

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 16$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$64827 = 7 \cdot 4^3$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 49 \\ \times 4 \\ \hline 343 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3^2 \\ 343 \\ \times 4 \\ \hline 2401 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 2401 \\ \times 27 \\ \hline 16807 \\ 4802 \\ \hline 64827 \end{array}$$

7 и 3 - простые числа  $\rightarrow$  каждое  
подходящее восьмизначное  
число должно содержать

4 семерки и 3 тройки (и одну  
единицу)

или 4 семерки, одну девятку,  
одну тройку (и две единицы)

1) Рассмотрим первый вариант ( $7 \times 4$ ;  $3 \times 3$ ;  $1 \times 1$ ):

Расставим четыре семерки на восемь доступных  
мест:

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 70 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{како-то} \\ \text{вариантов} \end{array} \right.$$

Теперь расставим три тройки на месте  
оставшихся мест:

$$C_4^3 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4 \quad \left( \begin{array}{l} \text{расположение единицы} \\ \text{теперь фиксировано} \end{array} \right)$$

Всего вариантов, когда число состоит из четырех  
семерок, трех троек, одной единицы:

$$N_1 = C_8^4 \cdot C_4^3 = 280$$

2) Рассмотрим второй вариант ( $7 \times 4$ ;  $9 \times 1$ ;  $3 \times 1$ ;  $1 \times 2$ )

Также снова расставим семерки на восемь

допустимых мест:

$$C_8^4 = 70$$

Теперь расставим одну девятку на 4 оставшихся места:

$$C_4^1 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

Теперь расставим одну тройку на 3 оставшихся места:

$$C_3^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3. \quad (\text{помещение двух единиц теперь фиксировано})$$

Всего вариантов, когда число состоит из четырёх семерок, двух единиц, одной тройки, одной девятки:

$$N_2 = C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 840.$$

Общее количество вариантов:  $\sum N = N_1 + N_2 = 1120$

Ответ: 1120

Задача 2.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos(5x+2x) + \cos(5x-2x) + \sin(5x+2x) - \sin(5x-2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

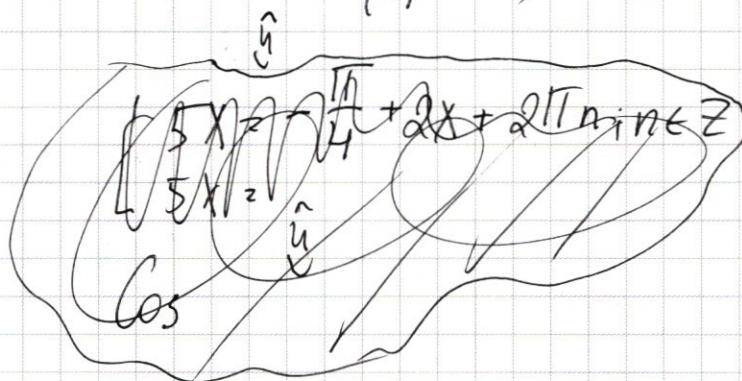
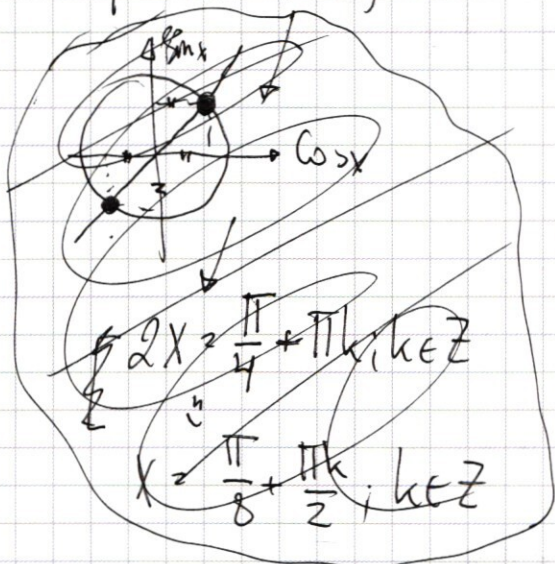
$$(\cos 2x + \sin 2x) \cdot 2 \left( \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = \cos \left( \frac{\pi}{4} + 2x \right)$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (\cos 5x + \cos \left( \frac{\pi}{4} + 2x \right)) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) = 0 \text{ или } \cos 5x = -\cos \left( \frac{\pi}{4} + 2x \right)$$



$$\cos 2x + \sin 2x = 0 \quad (1)$$

$$\cos 5x + \cos \left( \frac{\pi}{4} + 2x \right) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \cos 2x = \sin(\pi - 2x)$$

$$\sin(\pi - 2x) = \sin(-2x)$$

$$\pi - 2x = -2x + 2\pi k \Rightarrow \emptyset (k \in \mathbb{Z})$$

$$\pi - 2x = \pi + 2x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4x = -2\pi k \Rightarrow x = -\frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

~~$$4x = \pi + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$~~

$$(1) \cos 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \cos 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{matrix}$$

$$1 + \tan 2x = 0$$

$$\tan 2x = -1 \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\downarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \cos 5x + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$$

$$\cos\left(\underbrace{\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{8}}_{\alpha} + \underbrace{\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}}_{\beta}\right) + \cos\left(\underbrace{\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{8}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}}_{\beta}\right) = 0$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\left[ \cos\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \right.$$

$$\left. \cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \right]$$

$$\left[ \begin{aligned} \frac{5}{2}x + \frac{\pi}{8} &= \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} &= \frac{\pi}{2} + \pi m; m \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right]$$

$$\left[ \begin{aligned} x &= \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi m; m \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right]$$

Ответ:

$$\left[ \begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi m; m \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right]$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} 2\ln 3 &= \ln(3x) \\ \ln x \cdot 2\ln 3 &= \ln 3 \cdot \ln(3x) \\ 2\ln x &= \ln(3x) \\ 2\ln x &= \ln 3 + \ln x \\ \ln x &= \ln 3 \Rightarrow x = 3. \Rightarrow y = -9 \end{aligned}$$

$$(1) \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

Трансформировав (1) по  $e$ :

$$\ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) \ln(-y) = 2\ln(xy^2) \cdot \ln x$$

Подставим  $y = -3x$ :

$$\ln\left(\frac{x^7}{3x}\right) \ln(3x) = 2\ln(9x^3) \ln(x)$$

$$(\ln 3 + \ln x) / (\ln x - \ln 3) = 2\ln x \cdot (2\ln 3 + 3\ln x)$$

$$\ln 3 = a; \ln x = b$$

$$(a + b) / (b - a) = 2b(2a + 3b)$$

$$7ab - a^2 - ab + 7b^2 - ab - b^2 = 4ba + 6b^2$$

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

$$D = b^2 + 4b^2 = 5b^2 \Rightarrow$$

$$a = \frac{b \pm \sqrt{5}b}{2}$$

$$\ln x = \frac{\ln 3 \pm \sqrt{5} \ln 3}{2}$$

Задача 3.

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \quad (1)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad (2)$$

$$\ln(-y) \Rightarrow y < 0$$

$$\ln(xy^2) \Rightarrow x \geq 0$$

$$(2) \quad y^2 + 2(2+x)y + 12x - 3x^2 = 0$$

$$\Delta = 4(2+x)^2 - 4(12x - 3x^2) = 16 + 16x + 4x^2 - 48x + 12x^2 = 16x^2 - 32x + 16 = 16(x-1)^2$$

$$y = \frac{-4 - 2x \pm 4(x-1)}{2} \rightarrow y = x-4$$

$$\rightarrow y = -3x$$

~~Рассмотрим случай, когда  $y = -3x \Rightarrow (x \neq 0)$~~

~~$$\left(-\frac{x^7}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$$~~

~~$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$$~~

~~Прологарифмируем по  $x$ . ( $x \neq 1$ , т.к. иначе:  $x > 0$ , т.к.  $y < 0$ )~~

~~$$\log_x\left(\frac{x^6}{3}\right) \cdot \ln(3x) = \log_x(x) \cdot 2\ln(9x^3) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\ln 3} = 1 \rightarrow \ln(3) \cdot \frac{1}{3}$$~~

~~$$(\log_x x^6 - \log_x 3) \ln 3x = 2(\ln 9 + 3\ln x)$$~~

~~неверно~~

~~$$x^{6\ln(3x)} = 3^{\ln(3x)} \cdot x^{2\ln(9x^3)}$$~~
~~$$x^{6\ln 3 + 6\ln x} = 3^{\ln 3 + \ln x} \cdot x^{2\ln 9 + 6\ln x}$$~~

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ:  $(3; -9)$ ;  $(2; -2)$ ;  $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2}\right)$

Задача 5.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-8)^2 + (y-15)^2 = a, \quad a \geq 0 & (2) \\ \end{cases}$$

(2): при  $x \geq 0; y \geq 0$ :  $(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$

(окружность (центр  $(8; 15)$ )  
и радиусом  $\sqrt{a}$ )

при  $x < 0; y < 0$ :  $(x+8)^2 + (y+15)^2 = a$

(центр:  $(-8; -15)$ ;  $r = \sqrt{a}$ )

при  $x \geq 0; y < 0$ :  $(x-8)^2 + (y+15)^2 = a$

(центр:  $(8; -15)$ ;  $r = \sqrt{a}$ )

при  $x < 0; y \geq 0$ :  $(x+8)^2 + (y-15)^2 = a$

(центр:  $(-8; 15)$ ;  $r = \sqrt{a}$ )

(1)  $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

при  $\begin{cases} y \geq -8-x \\ y \leq 8+x \end{cases}$

$2x+16 = 16 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y \in [-8; 8]$

при  $\begin{cases} y \leq -8-x \\ y \geq 8+x \end{cases}$

$-2x-16 = 16 \Rightarrow -2x = 32$   
 $x = -16 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in [-8; 8]$

~~$$\frac{\ln 3 \pm \sqrt{5} \ln 3}{2} = x \Rightarrow y = -3e^{\frac{\ln 3 \pm \sqrt{5}}{2}}$$~~

~~$$6ab - a^2 - 6a + 6b^2 - ab - b^2 = 4ab + 6b^2 - a^2 - 6a$$

$$= a^2 - b^2$$~~

$$(a+b)(6b-a) = 2b(2a+3b)$$

$$6ab - a^2 + 6b^2 - ab = 4ba + 6b^2$$

$$ab = a^2 \Rightarrow a(b-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \Rightarrow \emptyset \\ b=a \Rightarrow \ln 3 = \ln x \end{cases}$$

$$x=3 \Rightarrow y=-9$$

Подставим  $y = x-4$ :

$$\ln\left(1 + \frac{x}{4-x}\right) \ln(4-x) = 2 \ln(x(4-x)^2) \cdot \ln x$$

$$(4 \ln x - \ln(4-x)) \ln(4-x) = 2 \ln x (\ln x + 2 \ln(4-x))$$

$$\ln(4-x) = b; \ln x = c$$

$$(4c - b)b = 2c(c + 2b)$$

$$4cb - b^2 = 2c^2 + 4cb \Rightarrow$$

$$b^2 - 3cb + 2c^2 = 0$$

$$D = 9c^2 - 8c^2 = c^2$$

$$b = \frac{3c \pm c}{2} \Rightarrow b = 2c \text{ or } b = c$$

$$b=c \Rightarrow 4-x=x$$

$$2x=4$$

$$x=2 \Rightarrow y=-2$$

$$b=2c \Rightarrow \ln(4-x) = 2 \ln x$$

$$4-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} - 4 = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} < 0$$

$$m.k x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

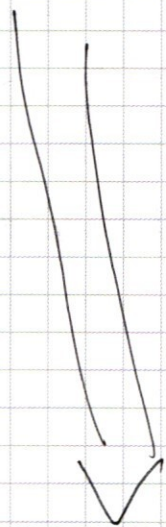
при  $\begin{cases} y \geq -8 - x \\ y \geq 8 + x \end{cases} : \begin{aligned} &\cancel{x} + y + \cancel{8} - \cancel{x} + y - \cancel{8} = 16 \\ &2y = 16 \Rightarrow y = 8 \end{aligned}$

$$\begin{cases} 8 \geq -8 - x \Rightarrow x \geq -16 \\ 8 \geq 8 + x \Rightarrow x \leq 0 \end{cases}$$

при  $\begin{cases} y \leq -8 - x \\ y \leq 8 + x \end{cases} : \begin{aligned} &\cancel{-x} - y - \cancel{8} + \cancel{x} - y + \cancel{8} = 16 \\ &-2y = 16 \Rightarrow y = -8 \end{aligned}$

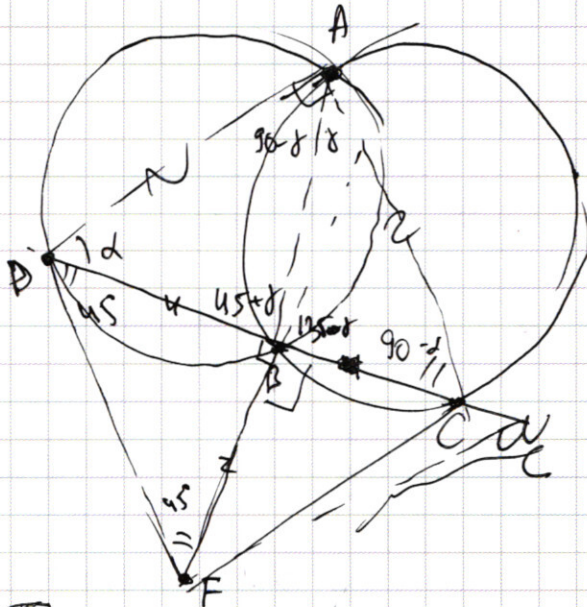
$$\begin{cases} -8 \leq -8 - x \Rightarrow x \leq 0 \\ -8 \leq 8 + x \Rightarrow x \geq -16 \end{cases}$$

Построим границы найденных промежутков и  
открытости:



(продолжение на стр. 10)

Задача 6.



$$R = 17$$

CF = ?

$$\begin{aligned} \angle ADC &= \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle ACB &= 90 - \alpha \\ (\text{так } \angle DAC &= 90^\circ, \text{ а } \sum \text{ углов } \triangle \text{ равен } 180^\circ) \end{aligned}$$

По двум треугольникам  $\triangle ABD$ :  $2R = \frac{AB}{\sin \alpha}$ .

$\triangle ABC$ :  $2R = \frac{AB}{\sin(90 - \alpha)}$

$$\cos \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$\Rightarrow \triangle DAB \sim \triangle ACB \Rightarrow$   
 $\angle ADB = \angle ABC = 90^\circ$   
 $\angle ABD = \angle ACB = 45^\circ$

AB - медиана к гипотенузе  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  равна  $\frac{1}{2}$  гипотенузы

$$AB = BD$$

$$2R = \frac{BD}{\sin(45^\circ)} \Rightarrow BD = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 2R = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF = 4 \cdot 17 = 68$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

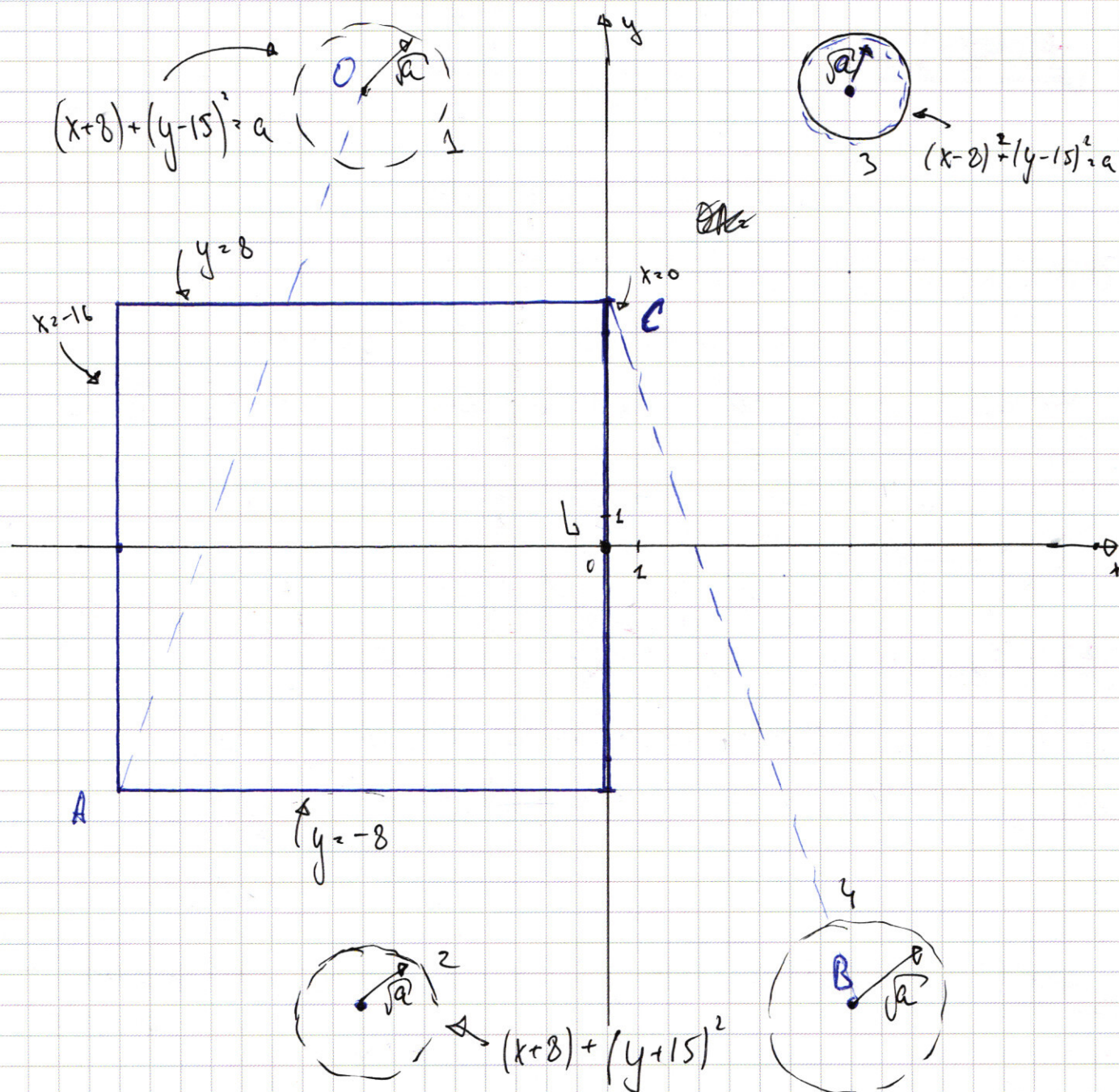
Окружности 1 и 2 пересекают заданный квадрат  
( $\sqrt{a} > OA$ ), а окружности 3 и 4 будут его  
"касаться" на ~~пр~~ на прямой  $OK \Rightarrow \sqrt{a} \leq BC$

$$OA = \sqrt{23^2 + 8^2} = \sqrt{593}$$

$$BC = \sqrt{\quad}$$

Окружности 1 и 2 пересекут квадрат  $b$   
тогда,  $b$  которых ~~а~~ так же пересекут его  
окружности 3 и 4.  $\Rightarrow \sqrt{a} = OB \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$   
 $\downarrow$   
 $a = 289$

Ответ: система имеет ровно 2 решения при  $a = 49$   
и  $a = 289$



Из графика понятно, что 2 решения системы  
будет иметь, когда  $a \neq 7 \Rightarrow a \geq 49$ ,

~~а также  $a = 7$~~

Из графика видно, что система будет иметь  
2 решения, когда окружности 1 и 2 касаются  
квадрата ( $a \neq 7 \Rightarrow a \geq 49$ ), а также когда

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AD = AC$  (так как потому что  $\alpha = 45^\circ$ )  $\triangle DAC$  —  
равнобедренный.

$$2R = \frac{AB}{\sin \alpha} \Rightarrow AB = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot 17 = \frac{68}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} DF = \sqrt{2} \cdot DB \\ DC = DB + BC \end{cases}$$

По т. Пифагора:  $DC = \sqrt{2} \cdot AD$

$$\triangle DFB \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{DC}{DF} = \frac{DB}{DA} \quad \frac{DB}{DA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{BC}{DB}\right)$$

По теореме косинусов для  $\triangle DAB$ :

$$AB^2 = DB^2 + AD^2 - 2AD \cdot DB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad DB = \frac{DA}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{BC}{DB}\right)$$

$$\frac{68^2}{2} = DB^2 + AD^2 - \sqrt{2} AD \cdot DB$$

$$\frac{68^2}{2} = \frac{DA^2}{2} \left(1 + \frac{BC}{DB}\right)^2 + AD^2 - \sqrt{2} AD^2 \cdot \left(1 + \frac{BC}{DB}\right)$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~2 cos x (2 cos x)~~

$$\cos 2x + \sin 2x = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 =$$

$$= \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x - 2 \sin^2 x =$$

$$= (\cos x + \sin x)^2 - 2 \sin^2 x = (\cos x + \sin x - \sqrt{2} \sin x) (\cos x + \sin x + \sqrt{2} \sin x)$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos 2x + \sin 2x)$$

$\sqrt{3}$

$$\left( -\frac{x^7}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + 2y(x+2) - 3x^2 + 12x$$

$$D = 4(x+2)^2 - 4(-3x^2 + 12x) =$$

$$= 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x =$$

$$= 16x^2 + 16 - 32x = 16(x^2 - 2x + 1) =$$

$$16(2x^2 - 4x + 4) = 16(x-1)^2$$

$$= 8(2x^2 - 4x)$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ -16 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$-4 - 2x + 4x - 4 = -8 + 2x$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right) \ln(-y) = x^2 \ln(xy^2) \quad y > 0$$

$$-y > 0 \Rightarrow y < 0$$

$$xy^2 > 0 \Rightarrow x > 0$$

при  $x=1$ :  $y = -3$   
 $y = -3$

$$180 - 45 - 1 = 134$$

$$180 - 45 - 90 = 45$$

$$\left(-\frac{1}{-3}\right) \ln(3) = 1 \cdot 2 \ln(3)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right) \ln(3) = 1 \Rightarrow \ln(3) = 0 \Rightarrow \text{неверно}$$

$$\ln(-y) \cdot (\ln(x^7) - \ln(y)) = \ln(x^7) + \ln(y^2)$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right) \ln(-y) = x^2 \ln(xy^2)$$

$$\ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) \ln(-y) = \ln(x) \cdot 2 \ln(xy^2)$$

$$\ln\left(+\frac{3^7}{3^2}\right) \ln 9 = \ln(3) \cdot 2 \ln(3^3)$$

$$\ln(3^5) \cdot \ln(3^2) = \ln(3) \cdot 2 \ln(3^3)$$

$$10 \ln(3) = 10 \ln(3)$$

$$\left(\frac{x^7}{y}\right) \ln(-y) \cdot (-y) = x^2 \ln(xy^2)$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$(x+8)^2 + (y+8)^2 = a \Rightarrow a \geq 0$$

~~Сравнение~~

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

$$|x| + |x+16| \geq 16$$

0 + 10 + 6

$$-8 + 16 \geq -8$$

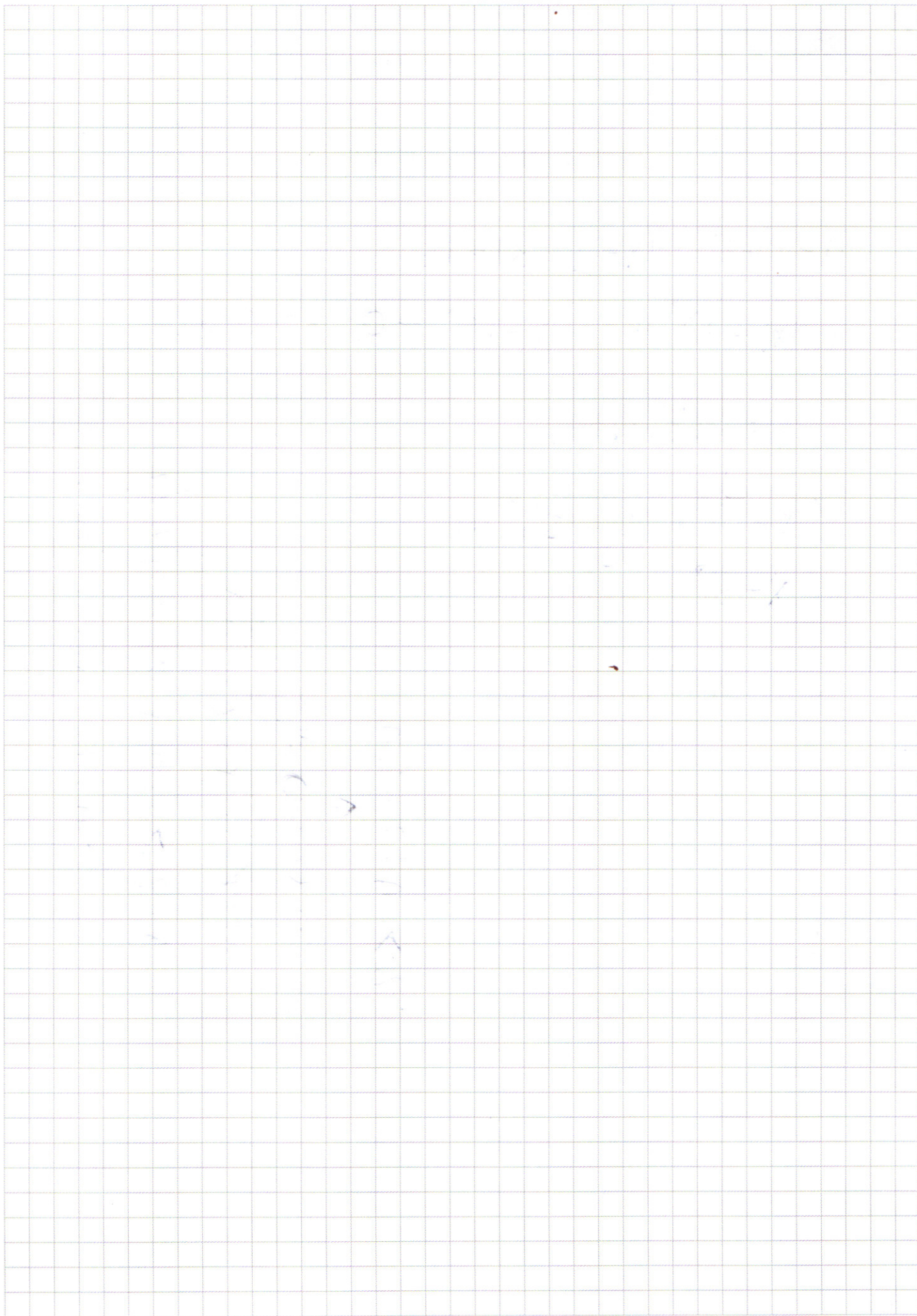
$$y > -8; y < 8$$

$$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$x+y+8 \geq 8-x-y+8 \Rightarrow x+y \geq -8-x-y$$

$$2x+y \geq -8-x-y \Rightarrow 3x+y \geq -8$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| \geq 16$$



☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten calculations on grid paper:

**Top Left:** Long division of 64827 by 13, result 498.

**Top Middle:** Multiplication of 13 by 4, result 52.

**Top Right:** Multiplication of 13 by 8, result 104.

**Middle Left:** Long division of 64827 by 7, result 9261.

**Middle Center:** Long division of 9261 by 7, result 1323.

**Middle Right:** Long division of 9261 by 11, result 841.

**Bottom Left:** Long division of 9261 by 9, result 1029.

**Bottom Center:** Long division of 64827 by 9, result 7203.

**Bottom Right:** Long division of 4203 by 7, result 600.

**Equations and Formulas:**

- $7 \cdot 9261 = 7 \cdot 3 \cdot 3087 = 7 \cdot 3^2 \cdot 1029$
- $= 7 \cdot 3^3 \cdot 343$
- $C_8^3 \cdot C_4^4$
- $C_8^3 \cdot C_5^4$
- $3^2 \cdot 7 \cdot 1029 = 7 \cdot 3^3 \cdot 343 = 49 \cdot 7^2 \cdot 3^3 = 7^3 \cdot 3^3$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring various calculations, diagrams, and geometric constructions.

**Top Left:** A large blue oval contains a complex diagram with numbers 1, 2, 3, 4, 7, and arrows. Above it, the expression  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  is written, along with  $C^{\frac{1}{2}}$ .

**Top Center:** The number 22 is written. Below it, the binomial coefficient  $C_6^3 = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$  is calculated. To the right, the value 36.5 is noted.

**Top Right:** A small circle with points on its circumference is labeled  $\cos x$ . To its right, the expression  $2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{2}$  is written.

**Middle Left:** A diagram shows a circle with points on its circumference, labeled with numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Below it, the expression  $\cos x = \frac{1}{2}$  is written.

**Middle Center:** A diagram shows a circle with points on its circumference, labeled with numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Below it, the expression  $\sin x = \frac{1}{2}$  is written.

**Middle Right:** A diagram shows a circle with points on its circumference, labeled with numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Below it, the expression  $\cos x = \frac{1}{2}$  is written.

**Bottom Left:** A diagram shows a circle with points on its circumference, labeled with numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Below it, the expression  $\sin x = \frac{1}{2}$  is written.

**Bottom Center:** A diagram shows a circle with points on its circumference, labeled with numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Below it, the expression  $\cos x = \frac{1}{2}$  is written.

**Bottom Right:** A diagram shows a circle with points on its circumference, labeled with numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Below it, the expression  $\sin x = \frac{1}{2}$  is written.

$$C_8^4 \cdot C_4^3$$

$$C_8^3 \cdot C_5^4$$



$$40 - 4 = 36$$

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

$$\cos 2x = -\sin x$$

$$\tan 2x = -1$$

$$C_4^3 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

$$\frac{582}{49} + \frac{51}{51} = \frac{582}{49} + 1 = \frac{631}{49}$$



$$\frac{565}{49} + \frac{51}{51} = \frac{616}{49}$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$\cos x < \sin x$$

$$C_5^4 = \frac{5!}{4!} = 5$$

$$m - x = \frac{2}{-8 + x^2 - 4} - 2$$

$$\frac{56}{95} \times \frac{5}{280}$$

$$\frac{565}{94} + \frac{51}{51} = \frac{616}{94}$$

$$\frac{8}{11} - \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{8}{11} - \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{11} - \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{11} - \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{11} - \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(5x) = \cos(2x + 3x) = \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x$$

$$\cos(5x) = \cos(2x + 3x) = \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

$$\frac{565}{49} + \frac{51}{51} = \frac{616}{49}$$

$$\frac{565}{94} + \frac{51}{51} = \frac{616}{94}$$