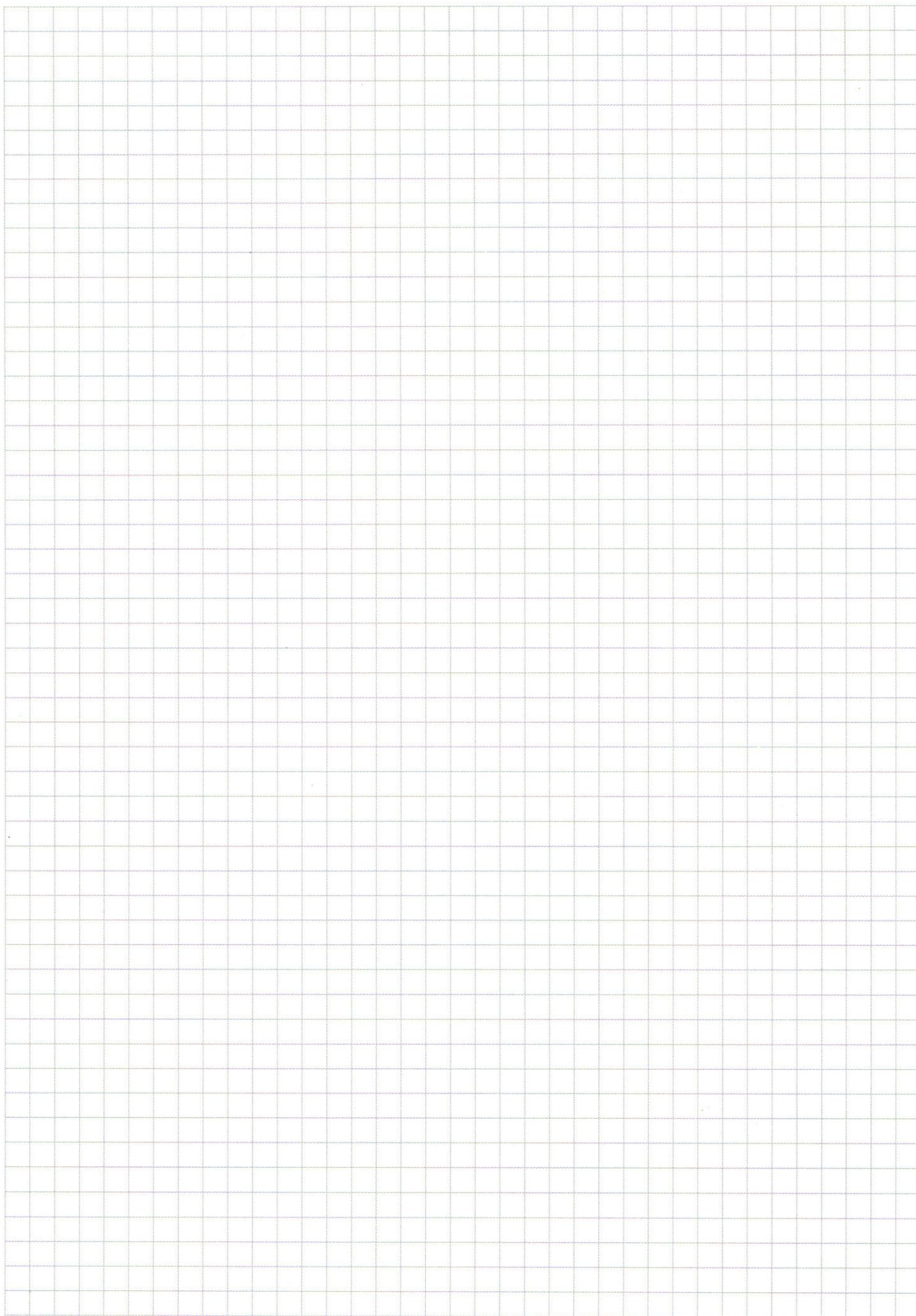
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)