

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$64827 = 3^3 \cdot 7^4$. Тогда есть два варианта

1) В числе 4 селёры, 3 тройки и 1 единица. Кол-во таких чисел равно:

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!}$$

2) В числе 4 селёры, одна тройка, 1 двойка и 2 единицы.

Кол-во таких чисел

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!}$$

~~$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8!}{4!} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \left(\frac{1+3}{6} \right) =$$~~

$$= 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 20 \cdot 7 \cdot 8 = 20 \cdot 56 = 1120$$

Ответ: 1120

№2

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$(\cos 4x + \sin 4x) + (\cos 3x - \sin 3x) + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

~~$$\sqrt{2} \cdot \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$~~

~~$$\sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) + \cos 4x = 0$$~~

$$\sqrt{2} \cdot \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cdot \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$

$$\sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cdot \cos \left(\frac{4x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} - x}{2} \right) = 0$$

$$2 - \sin\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - x}{2}\right) = 0$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) + \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - x}{2}\right)\right) = 0$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) + \sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + x}{2}\right)\right) = 0$$

$$4 \cdot \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{8x + \pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{6x - \frac{\pi}{2}}{4}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{6x - \frac{\pi}{2}}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n & n \in \mathbb{Z} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi k & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{6x - \frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi m & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi m \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}; -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2};$$

$$\frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi m; n, k, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x+7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2(\ln(xy^2))} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\begin{aligned} D_y &= (2x+4)^2 + 12x^2 - 48x = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x = \\ &= 16x^2 - 32x + 16 = 16(x^2 - 2x + 1) = (4(x-1))^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-2x-4 \pm 4(x-1)}{2} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= \frac{-2x-4+4x-4}{2} = x-4 \\ y_2 &= \frac{-2x-4-4x+4}{2} = -3x \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3 (Продолжение)

$$\left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \quad (y < 0; x > 0)$$

$$e^{\ln\left(-\frac{x^4}{y}\right) \cdot \ln(-y)} = e^{2\ln(x) \cdot \ln(xy^2)}$$

$$\Rightarrow \ln\left(-\frac{x^4}{y}\right) \cdot \ln(-y) = 2\ln(x) \cdot \ln(xy^2)$$

$$(4\ln x - \ln(-y)) \cdot \ln(-y) = 2\ln x (\ln x + 2\ln y)$$

Пусть $\ln x = a$ $\ln(-y) = b$

Тогда $(4a - b)b = 2a(a + 2b)$

$$4ab - b^2 = 2a^2 + 4ab \Rightarrow 2a^2 - 3ab + b^2 = 0.$$

Если $a = 0$, то $b = 0 \Rightarrow x = e; y = -e$, но

они не удовлетворяют второму уравнению $\Rightarrow a \neq 0$

Тогда поделим на a^2 : $2 - 3\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0$. Пусть $\frac{b}{a} = t$

$$2 - 3t + t^2 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

① $t = 1 \Rightarrow \ln x = \ln(-y) \Rightarrow x = -y$

Тогда а) $y = -x \Rightarrow y = -3y \Rightarrow y = 0$. не подходит

б) $y = x + 4 \Rightarrow 2y = -4 \Rightarrow y = -2; x = 2$

② $t = 2 \Rightarrow 2\ln x = \ln(-y) \Rightarrow -y = x^2$

2) $-y = x^2$

а) $y = -3x \Rightarrow x^2 = 3x \Rightarrow x(x-3) = 0$

$x=0$ не подходит, $x=3$; $y=-9$

б) $y = x-4 \Rightarrow x^2+x-4=0$

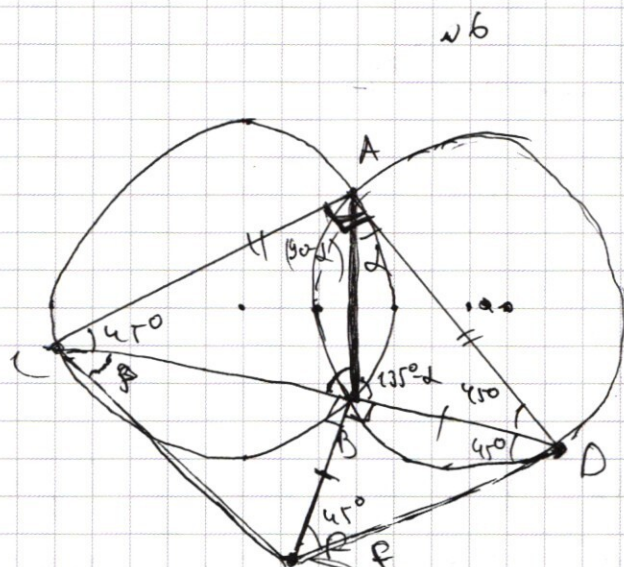
$D = 1+16=17$

$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. П.ч. $x > 0$, то $x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

Тогда $y = \frac{\sqrt{17}-9}{2}$.

Ответ: $(2; -2)$; $(3; -9)$; $(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$BD = 2R \cdot \sin \alpha$$

$$BC = 2R \cdot \sin(90^\circ - \alpha) =$$

$$= 2R \cdot \cos \alpha$$

34

16

$$\sin \alpha = \frac{15}{17}$$

$$BD = \frac{2R \cdot 15}{17} = 30$$

$$BC = 16$$

$\beta =$

CF

$$BC = 16$$

$$BC = 2R \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{16}{34} = \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{8}{17}$$

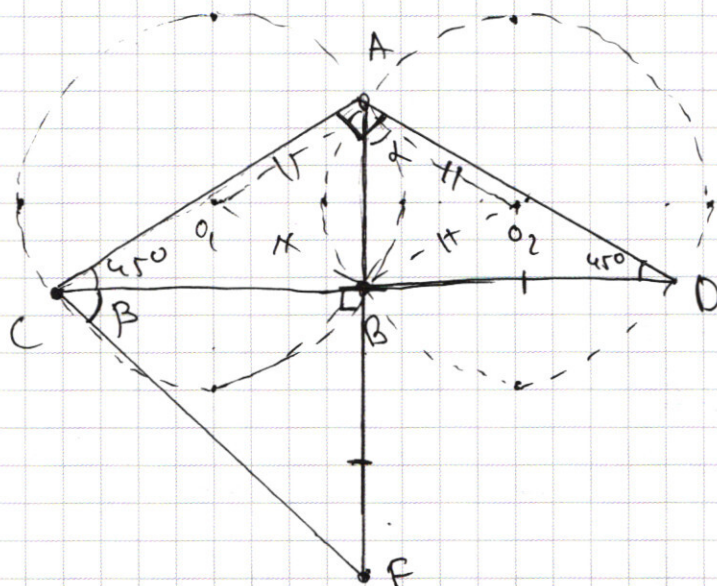
$$8^2 + 15^2 = 17^2$$

34

$$170 + 7049 = 21970 = 219$$

$$(225) = 15^2$$

№6



$$R = 14$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

1) Пусть центр первой окружности O_1 , центр второй - O_2 . Тогда $O_1A O_2B$ - ромб (радиусы равны)
 $\Rightarrow \angle AO_1B = \angle AO_2B$.

$$2) \angle ACD = \frac{\angle AO_1B}{2}; \quad \angle ADB = \frac{\angle AO_2B}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ACD = \angle ADB = 45^\circ \text{ (т.к. } \angle CAD = 90^\circ)$$

$$3) \text{ ~~Проведем~~ } \angle AO_1B = \angle AO_2B = 90^\circ$$

$\Rightarrow \angle O_1A O_2 = 90^\circ$. Проведем AB. Пусть $\angle BAD = \alpha$,
 Тогда $\angle BAC = 90 - \alpha$. По теореме синусов:

$$BD = 2R \cdot \sin \alpha = 34 \cdot \sin \alpha; \quad CB = 2R \cdot \sin(90 - \alpha) = 2R \cdot \cos \alpha = 34 \cos \alpha$$

$$CF^2 = BD^2 + BC^2 = (2R)^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \Rightarrow CF = 2R = 34 \text{ (н.а.)}$$

$$4) \text{ Если } BC = 16, \text{ то } 2R \cdot \cos \alpha = 16 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{8}{14} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{15}{17}$$

$$\text{Тогда } \angle ABD = 180^\circ - 45^\circ - \alpha = 135^\circ - \alpha. \Rightarrow AD = 2R \cdot \sin(135^\circ - \alpha) =$$

$$= 2R \cdot \cos(\alpha - 45^\circ) = 2R \cdot (\cos 45^\circ \cos \alpha + \sin 45^\circ \sin \alpha) = \frac{34}{\sqrt{2}} \cdot \frac{17}{17} = 23\sqrt{2}$$

$$AC = AD = 23\sqrt{2} \text{ (т.к. } \triangle CAD \text{ - пр.б.)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

16 (Продолжение)

5) Пусть $\angle FCB = \beta$. Тогда в-н. $CF = 34$; $BC = 16$; ~~$BF = 3$~~

$$BF = 2R \cdot \sin \alpha = \frac{34 \cdot 15}{17} = 30, \text{ГО}$$

$$\cos \beta = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}; \sin \beta = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}.$$

$$\text{Тогда } \sin \angle(ACB) = \sin(45^\circ + \beta) = \frac{23}{\sqrt{2} \cdot 17}$$

$$6) S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin \angle(ACF)}{2} = \frac{23\sqrt{2} \cdot 34 \cdot 23}{17 \cdot \sqrt{2} \cdot 2} = 23^2 =$$

$$= 529 \quad \text{Ответ: а) } 34 \quad \text{б) } 529$$

или
15

$$\begin{cases} y > 3x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases} \quad \begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 9 \end{cases}$$

1) $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

- ~~$x+y+8$~~ если $x+y+8 \geq 0$ и $x-y+8 \geq 0$, то $x=0$; $y \in [-8; 8]$
- если $x+y+8 \geq 0$ и $x-y+8 \leq 0$, то $y=8$; $x \in [-16; 0]$
- если $x+y+8 \leq 0$ и $x-y+8 \geq 0$, то $y=-8$; $x \in [-16; 0]$
- если $x+y+8 \leq 0$ и $x-y+8 \leq 0$, то $x=-16$; $y \in [-8; 8]$

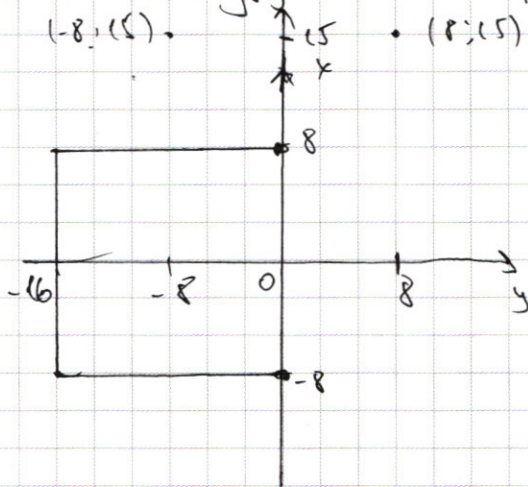
Тогда первое уравнение задаёт квадрат с центром $(-8; 0)$ и сторонами, параллельными осям x и y . Непусто.

$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$ при $a \geq 0$ задает при $x \geq 0$ и $y \geq 0$

возможно, обрезанную

окружность с центром $(8; 15)$ и радиусом $\sqrt{a}$,

а в других четвертях - отражения этой части $(-8; 15)$.



Поймем, что 1) квадрат расположен в части, где $x \leq 0$
 $\Rightarrow$ часть $x \geq 0$ не будет давать решений, тогда можно расширить модуль и написать $(x+8)^2 + (|y|-15)^2 = a$ при $x \leq 0$.

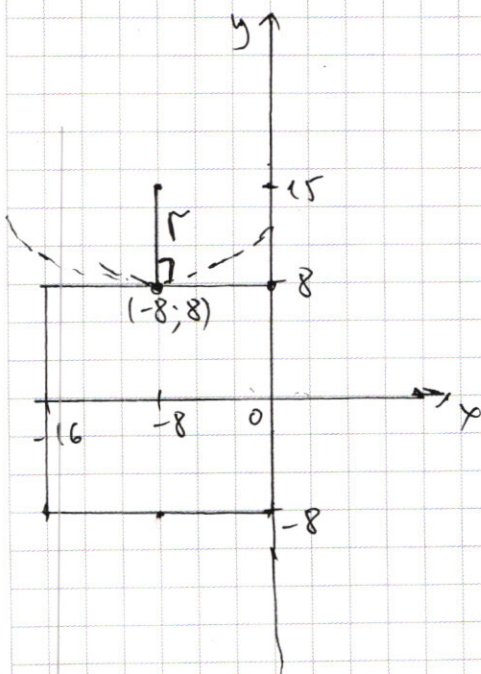
2) Квадрат симметричен относительно $y=0$

и второе уравнение симметрично относительно $y=0$

Тогда условие 2х решений эквивалентно 1 решению

при $x \leq 0$ или не 2х решениями при $y=0$.

Случай а) 1 решение при $y > 0$



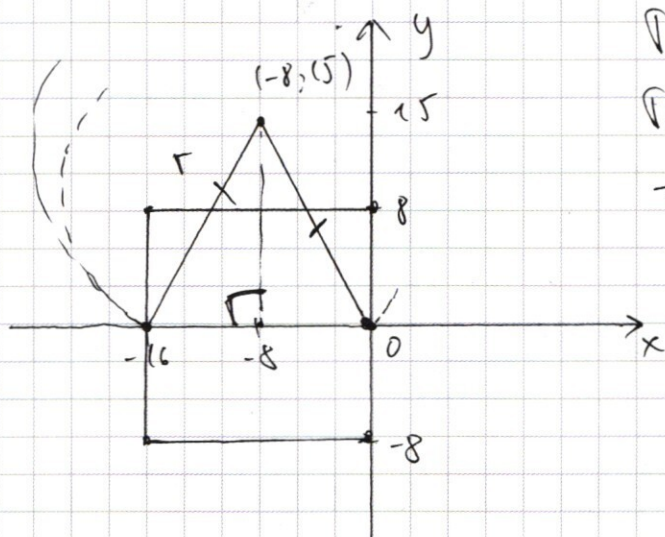
Окружность должна касаться верхней стороны квадрата. Если её радиус меньше - то решений не будет. Если больше, то будет 2 решения. Тогда это единственный случай при нём $r = 15 - 8 = 7 \Rightarrow a = 49$

Продолжение далее

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (Продолжение 2)

Случай б) 2 решения на $y=0$



Тогда $x = -16$ и $x = 0$ решения.

$$\text{Тогда } r^2 = 15^2 + 8^2 = 17^2$$

$$\Rightarrow a = 17^2 = 289$$

Ответ: $a = 49$; $a = 289$

№7

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

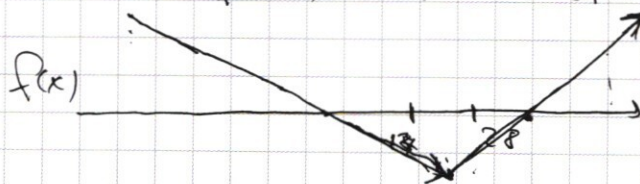
Если решения существуют, то $3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3(3^{27} - 1)x$.

Пусть $f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{28} - 93 - 3^{28}x + 3x$.

Тогда решения могут существовать только когда $f(x) < 0$

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 - 3^{28} + 3. \text{ Тогда при } x \geq 28$$

$f'(x) > 0$. При $x \leq 27$ $f'(x) < 0$. $\Rightarrow$ экстремум между 27 и 28.

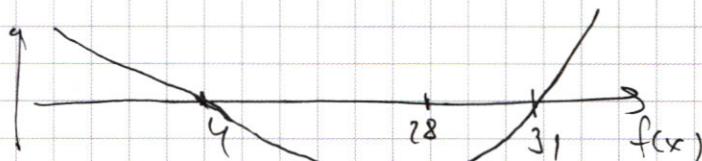


17. (Продолжение)

При этом $f(4) = 3^4 + 4 \cdot 3^{28} - 93 - 3^{28} \cdot 4 + 12 = 0$

$$f(31) = 3^{31} + 4 \cdot 3^{28} - 3^{28} \cdot 31 + 93 - 93 = 31 \cdot 3^{28} - 31 \cdot 3^{28} = 0$$

тогда имеет



$\Rightarrow$ найдем возможные решения с $x \in \{5, 6, \dots, 29, 30\}$

Т.к. числа $3^x + 4 \cdot 3^{28}$ и $93 + 3(3^{28} - 1)x$ при

этих x целые, то найдем y , удовлетворяющую для

x , равно $93 + 3(3^{28} - 1)x_1 - 3^{x_1} - 4 \cdot 3^{28} - 1$

тогда общее количество решений равно

$$\sum_{i=5}^{30} (92 + 3(3^{28} - 1)i - 4 \cdot 3^{28} - 3^i) = 3(3^{28} - 1) \sum_{i=5}^{30} i - \sum_{i=5}^{30} 3^i + \sum_{i=5}^{30} 92 - 4 \cdot 3^{28}$$

$$= 3(3^{28} - 1) \cdot \frac{35 \cdot 36}{2} + (92 - 4 \cdot 3^{28}) \cdot 36 - 3^5 (3^1 + 3^2 + \dots + 3^{25}) =$$

~~$$= 3^{28} \cdot 630 \cdot 5 - 3^{28} \cdot 48 \cdot 3 - 3 \cdot 630 + 92 \cdot 36 - 3^5 \cdot \left(\frac{3^{26} - 1}{2} \right) =$$~~

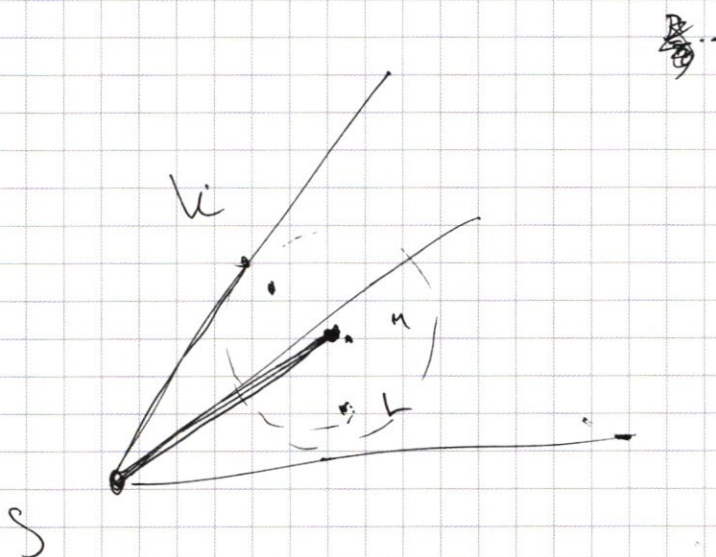
~~$$= 3^{30} \cdot 210 - 3^{30} \cdot 16 =$$~~

$$= 3^{28} \cdot 630 - 4 \cdot 36 \cdot 3^{28} - 630 \cdot 3 + 36 \cdot 92 - 3^5 \left(\frac{3^{26} - 1}{2} \right) =$$

$$= 3^{31} \cdot 22 + 158 - \frac{3^{31}}{2} + \frac{3^5}{2} = \frac{3^{31} \cdot 43}{2} + \frac{559}{2}$$

Ответ: $\frac{3^{31} \cdot 43}{2} + \frac{559}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} 64827 \\ - 63 \\ \hline 18 \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 7203 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \\ 6 \\ \hline 12 \end{array}$$

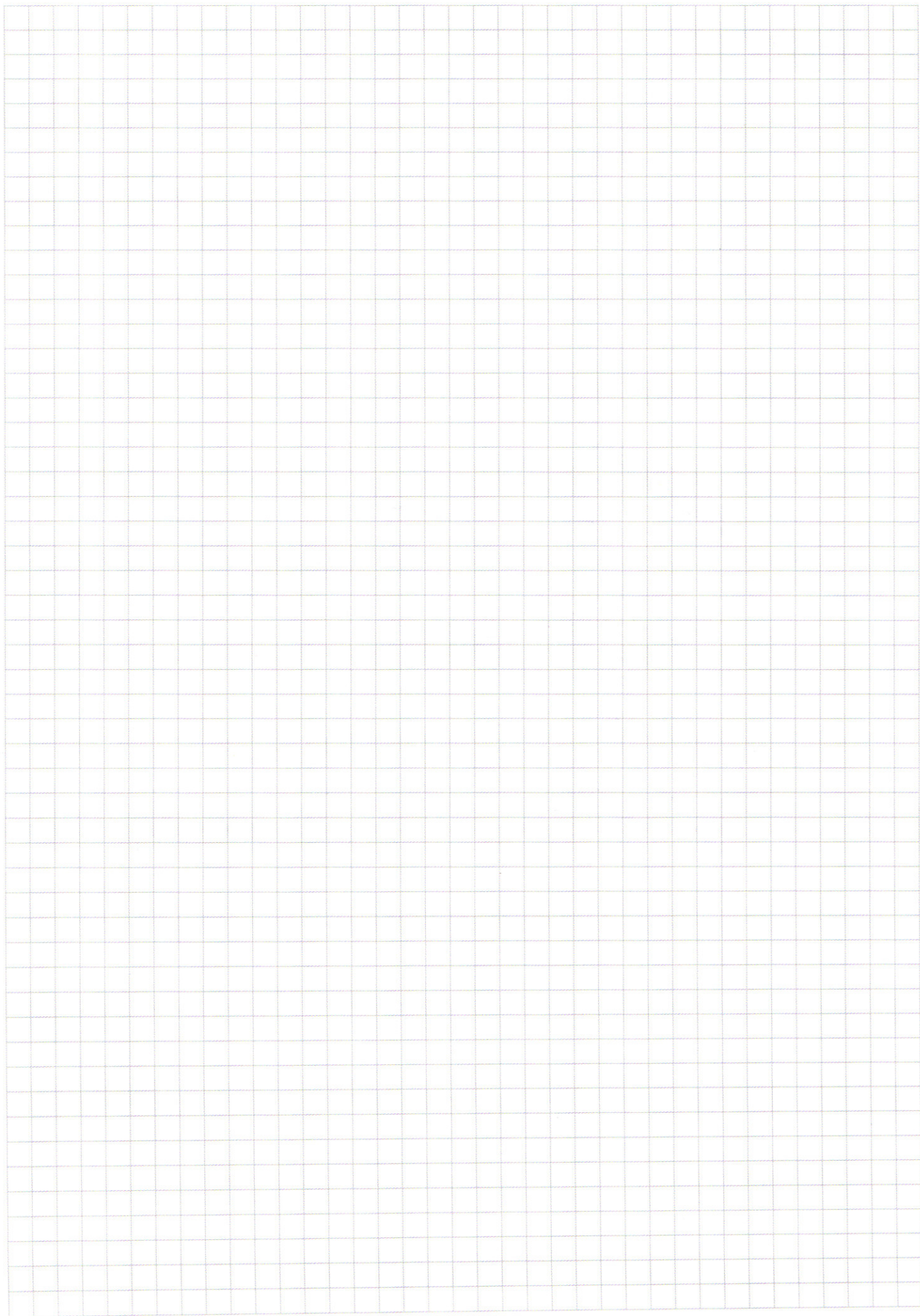
$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \\ - 21 \\ \hline 30 \\ - 28 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 343 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ \hline 343 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$63 \times 7 = 280 + 63$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \quad y < 0 \Rightarrow x > 0$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + (2x + 4y) = 0$$

~~$$(y+x)^2$$~~
$$4(3x+y)$$

$$y^2 - 3(x^2 - 4x)$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) = x^2 (\ln x + 2 \ln y^2)$$

~~$$(x+y)(y+x)$$~~

$$y^2 + 2xy + 4y - 3x^2 + (2x) = 0$$

$$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + (2x) = 0$$

$$D_y = 4x^2 + 16 + 16x + (2x^2 - 48x) =$$

$$= 16x^2 - 32x + 16 = (x^2 - 2x + 1) \cdot 16 = (x-1)^2 \cdot 16$$

$$y = \frac{2x+4 \pm (x-1)}{2} = x \pm \frac{(x-1)}{2} + 2$$

$$= y_1 = \frac{2x+4 + x-1}{2} = \frac{3x+3}{2}$$

$$y_2 = \frac{2x - x + 1 + 4}{2} =$$

$$(10+7)^2 = 100 + 140 + 49 = 289$$

$$y = \frac{2x+4 \pm 4(x-1)}{2}$$

$$y_1 = \frac{2x+4+4x-4}{2} = 3x$$

$$y_2 = \frac{2x+4-4x+4}{2} = \frac{8-2x}{2} = 4-x, \text{ well...}$$

$$1) y = 3x$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + (2x+4)y = 0$$

$$y^2 + y(2x+4) + (-3x^2 + (2x)) = 0$$

$$D = (2x+4)^2 - 4(-3x^2 + (2x)) =$$

4.2.2

$$= 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 8x = 16x^2 + 8x + 16 =$$

$$= 4^2(x-1)^2$$

$$y_1 = \frac{-2x-4+4x-4}{2} = \frac{2x-8}{2} = x-4$$

$$y_2 = \frac{-2x-4-4x+4}{2} = -\frac{6x}{2} = -3x$$

①

$$\left(\frac{-x^2}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^2 \cdot \ln(9x^3)$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{\ln(8/x^6)}$$

$$\left(-\frac{x^2}{x+4}\right)^{\ln(4-x)} = e^{\ln\left(\frac{-x^2}{x+4}\right) \cdot \ln(4-x)} = e^{2\ln x \cdot \ln(xy^2)} = e$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

2) $y < 93 + 3^{28}x - 3x$

① при ~~$x \leq -1$~~ $x \leq -1$ в е шово

② нею чгобо

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28}x - 3x$$

1, 2, 3 норм

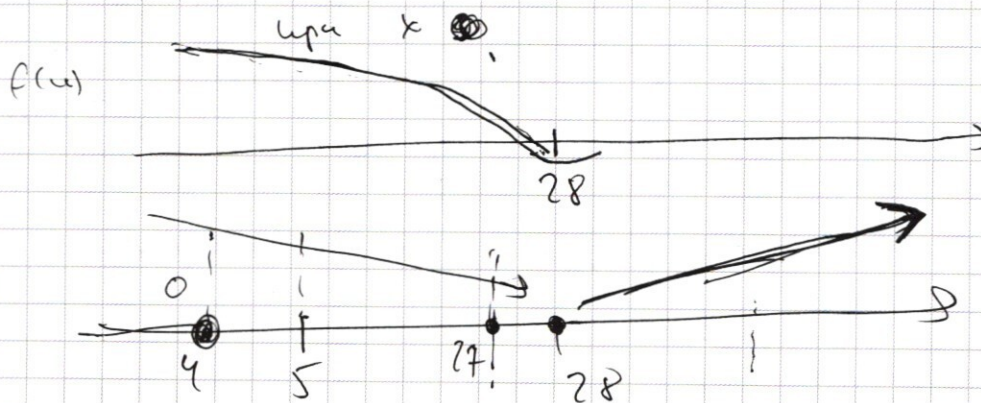
4 стрм

$$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{28} - 93 - 3^{28}x + 3x$$

$x = 28$

$$f'(x) = 3^x \ln 3 - 3^{28} + 3$$

при $x \geq 28$ $f'(x) > 0$



$$3^{30} \cdot 210 - 3^{30}$$

$$12 \cdot 4$$

$$3^{28} + 4 \cdot 3^{28} = 5 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3 \cdot 28 = 3$$

$$\frac{35-36}{2} = 35 \times 18$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 18 \\ \hline 280 \\ 350 \\ \hline 630 \end{array}$$

$$3^5 = 81 \cdot 3 = 3^{27} + 4 \cdot 3^{28} < 5 \cdot 3^{28} < 3^{30}$$

$$2 + 21$$

$$158 \cdot 2 = 100 + 116 = 116$$

$$316 + 243 =$$

$$= 559$$

$$5, \dots, 28$$

$$(1+3) = \frac{9-1}{2}$$

$$3^{29} + 4 \cdot 3^{28} = 7 \cdot 3^{28}$$

$$29 \text{ on}$$

$$3^{30} + 4 \cdot 3^{28} = 13 \cdot 3^{28}$$

$$9 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3 \cdot 30 = 90$$

$$(37)$$

$$3 \cdot 31 \cdot 3^{28} +$$

$$31 \cdot 3^{28} \Rightarrow x \in \{5, \dots, 30\}$$

$$93 + 3^{28} \cdot x - 3x - 3^x$$

$$y \leq 4$$

$$y > 2$$

$$4-2-1$$

$$5, 6 = 2$$

$$1 + 3 + \dots + 3^{35} =$$

$$4 = 3$$

$$4 \cdot 92 = 360$$

$$30 - 5 = 25$$

$$36$$

$$\frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 2$$

$$70 \cdot 9 \quad 4 - 3^{30} \cdot 66 = 3 \cdot 22$$

$$-210$$

$$758$$

$$35 \cdot 18 = 350 + 35 \times 8 = 350 + 240 + 40 =$$

$$= 590 + 40 = 630$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \sqrt{12} \end{array}$$

$$= 630 \cdot 3 + 26 \cdot 92$$

$$9(-40 \cdot 3 + 4 \cdot 92)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$64817 = 9 \cdot 7203 = 9 \cdot 3 \cdot 2401 =$$

$$80 + 28 = 108$$

$$= 9 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 343 = 9 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7^3 =$$

$$= 44 \cdot 9 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 64817 \quad | \quad 27 \\ - 54 \quad \quad | 2401 \\ \hline 108 \\ - 108 \\ \hline \end{array}$$

1-й вариант: 4 7кв 3 ^{гройки} ~~десяти~~ ^{единица}

2-й вариант 4 7кв 1 ^{гройки} ^{десяти}

$$\begin{array}{r} 343 \quad | \quad 7 \\ - 28 \quad \quad | 249 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 5x = 0$$

$\sqrt{2}$:

$$\cos x + \sin x =$$

$$\cos x + \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \sin 45^\circ \cos x + \cos 45^\circ \sin x$$

$$\cos x - \sin x$$

$$= \sin 45^\circ$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \sin 45^\circ \cos x - \cos 45^\circ \sin x = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right)$$

$$2 \cdot \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 3x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) =$$

$$= 2 \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x + \cos 5x = 0$$

$$y = x - 4$$

~~2.11~~

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$$



$$\cos 3x - \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 3x - \sin 3x$$

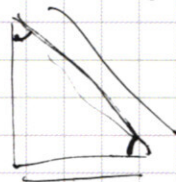
$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + \cos 3x =$$

=

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$



$$\pi + 2\pi n$$

$$\frac{3\pi}{4} + \dots$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - x$$

$$6x - \frac{\pi}{2} \quad 2\pi + 4\pi n$$

$$6x = \frac{5\pi}{2} + 4\pi n$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$$

$$\sin(135^\circ - \alpha) = \cos(45^\circ - 45^\circ) =$$

$$= \cos \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln\left(\frac{x^4}{y}\right) \cdot \ln(-y) = 2(\ln x + \ln(xy^2))$$

$$(4\ln x - \ln(-y)) \cdot \ln(-y) = 2\ln x (\ln x + 2\ln(-y))$$

$\ln x = a$
 $\ln y = b$
 $a, b \neq 0$

$$(4a - b)b = 2a(a + 2b)$$

$$4ab - b^2 = 2a^2 + 4ab \Rightarrow 2a^2 + b^2 - 3ab = 0 \quad | : a^2$$

~~$$2a$$~~

$$2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{b}{a}\right) = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t-2)(t-1) = 0$$

$$\left(\frac{b}{a} - 2\right)\left(\frac{b}{a} - 1\right) = 0$$

~~$$a(b-2) \neq 0$$~~

$$\Rightarrow \frac{\ln x}{\ln(y)} = 1 \quad \text{info}$$

$$x = -y$$

= 1

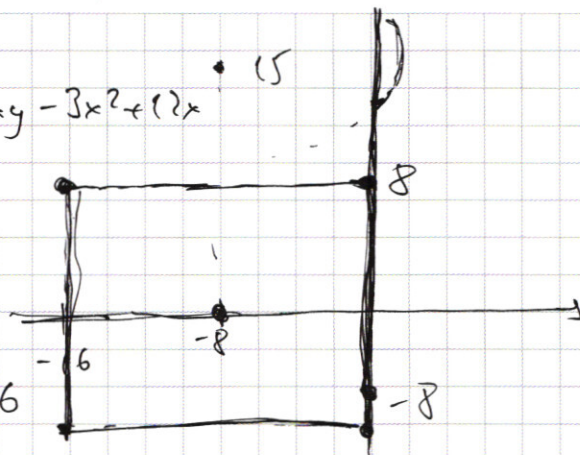
$a = 0$

$b \neq 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x = -e \\ y = -e \end{pmatrix}$ hope...

$$(y-x+4)(y+3x) = y^2 - xy + 4y + 3xy - 3x^2 + 12x \quad \cdot 15$$

$$y^2 + 2xy + 4y - 3x^2 + 12x = 0$$



$$1) |x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$x+y+8 \geq 0 \quad x-y+8 \geq 0$$

①

$$2x + 16 = 16 \rightarrow x = 0$$

$$y+8 \geq 0 \quad -y+8 \geq 0$$

$$y \geq -8 \quad y \leq 8$$

②

$$x+y+8 \geq 0 \quad x-y+8 \leq 0$$

$$x+y+8 + x-y-8 = 16$$

$$2x = 16 \rightarrow x = 8$$

$$x \geq -16$$

$$x \leq 0$$

③

$$x+y+8 \leq 0$$

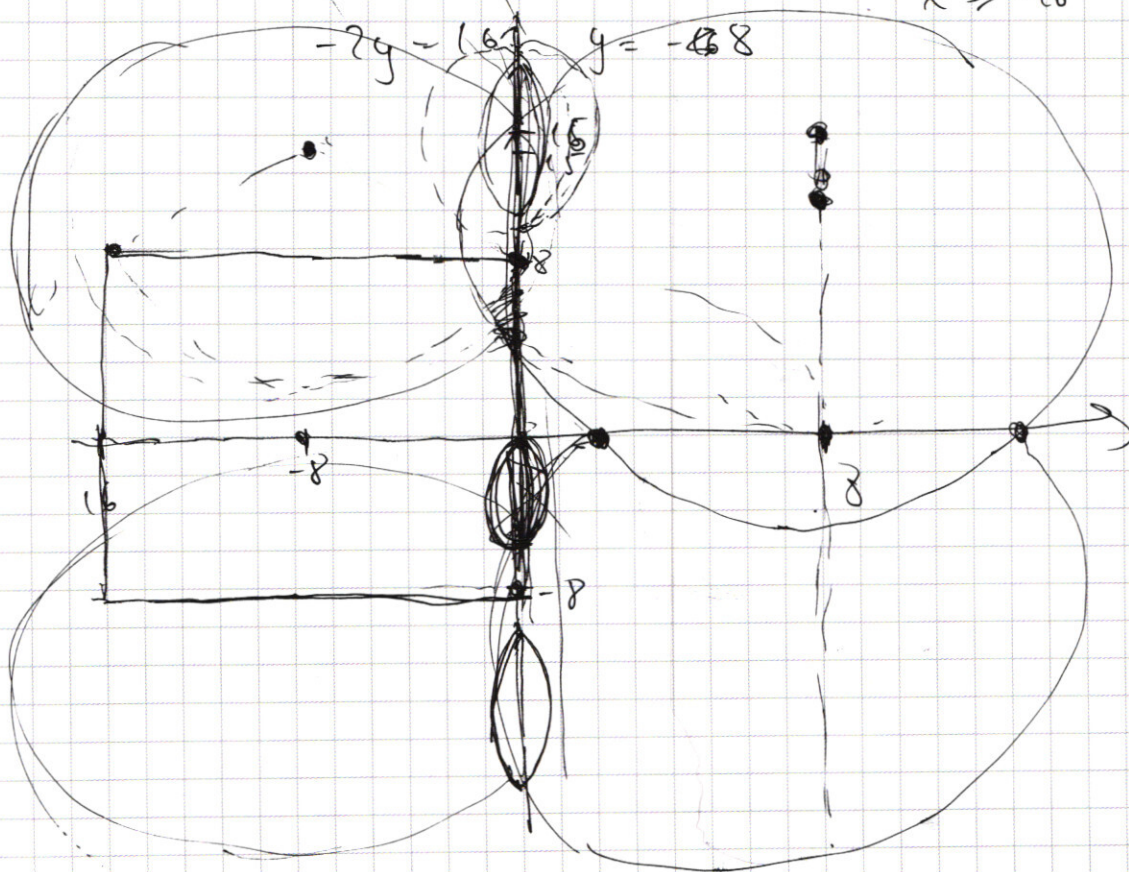
$$x-y+8 \geq 0$$

$$\cancel{x \leq 0} \quad x \leq 0$$

$$x \geq -16$$

$$-x-y-8 + x-y+8 = 16$$

$$-2y = 16 \rightarrow y = -8$$



~~x < 0~~

~~x > 0~~

x > 0

то не

решения

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

14

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{2x} - 1) \cdot x$$

$$\textcircled{1} \quad 93 + 3(3^{2x} - 1)x \geq 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

~~$$93 + 3 \cdot 3^{2x} - 3$$~~

$$93 + 3^{2x}x - 3x \geq 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

$$x = 4$$

$$93 + 3^{2x} \cdot 4 - 12 > 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

$$81 > 3^4$$

$$\text{нет.} \Rightarrow x < 4$$

$$x \leq 0, \text{ то } 3^x + 4 \cdot 3^{2x} \text{ все шлоко.}$$

$$\Rightarrow x = 1, 2, 3$$

0

$$y > 3^x$$

$$93 + 3 \cdot (3^{2x} - 1) \cdot (n-1+1) \text{ vs } 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

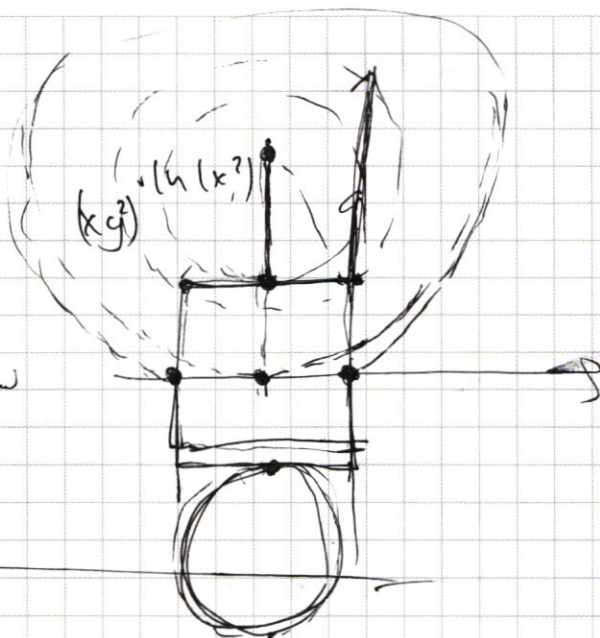
$$= 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\text{vs } 3^{2x} - 3$$

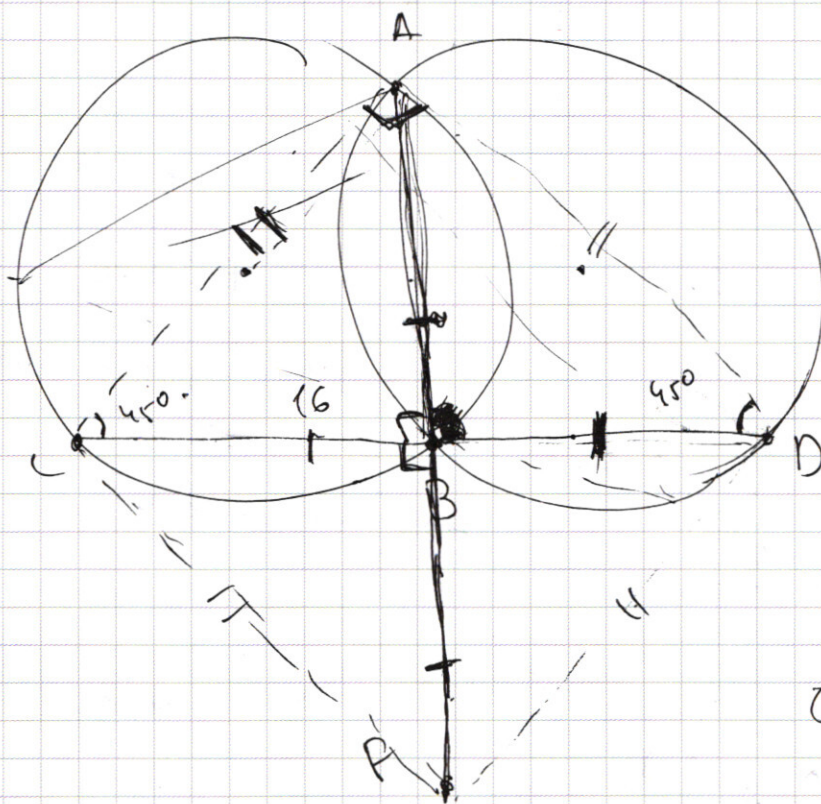
$$2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(y)} = (x^2)^{\ln(y)}$$

$$(3x)^{\ln \dots} = (9x^3)^{\ln \dots}$$



R-17

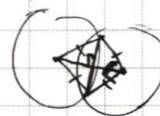


$$AP = 2R \cdot \sin 90^\circ =$$

34

$$CF = AP = 34$$

16.



$$23^2 = (20+3)^2 = 400 + 9 + 120 = 529$$