

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\underline{(-x^7)^{\ln(-y)}}$$

$$2x y \quad (x+y)^2$$

$$2 \cdot 2x \cdot \frac{y}{2}$$

$$12 = 2 \cdot 6 \cdot x \quad 4x^2 + 2xy + \left(\frac{y}{2}\right)^2 +$$

$$36x^2 + 12x + 1$$

$$(6x)^2 + 2 \cdot 6x + 1$$

$$(6x+1)^2$$

$$+ -7x^2$$

$$(6x+1)^2 + 39x^2 + 9x^2 + 2xy + 4y - 1 = 0$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$|a| + |b| \geq |a+b|$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| \geq |2x+16| \geq |a-b|$$

~~16~~

$$x+y+8 \geq 0$$

$$3+7$$

$$3-(-7)$$

$$-3x^2 = -4x^2 + x^2$$

$$\geq |2y|$$

$$8 \quad 13$$

$$-2 \quad 1$$

$$-(2x)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2x - 9 =$$

$$= -(2x-3)^2$$

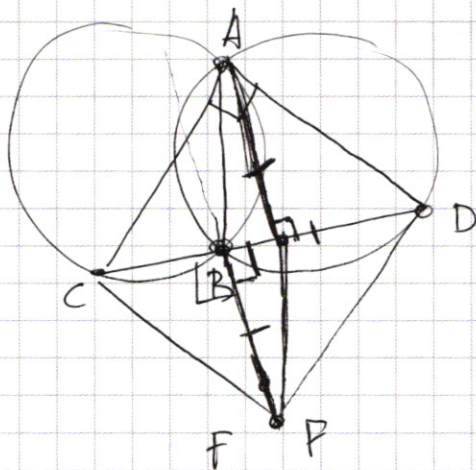
$$2+1 \geq 6x+1$$

$$-2-1$$

$$\frac{-2-1}{-3} = 3$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0 \quad 2 \cdot 2y$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - (2x-3)^2 + 9 + 4y = 0$$



$$y \leq 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

A hand-drawn diagram of a triangle on a grid background. A point is marked on the base of the triangle. The angle at this point is labeled 120° and α . The base of the triangle is labeled β .

$$180 - 2\beta = 180 - 2 - 90 + 8 = 96$$

$$\underline{\cos 3x} \quad \underline{\cos 4x} - \underbrace{(\sin 3x \sin 4x)}_{\text{null!}} + \underline{\cos 3x} + \underbrace{(\sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x)}_{\text{null!}} - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin 4x (\cos 3x - \sin 3x) + \cos 4x (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2})$$

$$\cos 3x = a \quad \cos 4x = b \quad \sin 3x = c \quad \sin 4x = d$$

$$\frac{ab-cd}{a-c} + \frac{a}{c} + \frac{ad}{c} + \frac{bc}{c} - \frac{c+\sqrt{2}b}{c} = 0$$

$$\cos 7x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) + \cos 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) +$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = 0$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3}} \quad \underbrace{\frac{1}{2} \cos 7x + \frac{1}{2} \cos 3x} + \underbrace{\frac{1}{2} \sin 7x - \frac{1}{2} \sin 3x} + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} (\cos(7x-3x)) =$$

$$\underline{\underline{L}} + \sqrt{2} (\cos 7^\circ \times \cos 3^\circ + \sin 7^\circ \times \sin 3^\circ)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = x - 4$$

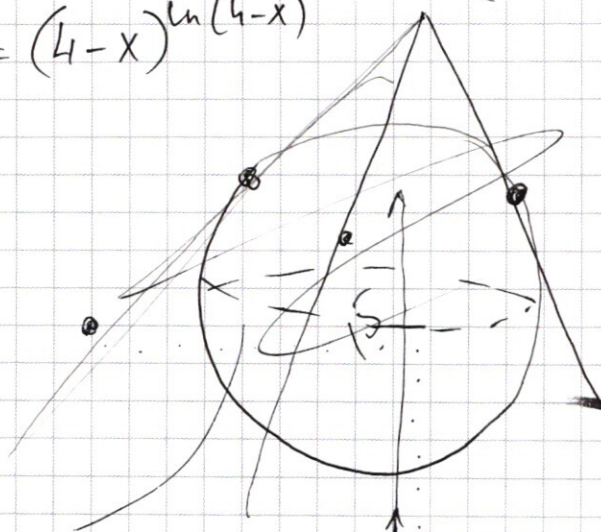
$$\left(\frac{x}{4-x}\right)^7 \ln(4-x) = x^{2 \ln(x(x-4)^2)} \quad x > 0$$

$$x^{7 \ln(4-x)} = x^{2 \ln(x(x-4)^2)} \cdot (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$x^{\ln(4-x)^7 - \ln(x^2(x-4)^4)} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$x^{\ln \frac{(4-x)^3}{x^2}} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

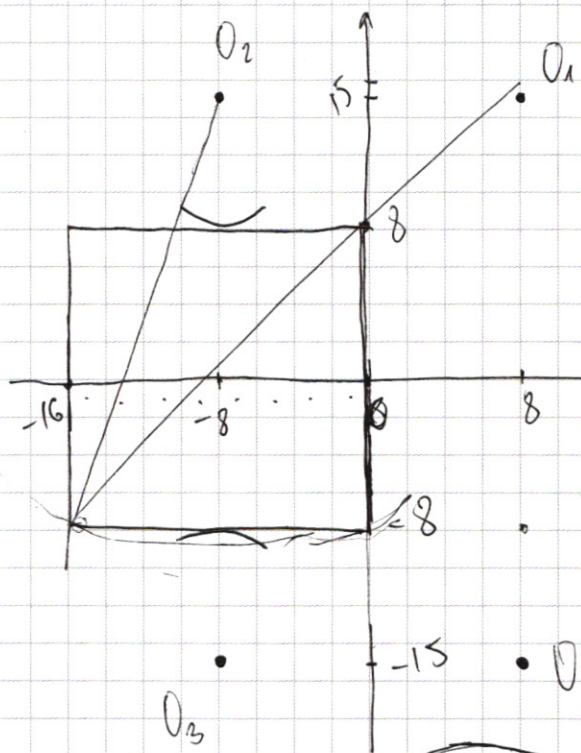
$$2^{\ln 2} = 2^{\ln 2}$$



$$a = 4g$$

2

-8



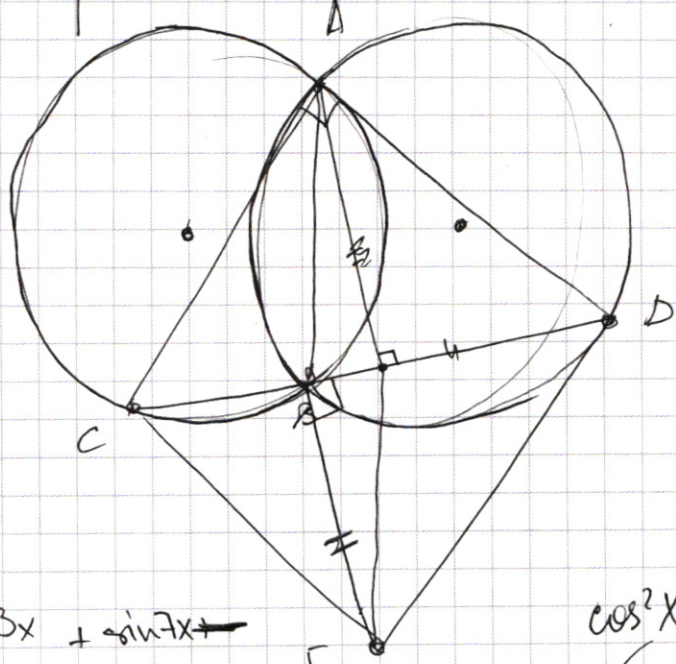
$$R \sim 48.$$

$$23^2 + 8^2 = 529 + 64 = 593$$

$$23 \times 20 = 460$$

$$\begin{array}{r} 460 \\ 529 \\ \hline 593 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ + 24 \\ \hline 48 \\ + 576 \\ \hline 624 \\ + 576 \\ \hline 1200 \end{array}$$



$$24^2 + 23^2$$

$$\begin{array}{r} 1105 \\ 529 \\ \hline 624 \\ + 576 \\ \hline 1200 \end{array}$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x + \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$(\cos x + \sin x)^2 + 2 \sin^2 x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$9 \cdot 3 + 3(3^{27} - 1)x - 1 = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$9 \cdot 2 + 3^{28}x - 3x = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64827 \mid 3 \rightarrow 21609 \\ \underline{6} \\ 4 \\ \underline{3} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 27 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21609 \mid 3 \rightarrow 7203 \\ \underline{21} \\ 6 \\ \underline{6} \\ 09 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7203 \mid 3 \\ \underline{6} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$2401 \quad 2100 + 301 = 2100 + 280 + 21$$

$$\begin{array}{r} 2401 \mid 7 \rightarrow 343 \\ \underline{21} \\ 30 \\ \underline{28} \end{array} \quad \begin{array}{r} 343 \mid 7 \\ \underline{28} \\ 49 \end{array}$$

↓

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7^3$$

$$64824 = 3^3 \cdot 7^4$$

8 знаков
7

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

есть min 1 единица

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ \hline 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{array} \quad 35$$

(245)

Далее можем записать

$$9 \quad 3 \quad 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \quad 1 \quad 1$$

$$\begin{array}{r} 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ \hline 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{array}$$

(210)

$$\begin{array}{l} abb \\ bab \\ bba \end{array} \quad \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2!} = 3 \quad aabbb \quad c$$

$$aa \quad bb$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \quad 1$$

$$4! \quad 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\begin{array}{l} 8! \\ \hline 4! \cdot 2! \end{array} = \begin{array}{l} abba \\ baab \\ baab \end{array}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = bbaa$$

$$\begin{array}{r} 8! \\ \hline 4! \cdot 3! \end{array} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6}$$

$$56 \cdot 5 = 280$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 42 \cdot 20 = 840$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 5x \sin 2x$$

$$\cos x + \cos y = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

~~$$\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}$$~~

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + \frac{12x}{2 \cdot 6x} + 4y = 0$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}$$

$$y^2 + 2xy$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$$

~~$$\sin$$~~

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos \frac{\pi}{6} + \cos$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$x \rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin \rightarrow \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \alpha = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos 7x + \cos 3x$$

$$\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = -2 \sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi = +2 \sin \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\cos x - \cos y = -2$$

$$1 = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} + \cos 0 =$$

$$= 2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{1}{2} + 1 = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \checkmark$$

$$\cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi = -2 \cos \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$1 = -2 \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \checkmark$$

$$\cos \frac{\pi}{3} + \cos 0 = 2 \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{1}{2} + 1 \neq 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} + \sin 0 = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$$

$$\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos 0 \checkmark$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x = 0$$

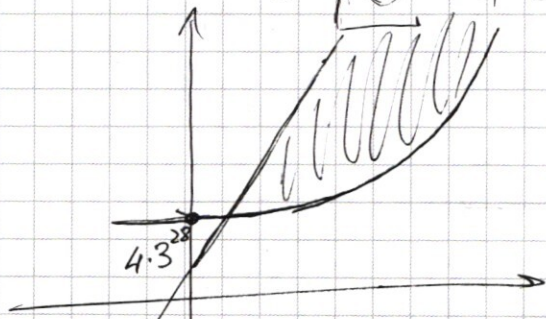
$$\cos 7x / (1 + \sqrt{2} \cos 3x) + \cos 3x + \sin 7x (1 + \sqrt{2} \sin 3x) - \sin 3x = 0$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} = 3^x + (2 \cdot 3^{14})^2$$

~~уточнить~~

$$-y \geq -93 - 3(3^{27} - 1)x$$

$$0 > 3^x + 4 \cdot 3^{28} - 93 - 3 \cdot x + 3x$$



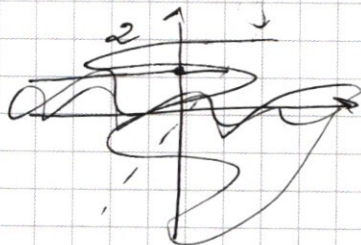
$$3 \cdot (3^{27} - 1) \cdot x + 93$$

$$93 < 3^{28} (3^{x-28} + 4)$$

$$|x+y| + |x-y| = 4$$

$$x > y$$

$$x+y + x-y = 4$$



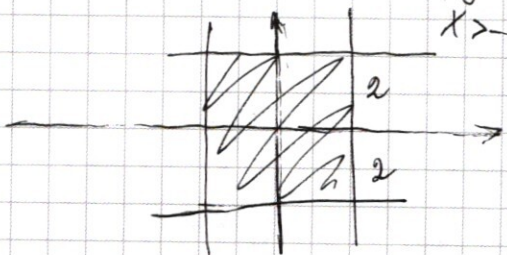
$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$x < y$$

$$x+y + y-x = 4$$

$$x > -y$$



$$3(\underline{31} + 3^{27} \cdot x - x)$$

$$3(28 + 3 + 3^{27} \cdot x - x)$$

$$x+y+y-x = 4$$

$$-x-y+x-y = 4$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$x+y+8 + x-y+8 = 16$$

$$2x+16=16$$

$$x=0$$

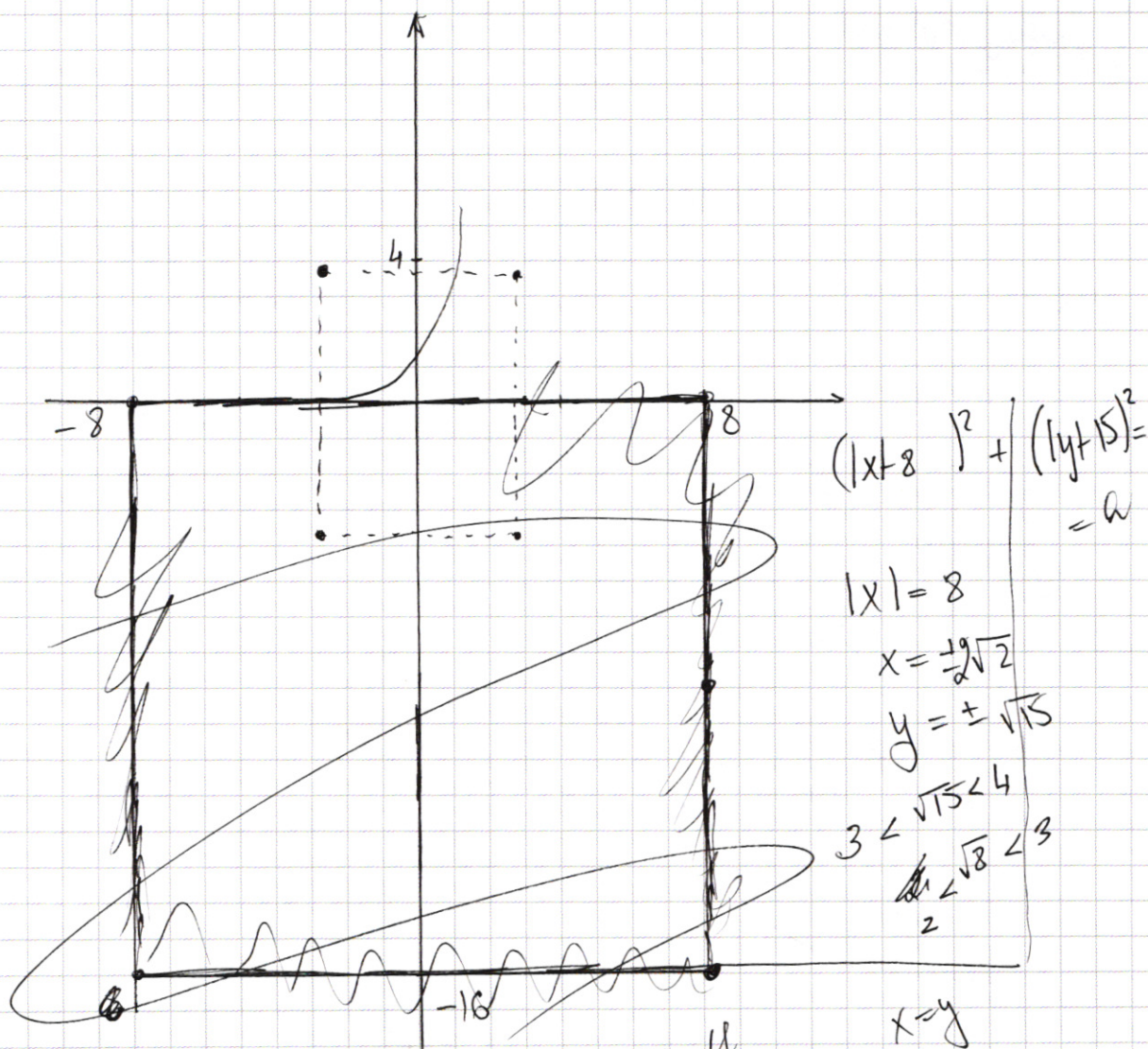
$$-2x-16=16$$

$$-2x=32$$

$$x=-16$$

$$y=-8$$

$$y=8$$



$$(x+8)^2 + (y+15)^2 = a$$

$$|x| = 8$$

$$x = \pm 8\sqrt{2}$$

$$y = \pm \sqrt{15}$$

$$3 < \sqrt{15} < 4$$

$$\frac{1}{2} < \sqrt{8} < 3$$

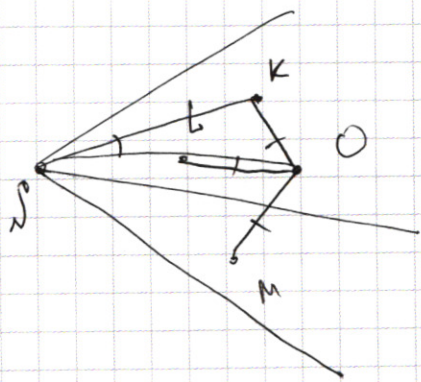
$$x=y$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$e^{\ln x} = y$$

$$\ln x = \ln y$$

$$|y+8| + |8-y| = 16$$



$$2|x+8| = 16$$

$$|x+8| = 8$$

$$x=0$$

$$x=-16$$

$$y=2$$

$$16+6=16$$

$$y>8$$

$$y+8+y-8=16$$

$$0; 0$$

$$-16; 0$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$x > 0$$

$$2\ln(xy^2) = 2(\ln x + \ln y^2) =$$

$$= 2\ln x + 2\ln y^2$$

$$x^{\ln x} \cdot x^{\ln y^2} = x$$

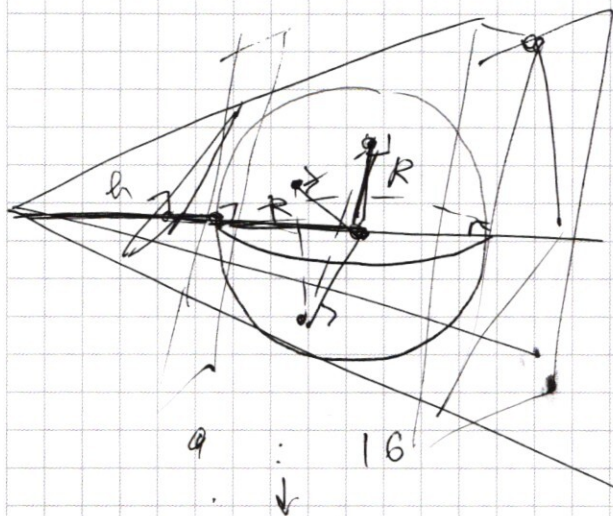
$$\frac{1}{x^{\log_e e}} = x$$

$$x^{\frac{1}{(\log_e e)^{-1}}} = x^{2\ln x}$$

$$x^{2\ln x} \cdot x^{2\ln y^2} = a^{\log_e a}$$

$$x^{\ln x} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$k = \frac{3}{4}$$

$$\frac{h}{h+2R} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{y}{3} > 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27} \quad 4h = 3h + 6R$$

$$\frac{y}{3} \leq (3^{27} + 30) x \quad h = 6R$$

КСО

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x + \cos 3x +$$

$$+ \sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x (\cos 4x + \sin 4x + 1) +$$

$$+ \sin 3x (-\sin 4x + \cos 4x - 1) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

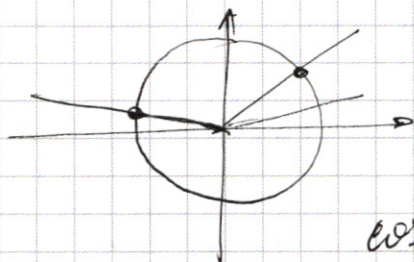
$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{27} > 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \leq 93 + (3^{28} - 3)x$$

$$93 + 3^{28}x - 3^x \leq 3(3^{27} - 1)x$$

$$\cos 7x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) + \cos 3x + \cos\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

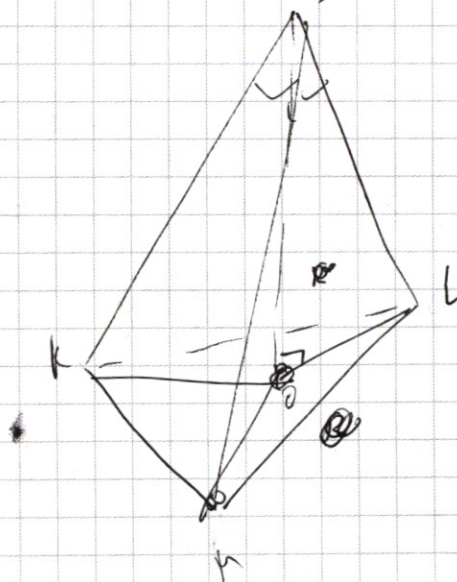
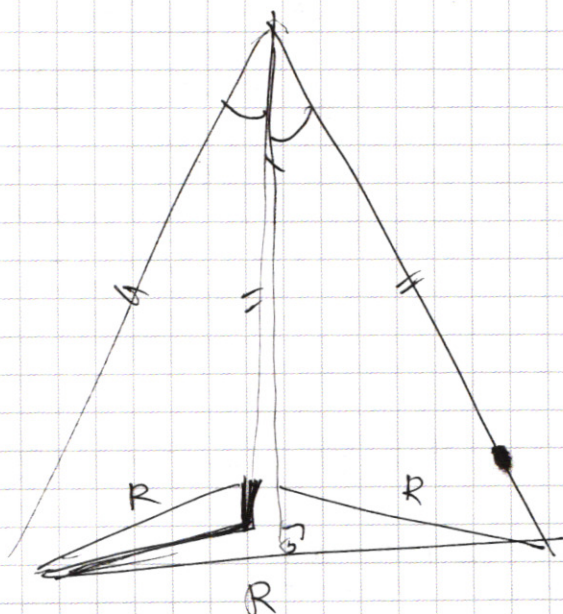
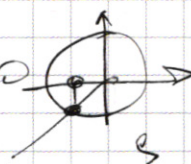
$$\sin 3x \rightarrow -\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$



$$\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x \cos \frac{3\pi}{2} - \sin x \sin \frac{3\pi}{2} = -\sin x$$

$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 64 \\ 9 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\angle KOS = \arccos \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 576 \quad 49 \\ 49 \quad 11 \\ \hline 66 \\ - 49 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ - 539 \\ \hline 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 11 \\ \hline 49 \\ 49 \\ \hline 539 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

Разложим число 64827 на множители:

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2401 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7^3 = 3^3 \cdot 7^4.$$

У нас восьмизначные числа, значит, есть два варианта набора цифр:

$$(3, 3, 3, 7, 7, \cancel{7}, 1) \text{ или } (9, 3, 7, 7, 7, 7, 1, 1).$$

Других быть не может, так как $7 \cdot 3 = 21$, а это уже не цифра, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ — тоже не подходит. Заметим, что среди цифр числа нет ни одного нашего вышеуказанного, т.к.

тогда указанное произведение никак не получится. Теперь посчитаем, сколько есть чисел из таких цифр. Для 1^{ого} набора:

$$n_1 = \frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 35 \cdot 8 = 280 —$$

в числе столько чисел из выбранных 8 цифр, а делим т.к. есть повторяющиеся.

$$n_2 = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 20 \cdot 42 = 840$$

$$\text{Итого } n_1 + n_2 = 280 + 840 = 1120.$$

Ответ: 1120 чисел.

Задача №3.

$$\int \left(\frac{-x^7}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \quad (1) \rightarrow \begin{matrix} y < 0 \\ x > 0 \end{matrix}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad (2)$$

Решим (2) как квадратное отн. y .

$$y^2 + y \cdot 2(x+2) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\Delta = 4(x+2)^2 + 4 \cdot 3x^2 - 48x = 16x^2 + 16x + 16 - 48x =$$

$$= 16(x^2 - 2x + 1) = 16(x-1)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-2(x+2) \pm \sqrt{16}(x-1)}{2} = \begin{cases} -x-2+2x-2 = x-4 \\ -x-2-2x+2 = -3x \end{cases}$$

Подставим $y = -3x$ в (1).

$$\left(\frac{-x^7}{-3x} \right)^{\ln 3x} = x^{2 \ln 3x^3}$$

$$x^{6 \ln 3x} = 3^{\ln 3x} \cdot x^{2 \ln 3x^3}$$

$$x^{\ln(3^6 x^6) - \ln(9^2 x^6)} = 3^{\ln 3x}$$

$$x^{\ln 3} = 3^{\ln 3x}$$

$x=3$. $\rightarrow y = -9$. — по монотонности ед. реш. и выучиванию и строению графика:

Подставим $y = x-4$.

$$\left(\frac{x^7}{4-x} \right)^{\ln(4-x)} = x^{2 \ln(x(x-4)^2)}$$

$$x^{\ln(4-x)^7} = (4-x)^{\ln(4-x)} \cdot x^{\ln(x^2(x-4)^4)}$$

$$x^{\ln \frac{(4-x)^7}{x^2}} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$x=2$. $(2^{\ln 2} = 2^{\ln 2}) \rightarrow y = -2$. — ответ ед.р.

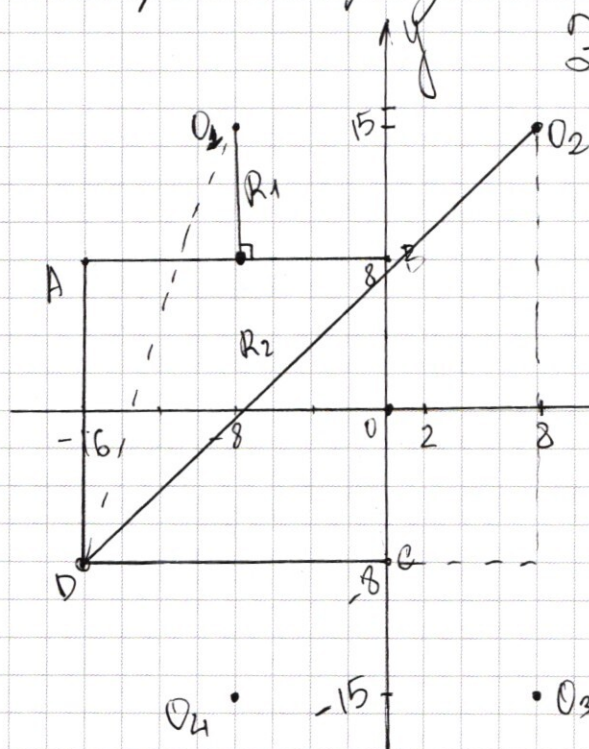
Ответ: $(3; -9), (2; -2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = a. \end{cases}$$

Построим график первого уравнения:



Это будет квадрат ABCD.

Заметим, что графиком второго уравнения являются центры окружности радиуса $\sqrt{a}$ и с центрами в

точках $O_1(-8; 15)$, $O_2(8; 15)$, $O_3(8; -15)$, $O_4(-8; -15)$. Таким образом, наша картинка симметрична отн. Ox ,

а значит, можно рассматривать только 2 из 4-х окружностей. Пусть это будут O_1 и O_2 . Поймем, когда же эти окружности имеют ровно одну общую точку. Это может быть, если окр. O_1 касается стороны AB. Тогда окр. O_2 не пересекается с квадратом, т.к. очев. $\rho(O_1, AB) < \rho(O_2, B)$. Тогда радиус окружностей равен $\rho(O_1, AB) = 7$,

$a = 49$.

Теперь рассмотрим еще один случай, когда окр. O_2 проходит через точку D . Тогда окр. O_1 не пересекает квадрат, так как тогда радиус равен (из геометрии) $R_2 = \sqrt{24^2 + 23^2} = \sqrt{1105}$, а это больше, чем $g(O_1, D)$ (опять из геометрии $g(O_1, D) = \sqrt{64 + 23^2}$). Тогда $ABCD$ лежит внутри окр. O_1 . При других значениях радиуса либо окр. O_2 будет пересекать $ABCD$ в > 5 точке, либо O_1 . Касаться любой из сторон окружность O_2 не может. Значит, мы нашли два значения параметра $a = 49$ и $a = 1105$, такие что ~~решений~~ пересечений с окр. O_1 и O_2 ровно одно, а значит ~~а~~ всего 4-х окр. — ровно два.

Ответ: 49, 1105.

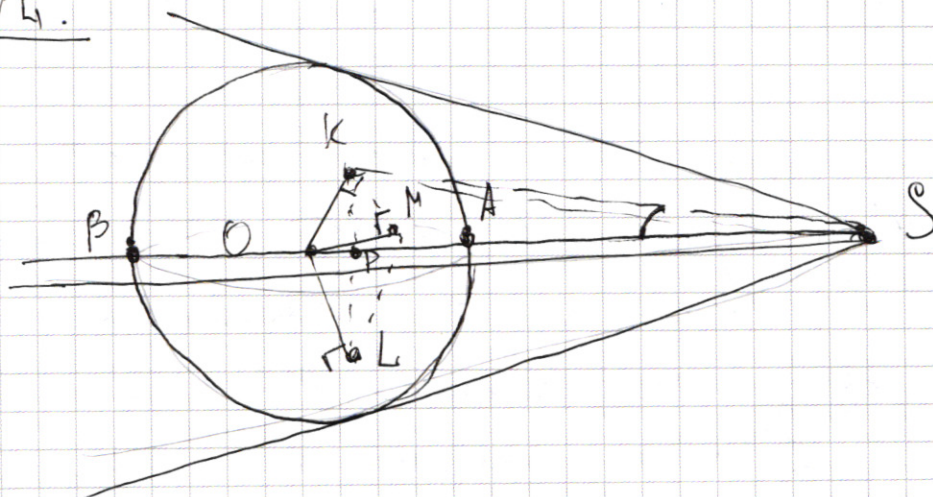
Задача N4.

$S_1 = 9$

$S_2 = 16$

$\angle KSO - ?$

$S(KLM) - ?$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Пусть A - точка касания 1 -ой плоскости, $\perp$ -ной SO , B - второй. Тогда очев. эти плоскости параллельны (т.к. $\perp$ -ны одной прямой). Тогда по условию площади Δ -ников, по которым эти две плоскости пересекают угол, относятся, как $9:16$. Т.к. плоскости $\parallel$ -ны, Δ -ники подобны с $k = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$. Тогда запишем подобие: $\frac{SA}{SB} = \frac{3}{4}$. Очев., AB - диаметр, т.к. OA и OB $\perp$ -ны $\parallel$ -ным плоскостям, а значит O, A и B лежат на одной прямой.

$$2) \frac{SA}{SB} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{SA}{SA+2R} = \frac{3}{4} \text{ (R - радиус сферы)},$$

$$4SA = 3SA + 6R \rightarrow SA = 6R \rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{R}{SA+R} =$$

$$= \arcsin \frac{R}{7R} = \arcsin \frac{1}{7} //$$

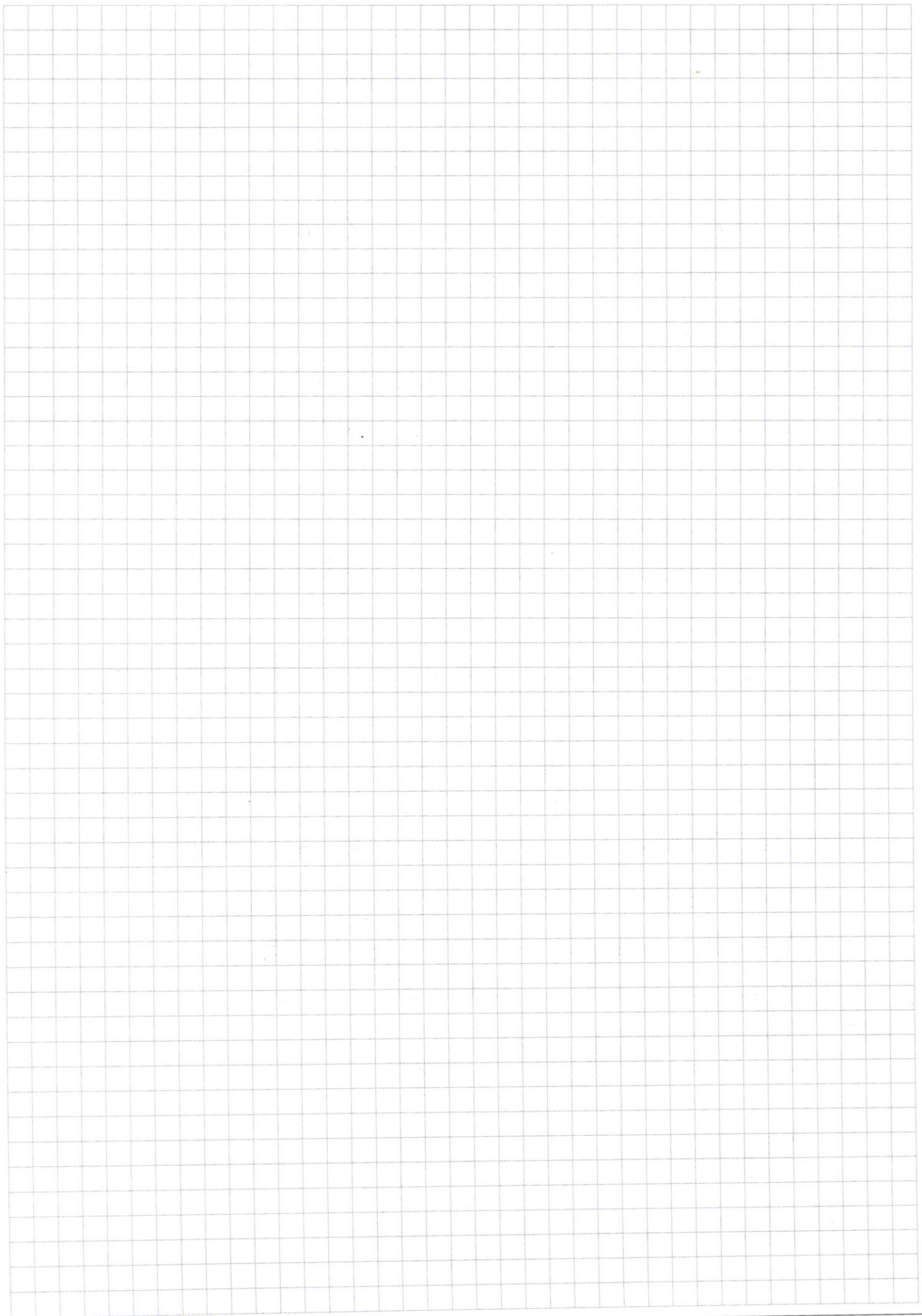
$$3) OP = OK \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{7}\right) = \frac{R}{7}$$

$$4) SP = SO - OP = 7R - \frac{R}{7} = \frac{48R}{7}$$

$$5) \frac{S_{(сф.)}}{S_1} = \left(\frac{\frac{48R}{7}}{6R}\right)^2 = \left(\frac{8}{7}\right)^2$$

$$S_{(сф.)} = 9 \cdot \frac{64}{49} = \frac{576}{49} // = 11 \frac{37}{49}$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{1}{7}, \frac{576}{49}$$

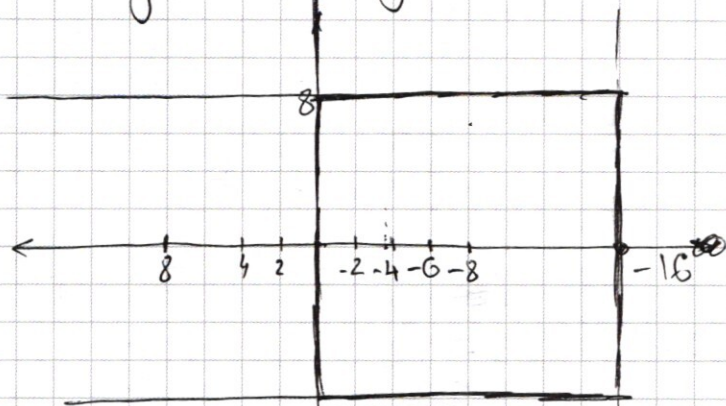


☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+8| + |y+8| = 16.$$



$$\gg |2x+16|$$

$$\gg 2x+16$$

$$|a|+|b| \geq a+b$$

$$|a|+|b| \geq |a+b|$$

$$2x=0$$

$$x=0$$

$$x=-16$$

$$y=\pm 8$$

$$|x| = 8$$

$$\left(\frac{-x^7}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$y < 0$
 $x > 0$

$$\frac{x^7}{y}$$

$$\left(\frac{x^7}{t} \right)^{\ln t} = x^{2\ln x} \cdot x^{2\ln t}$$

$$x^{7\ln t} = t^{\ln t} \cdot x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln t}$$

$$x^{3\ln t} = t^{\ln t} \cdot x^{2\ln x}$$

$$x^{3\ln t + 2\ln x} = t^{\ln t}$$

$$x^{\ln x} \cdot x^{3\ln t - 3\ln x} = t^{\ln t}$$

$$x^{\ln x} \cdot x^{3\ln \frac{t}{x}} = t^{\ln t}$$

$$y^2 + 2xy - 4x^2 + x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + 2xy - (2x-3)^2 + 9 + 4y = 0$$

$$a^{\ln a}$$

$$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (2x+4)^2 - 4(-3x^2+12x) = \\ &= 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x = \\ &= 16x^2 - 32x + 16 = \\ &= 16(x^2 - 2x + 1) = 16(x-1)^2 \end{aligned}$$

$$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D = 16(x-1)^2 \rightarrow \sqrt{D} = 4(x-1)$$

$$y_{1,2} = \frac{2x+4 \pm 4(x-1)}{2} = x+2 \pm 2(x-1) = \begin{cases} 3x \\ 4-x \end{cases}$$

$$1) y = 3x$$

$$\left(-\frac{x^7}{3x}\right) \ln(-3x)$$

$$D = 2(x+2)^2 + 12x^2 - 48x = 0$$

$$= 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x =$$

$$= 16x^2 - 32x + 16 =$$

$$= 16(x-1)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-(2x+4) \pm 4(x-1)}{2}$$

$$\left(\frac{x^7}{3x}\right) \ln 3x$$

$$= x^{2 \ln 9x^3}$$

$$x^{7 \ln 3x}$$

$$= 3x \cdot x^{2 \ln 9x^3} = 3 \cdot x^{2 \ln 9x^3 + 1}$$

$$\left(\frac{x^7}{3x}\right) \ln 3x = x^{2 \ln (x \cdot 9x^2)}$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right) \ln 3x = x^{2 \ln (9x^3)}$$

$$x^{6 \ln 3x} \cdot \frac{1}{3^{\ln 3x}} = x^{2 \ln 9x^3}$$

$$x^{6 \ln 3x - 2 \ln 9x^3} = 3^{\ln 3x}$$

$$(x^3)^{2 \cdot (\ln 3x + \ln 9x^3)} = 3^{\ln 3x}$$

$$x^{\ln x} \log a b = b$$

$$x^{\ln 3^6 x^6} - \ln 9^2 x^6 = 3^{\ln 3x}$$

$$x^{\ln 9} = 3^{\ln 3x}$$

$$x=3$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

