МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

Воспользуемся введением вспомогательного аргумента:

$\sin 7x + \cos 7x = \sqrt{2}\sin(7x + \frac{\pi}{4})$ $(= \sqrt{2}\sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 7x + \cos 7x$ – верно$)$

$\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}\sin(3x - \frac{\pi}{4})$ $(= \sqrt{2}\sin 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\cos 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 3x - \cos 3x$ – верно$)$

Получаем: $\sqrt{2}\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}\cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

По ф-ле разности синусов:

$$2\sin\left(\frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{10x}{2}\right) = -\cos 4x$$

$$2\sin(2x + \frac{\pi}{4})\cos 5x = -\cos 4x$$

1) Пусть $\cos(2x + \frac{\pi}{4}) \neq 0$, домножим на него:

$$\underbrace{2\sin(2x + \frac{\pi}{4})\cos(2x + \frac{\pi}{4})}\cos 5x = -\cos 4x \cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$= \sin(4x + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - 4x - \frac{\pi}{2}) = \cos(-4x) = \cos(4x)$$

$$\cos 4x \cos 5x = -\cos 4x \cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ 2\cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \\ \cos(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \\ \frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \quad (*) \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3} \end{array}\right.$$

$(n, k, l \in \mathbb{Z})$

2) Пусть $\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$:

$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi m \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi m \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4}$ – но этот вариант уже учтен в $(*)$.

Итого решение: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3} \end{array}\right.$ $(m, k, l \in \mathbb{Z})$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4}$; $\frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$; $\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}$, $(m, k, l \in \mathbb{Z})$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3.

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 \quad (*) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$

(*) $y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0$

$y^2+2y(x+2)-3x^2+12x=0$ (решим как квадратное отн. y)

$D/4=(x+2)^2+3x^2-12x=x^2+4x+4+3x^2-12x=4x^2-8x+4=4(x-1)^2$

$y=-x-2\pm(2(x-1))$

$\left[\begin{array}{l} y=-x-2+2x-2=x-4 \\ y=-x-2-2x+2=-3x \end{array}\right.$

Получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-3x \\ \left(\frac{-x^7}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(x\cdot 9x^2)} \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} y=x-4 \\ \left(\frac{-x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x\cdot(x-4)^2)} \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

(1): $\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$ $\left(= x^{\ln(81x^6)} = x^{\ln(81x^4)+\ln x^2} = x^{4\ln 3x}\cdot x^{\ln x^2} = \right)$

$x^{6\ln(3x)}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{4\ln 3x}\cdot x^{\ln x^2}$ (Разделим на $x^{4\ln 3x}\neq 0$, т.к. $x\neq 0$)

$x^{2\ln(3x)} = x^{\ln x^2}\cdot 3^{\ln(3x)}$ $\left(= x^{\ln x^2}\cdot 3^{\ln 3+\ln x} = x^{\ln x^2}\cdot 3^{\ln x}\cdot 3^{\ln 3} = x^{\ln x^2}\cdot x^{\ln 3}\cdot 3^{\ln 3} = x^{\ln x^2+\ln 3}\cdot 3^{\ln 3} = x^{\ln 3x^2}\cdot 3^{\ln 3}\right)$

$x^{\ln 9x^2} = x^{\ln 3x^2}\cdot 3^{\ln 3}$

(Разделим на $x^{\ln 3x^2}\neq 0$ т.к. $x\neq 0$)

$x^{\ln 9x^2-\ln 3x^2} = 3^{\ln 3}$

$x^{\ln 3} = 3^{\ln 3}$ (прологарифмируем по осн. e)

$\cancel{\ln 3}\ln x = \cancel{\ln 3}\ln 3$

$\ln x = \ln 3$, откуда $\underline{x=3}$

(2) $\left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln x+2\ln(x-4)^2}$ т.к. $\ln(4-x)$ сущ., то $\underline{4-x>0}$

$x^{7\ln(4-x)}\cdot\left(\frac{1}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln x}\cdot x^{4\ln(4-x)}$ | разделим на $x^{4\ln(4-x)}\neq 0$ т.к. $x\neq 0$

$x^{3\ln(4-x)} = x^{2\ln x}\cdot(4-x)^{\ln(4-x)}$

$(4-x)^{\ln x^3} = x^{\ln x^2}\cdot(4-x)^{\ln(4-x)}$ | : $(4-x)^{\ln(4-x)}\neq 0$

$(4-x)^{\ln x^3-\ln(4-x)} = x^{\ln x^2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$(4-x)^{\ln\frac{x^3}{4-x}} = x^{\ln x^2}$ | прологарифмируем по осн. e

$\ln\frac{x^3}{4-x}\ln(4-x) = \ln x^2 \ln x$

$(3\ln x - \ln(4-x))\ln(4-x) = 2(\ln x)^2$

• Пусть $x \neq 1$

(*) $3\ln x \ln(4-x) - (\ln(4-x))^2 = 2(\ln x)^2 \quad \Big| : (\ln x)^2 \; (\neq 0)$

$$\frac{3\ln(4-x)}{\ln x} - \left(\frac{\ln(4-x)}{\ln x}\right)^2 = 2$$

$$3\log_x(4-x) - (\log_x(4-x))^2 = 2$$

$\log_x(4-x) = t: \quad t^2 - 3t + 2 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

$(D = 1 + 16 = 17)$

$$\left[\begin{array}{l} \log_x(4-x) = 2 \\ \log_x(4-x) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-x = x^2 \\ 4-x = x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 4 = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = 2 \end{array}\right.$$

• $x = 1$: подставим в (*): $\underbrace{3\ln 1 \ln 3}_{=0} - (\ln 3)^2 = \underbrace{2(\ln 1)^2}_{=0}$

т.к. $x = 1$ – не явл. корнем $\quad (\ln 3)^2 = 0$ – неверно

Итого решения $\left[\begin{array}{l} x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = 2 \end{array}\right.$

Изначальная совокупность принимает вид:

$\cancel{\begin{cases} x = 3 \\ y = -3x = -9 \end{cases}}$

$\cancel{\begin{cases} x = 2 \\ y = x - 4 = 2 \end{cases}}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = -3x = -9 \end{cases} (\in ОДЗ) \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = x - 4 = -2 \end{cases} ~~[illegible]~~ (\in ОДЗ) \\ \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \; (>0) \\ y = \cancel{[illegible]}\, x - 4 = \frac{-1+\sqrt{17}-8}{2} = -\frac{9+\sqrt{17}}{2} \; (<0) \end{cases} (\in ОДЗ) \\ \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \text{ – не уд. усл. } x > 0 \\ y = \ldots \end{cases} \end{array}\right.$$

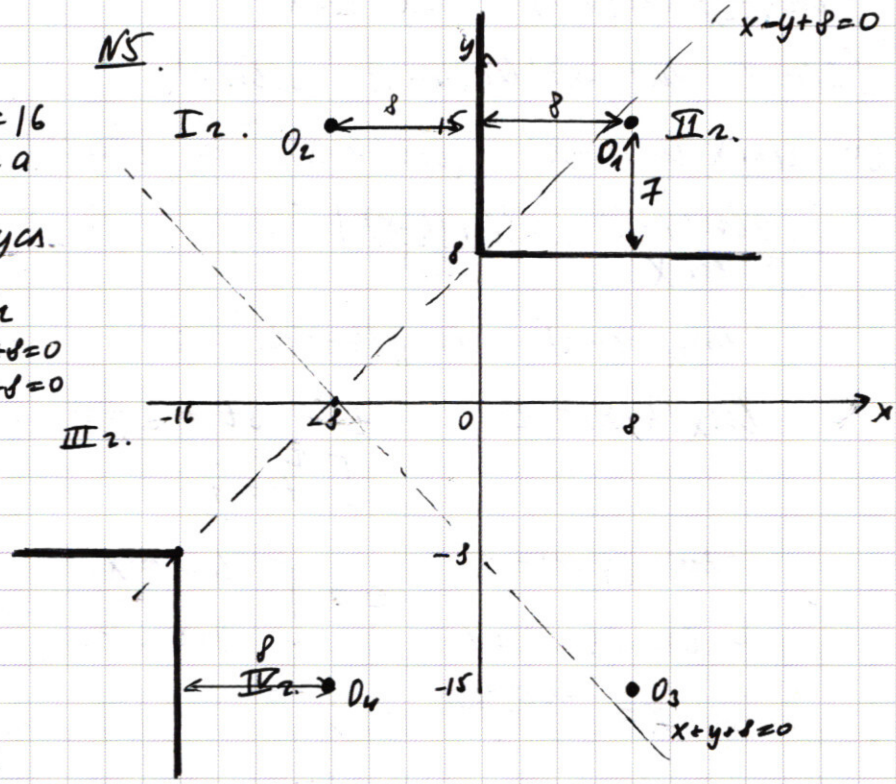
Итого:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\ y=-9\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\\ y=\dfrac{-9+\sqrt{17}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

<u>Ответ</u>: $(3;-9)$, $(2;-2)$, $\left(-\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};\ \dfrac{-9+\sqrt{17}}{2}\right)$.

<u>№5.</u>

$$\begin{cases}|x+y+8|+|x-y+8|=16\\ (|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a\end{cases}$$



Изобразим графически 1 ур. системы

Пусть знаки расставлены относительно прямых $x-y+8=0$ и $x+y+8=0$

тогда:

I г: $x+y+8+x-y+8=16$
$x=0$

II г. $x+y+8-x+y-8=16$
$y=8$

III г. $-x-y-8+x-y+8=16$
$y=-8$

IV г. $-x-y-8-x+y-8=16$
$x=-16$

Получили два „уголка".

Второе ур-е системы задает 4 окружности с центрами в точках $(8;15)$, $(-8;15)$, $(8;-15)$, $(-8;-15)$ и радиусом $\sqrt{a}$.

- заметим, что если $\sqrt{a}\geq 8$, то окружность с центром в т. O_1 имеет уже ≥ 3 точки пересечения с верхним „уголком". А нам надо чтобы система имела 2 решения $\Rightarrow$ этот вариант нас не устроит
- если же $\sqrt{a}\leq 7$, то ~~[illegible] O_1~~ ни одна из 4-х окр. не пересечет верхний и нижний „уголки", т.к. расстояния до них будут больше $\sqrt{a}$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

• значит, ~~что~~ $7 < \sqrt{a} < 8$.

тогда окружность с ц. в т. O_1 пересечет „нижнюю" сторону верхнего „уголка" ровно в 2-х точках, а „левую" сторону верхнего уголка вообще не пересечет, т.к. расстояние от центра до нее ровно 8.

Окружности с центрами O_2, O_3, O_4 не будут иметь общих точек с уголками вообще, т.к. расстояние от их центров до галочек хотя бы 8.

т.е., при $7 < \sqrt{a} < 8$ будет ровно 2 точки пересечения, а значит 2 решения. Итого $7 < \sqrt{a} < 8$, т.е. $\underline{49 < a < 64}$

Ответ: при $a \in (49; 64)$.

№1.

$$\begin{array}{r|l} 64827 & 27 \\ -54 & 2401 \\ 108 & \\ -108 & \\ 27 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2401 & 49 \\ -196 & 49 \\ 441 & \\ -441 & \\ 0 & \end{array}$$

т.е. $64827 = 27 \cdot 49 = 3^3 \cdot 49^2 = 3^3 \cdot 7^4$

т.к. никакая цифра в числе не может быть ни квадратом, ни кубом, ни 4-ой степенью семерки, ~~а~~ и никакими произв. 7 на что-то а в произведении присутствует 7^4, то в этом восьмизначном числе есть четыре цифры 7. Произведение остальных 4-х цифр равно 27, т.е. они могут быть либо ~~1,1~~ 1, 1, 3, 9 либо 1, 3, 3, 3.

Кол-во способов расставить семерки равно $C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!}$

1) Пусть остальные цифры это 1, 3, 3, 3

Кол-во способов расставить тройки на ост. места: $C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$
Единица встанет на оставшееся место.

т.е. в данном случае чисел $\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4!}\cdot\frac{4\cdot3\cdot2}{3!}\cdot1=\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}=8\cdot7\cdot5=$
$=280$

2) Пусть остальные цифры это 1, 1, 3, 9

Кол-во способов расставить единицы: $C_4^2=\frac{4\cdot3}{2!}$

На оставшиеся 2 места мы ставим 3 и 9, в каждом случае их расставить у нас 2 способа (либо 3 потом 9 либо 9 потом 3)

Итого вариантов: $\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4!}\cdot\frac{4\cdot3}{\cancel{2!}}\cdot\cancel{2}=\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}^{3}\cdot5\cdot\cancel{4\cdot3}}{1\cdot2\cdot\cancel{3\cdot4}}=40\cdot21=840$

Всего чисел: $280+840=1120$

Ответ: 1120.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

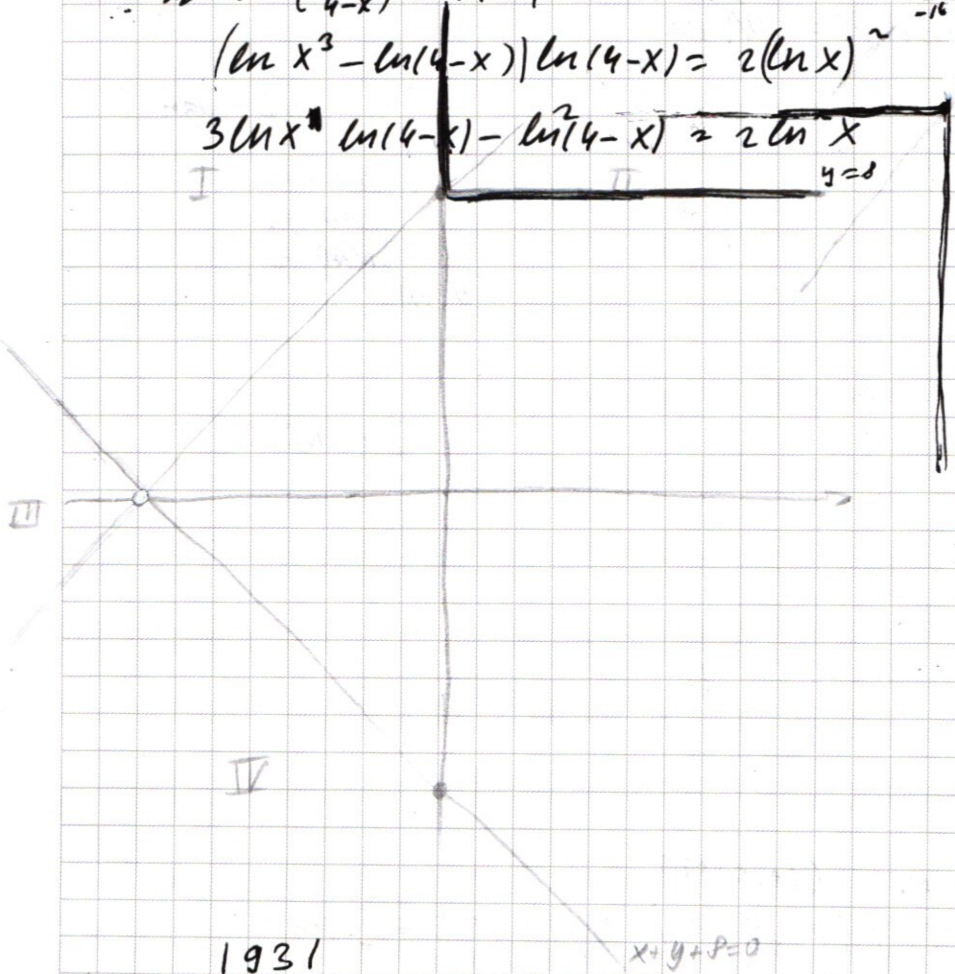
$(4-x)^{\ln x^3-\ln(4-x)}=x^{\ln x^2}$

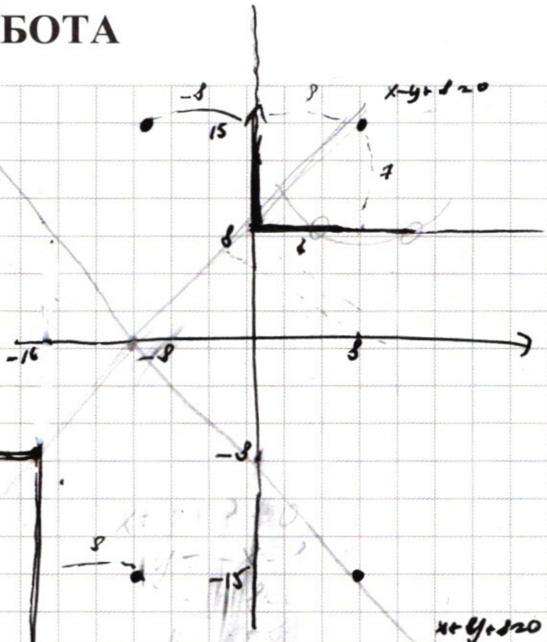
$(4-x)^{\ln\left(\frac{x^3}{4-x}\right)}=x^{\ln x^2}$

$\ln\left(\frac{x^3}{4-x}\right)\ln(4-x)=\ln x^2\ln x$

$(\ln x^3-\ln(4-x))\ln(4-x)=2(\ln x)^2$

$3\ln x\,\ln(4-x)-\ln^2(4-x)=2\ln^2 x$





$x\in I$ $x+y+8+x-y+8=16$

$x=0$

$x\in II$ $x+y+8-x+y-8=16$

$2y=16$

$y=8$

$x\in III$ $-x-y-8+x-y+8=16$

$-2y=16$

$y=-8$

$x\in IV$ $-x-y-8-x+y-8=16$

$-2x=32$

$x=-16$

$(x-8)^2+(y-15)^2=a$

I г. $(x-8)^2+(y-15)^2=a$

$(8;15)$ радиус $\sqrt{a}$

$\sqrt{a}\geq 8$ – IV

$7\leq\sqrt{a}<8$

$\sqrt{a}\leq 7$

$7<\sqrt{a}<8$

$49<a<64$

1931

1333

1139

1333

~~2.27~~

7777

$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4!}$ – четверки

① 1333 $\frac{4\cdot3\cdot2}{3!}$ – тройки

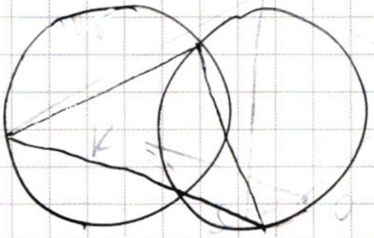
② $\frac{4\cdot3}{2!}$ – един. 2.

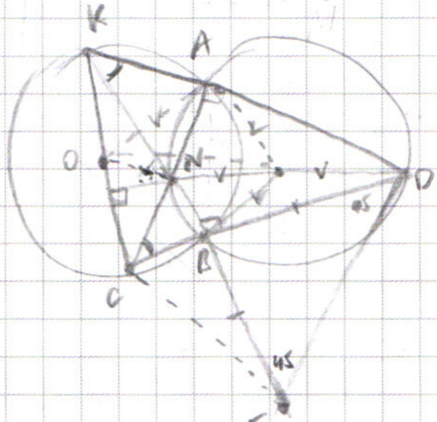
$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4!}\cdot\frac{4\cdot3\cdot2}{3!}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

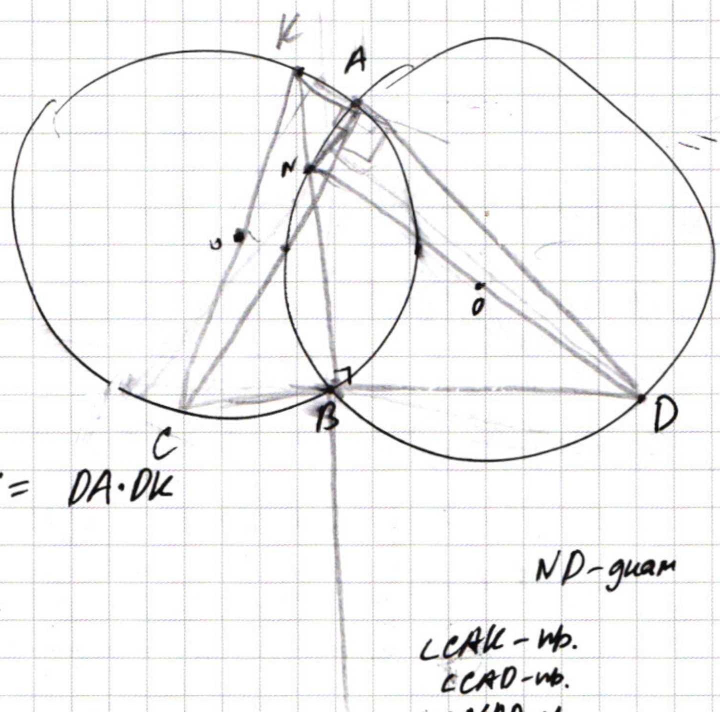
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

КАD-вп





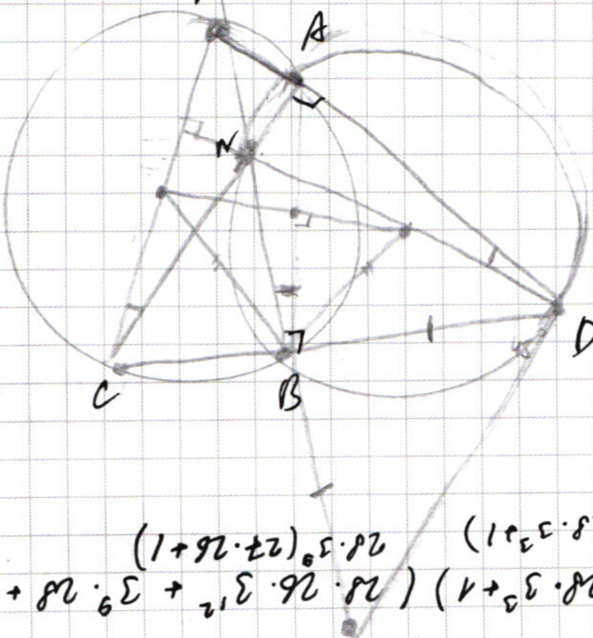
KC=ND



BD·DC= DA·DK

ND-диам

∠CAK-вп.
∠CAD-вп.
∠NAD-вп.
N∈AC



KC=ND

$y > 3^x + 4\cdot 3^{28}$

$y \le 3\cdot 31 + 3(3^{27}-1)x$

$3^{27}-1 = (3^9)^3 - 1^3 = (3^9-1)(3^{18}+3^9+1) = (3^3-1)(3^6+3^3+1)(3^{18}+3^9+1) = (3-1)(3^2+3+1)(3^6+3^3+1)(3^{18}+3^9+1)$

$3^6-3^3 = 3^3(3^3-1) = 3^3\cdot 26$

$3^x+4\cdot 3^{28} < 3\cdot 31 + 3(3^{27}-1)x$

$3^x+4\cdot 3^{28} < 3\cdot 31 + 3\cdot 2\cdot 13\cdot(3^3(3^3+1)+1)(3^9(3^9+1)+1)$ $\quad 3^3(3^3+1)+1$

$3^x+4\cdot 3^{28} < 3\cdot 31 + \cancel{6\cdot 13\cdot 28\cdot 37}$ $6\cdot 13\cdot(3^3\cdot(3+1)(3^2-3+1)+1)(3^9\cdot(3^3+1)(3^6-3^3+1)+1)$

$3^x+4\cdot 3^{28} < 3\cdot 31+6\cdot 13\cdot(3^3\cdot 4\cdot 7+1)(3^9\cdot 28\cdot(3^3\cdot 26+1)+1)$

$3^x+4\cdot 3^{28} < 3\cdot 31+6\cdot 13\cdot(28\cdot 3^3+1)(28\cdot 26\cdot 3^{12}+3^9\cdot 28+1)$

$(28\cdot 3^3+1)$ $\quad 28\cdot 3^9(27\cdot 26+1)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\overline{abcdefgh}$ $abcdefgh = 64827 = 3^3 \cdot 2401 = 27 \cdot 49^2 = 3^3 \cdot 7^4$

$64827 : 27 = 2401$; $64827 : 3 = 21609$; $21609 : 9 = 2401$

$51 \cdot 51 = 2601$; $49 \cdot 49 = 2401$

777793

777739 и т.д.

$\sqrt{2}\sin(7x+\frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\sin(3x-\frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\sin(7x+\frac{\pi}{4}) - \sin(3x-\frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$

$2\sin\frac{4x+\frac{\pi}{2}}{2}\cos 5x + \cos 4x = 0$

$2\sin(2x+\frac{\pi}{4})\cos 5x + \cos 4x = 0 \quad | \cdot \cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$\sin(4x+\frac{\pi}{2})\cos 5x = -\cos 4x \cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$\cos(\frac{\pi}{2}-4x)$

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\sqrt{2}\sin(7x+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\cdot\cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 7x + \cos 7x$

$\sqrt{2}\sin(3x-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\cos 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 3x - \cos 3x$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\sin(7x+\frac{\pi}{4}) = \sin(3x-\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{2}-4x)$

$\sin(7x+\frac{\pi}{4}) = 2\sin\left(\frac{4x-\frac{3\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)$

$2\sin(3,5x+\frac{\pi}{8})\cos(3,5x+\frac{\pi}{8})$

$2\cos 5x\cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x =$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) = 2\sqrt{2}\cos 5x \sin(2x+\frac{\pi}{4})$

$y^2 + 2xy + x^2$

$\cancel{(y+x)^2}\ \cancel{2}4x^2\ \cancel{+}12x + \cancel{4y} = 0$

$(y+2)^2 + \cancel{\ldots} \quad (2x+3)^2$

$y^2 + 2y(x+2) - 3x^2 + 12x = 0$

$D = (x+2)^2 + 3x^2 - 12x = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2$

$y = -x-2 \pm (2(x-1)) = \left[\begin{array}{l} -x-2+2x-2 = x-4 \\ -x-2-2x+2 = -3x \end{array}\right.$

① $\left(-\frac{x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x(x-4)^2)}$

$\left(-\frac{x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = \left(x^{\cancel{\ln x + 2\ln(4-x)}}\right)^2 = (x^2)^{\ln x} \cdot (x^4)^{\ln(4-x)}$

$\left(-\frac{x^3}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln x} = x^{\ln x} \cdot x^{\ln x}$

$\frac{-x^{3\ln(4-x)}}{(x-4)^{\ln(4-x)}}$ $\quad -x^{3\ln(4-x)} = x^{2\ln x} \cdot (x-4)^{\ln(4-x)}$

$\cancel{\ldots}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\frac{7x}{2} = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{8} + \pi k$

$\frac{7x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi k$

$x = \frac{6\pi}{56} + \frac{2\pi k}{7}$

$\frac{3x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi l$

$x = \frac{10\pi}{24} + \frac{2\pi l}{3}$

$\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$y=-3x$

$x>0$
$y<0$

1

$$\left(\frac{-x^7}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(x\cdot 9x^2)}$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$x^{\ln(9x^3)} = x^{2\ln 3+\ln x^3}$$

$$x^{6\ln(3x)}\cdot\frac{1}{3^{\ln(3x)}} = \cancel{x^{2\ln 3+3\ln x\,2}}$$

$$x^{6\ln 3+6\ln x}\cdot\frac{1}{3^{\ln 3+\ln x}} = \left(x^{2\ln 3+3\ln x}\right)^2$$

$3^{\ln 3}\cdot 3^{\ln x}$

$3^{\ln 3}\cdot x^{\ln 3}$

$\ln 81x^4+\ln x^2$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{\ln(81x^6)}$$

$= \cancel{x^{\ln(3x)}+\ln(\ldots)}$

$= x^{4\ln(3x)}\cdot x^{\ln(x^2)}$

$\cancel{\frac{x^6}{3}}\ 7$

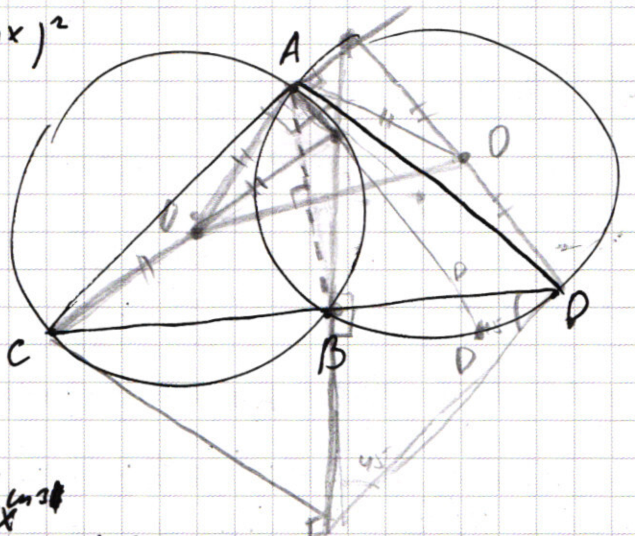
$$\left(\frac{x^2}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{\ln(x^2)}$$

$$x^{2\ln 3x} = x^{\ln(x^2)}\cdot 3^{\ln 3x}$$

$$\ln 3x\,\ln\left(\frac{x^2}{3}\right) = \ln(x^2)\ln x$$

$\cancel{\ln 3x\ \ln}$

$$(\ln 3+\ln x)\ln\left(\frac{x^2}{3}\right) =$$



$$3^{\ln 3x} = 3^{\ln 3+\ln x} = 3^{\ln 3}\cdot 3^{\ln x}$$

$$x^{2\ln 3x} = x^{\ln x}\cdot 3^{\ln 3x}$$

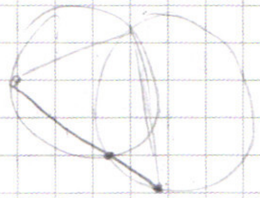
$3^{\ln 3}\cdot x^{\ln 3}$

$$x^{2\ln 3x} = x^{2\ln x+\ln 3}\cdot 3^{\ln 3}$$

$$x^{2\ln 3x} = x^{\ln(3x^2)}\cdot 3^{\ln 3}$$

$$x^{\ln 9x^2-\ln 3x^2} = 3^{\ln 3}$$

$x^{\ln 3}$



$$\ln 3\ln x = \ln 3\ln 3$$

$$x^{7\ln(4-x)}\cdot\left(\frac{1}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln x+4\ln(4-x)}$$

$$x^{\ln(4-x)^3-\ln x^2} = x^{\ln\left(\frac{(4-x)^3}{x^2}\right)} = \cancel{x^{2\ln x}}$$

$(4-x)^{\ln(4-x)}$

$$x^{\ln(4-x)^3-\ln x^2} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$\left(\frac{(4-x)^3}{x^2}\right)^{\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$x^{\ln\left(\frac{(4-x)^3}{x^2}\right)} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$(4-x)^{3\ln x} = x^{2\ln x}\cdot(4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$\ln\left(\frac{(4-x)^3}{x^2}\right)\ln x = (\ln(4-x))^2$$

$$(4-x)^{3\ln x-\ln(4-x)} = x^{\ln x^2}$$

$$\ln(4-x)^3\ln x-\ln x^2\ln x$$

$$(4-x)^{\ln\frac{x^3}{4-x}} = x^{\ln x^2}$$

$$\cancel{\ln x}\ \ln\frac{x^3}{4-x}\,\ln(4-x) = \ln x^2\ln x$$

$$(3\ln x-\ln(4-x))\ln(4-x) = \ln x^2\ln x$$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)