

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{array}{r|l} 64827 & 3 \quad \checkmark \\ & 3 \quad \checkmark \\ 7203 & 7 \\ 1029 & 3 \quad \checkmark \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Разложим 64827 на простые множ:

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$64827 \div 2$$

$$64827 \div 5$$

$$\begin{array}{r|l} 64827 & 9 \\ 63 & 7203 \\ 18 & \\ 18 & 27 \\ & 27 \\ & 0 \\ 7203 & 7 \\ 7 & 1029 \\ 20 & \\ 14 & \\ 63 & \\ 1029 & 3 \\ *9 & 343 \\ 12 & \\ 12 & \\ 9 & \\ 9 & \\ 0 & \\ 343 & 7 \\ 28 & 49 \\ 63 & \end{array}$$

Если среди цифр числа есть чётная цифра, то ~~число~~ делится произведение цифр делится на два $\Rightarrow$ чётных цифр нет. $\Rightarrow$ цифр 0, 2, 4, 6, 8 нет.

Если есть цифра 5, то произведение цифр делится на 5 $\Rightarrow$ цифры 5 нет.

Значит ~~числа~~ числа могут состояться только из цифр ~~1, 3, 7, 9~~ 1, 3, 7, 9.

Из этих цифр только цифра 7 делится на 7.

Для того, чтобы число 7 входило в разложение произведения цифр числа на прост. множители ~~рав~~ равно в четвёртой степени, необходимо и достаточно, чтобы в числе было ровно четыре цифры 7.

Если в числе больше одной цифры 9, то 3 входит в разложение произведения цифр в степени, не меньшей четырех. Противоречие $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ В числе не больше одной цифры 9.

I. В числе нет цифры 9:

(Тогда должно быть ровно ~~три~~ три
цифры 3.
(Цифра 7 — ровно 4 раза
 $\Rightarrow$ Цифра 1 встречается ровно 1 раз.
 $(8 - 4 - 3 = 1)$)

Позиции, в которые мы поставим семёрки, мы можем выбрать C_8^4 способами.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В одну из четырёх оставшихся позиций мы можем поставить единицу четырьмя способами.
Затем, единственным способом ставим три тройки в три оставшихся места.
~~Всего чисел~~

Всего мы можем сформировать $4 \cdot C_8^4$ чисел.

II. В числе есть цифра 9:
Тогда должна быть ровно одна тройка.

Позициями, в которые мы поставили единицы можно выбрать C_8^4 способами.

В одну из оставшихся четырёх позиций можно поставить девятку четырьмя способами.

В одну из оставшихся трёх позиций можно поставить тройку тремя способами.

Всё в остальных позициях одним способом ставим единицы.

Всего чисел:

$$3 \cdot 4 \cdot C_8^4 = 12 \cdot C_8^4$$

III. Таким образом, общее искомое
кол-во чисел равно:

$$\begin{aligned} & 4 \cdot C_8^4 + 12 \cdot C_8^4 = 16 C_8^4 = 16 \frac{8!}{4!4!} = \\ & = \frac{16 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{16 \cdot 5 \cdot \cancel{6}^2 \cdot 7}{\cancel{2} \cdot 3} = 16 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 16 \cdot 7 \cdot 10 = 1120 \end{aligned}$$

Ответ: 1120

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \sqrt[3]{\ln(xy^2)} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2): y^2 + 3xy - xy - 3x^2 + 4(3x + y) = 0$$

$$y(y + 3x) - x(y + 3x) + 4(y + 3x) = 0$$

$$(y - x + 4)(y + 3x) = 0$$

~~Анализ~~

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$(1): \quad 0 \neq 3: \quad \begin{cases} -y > 0 \\ \frac{x^7}{-y} > 0 \\ -y > 0 \\ x y^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \cdot (-y) > 0 \\ 1 \cdot y^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x^7 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$t = -y > 0$$

$$\left(\frac{x}{t}\right)^{7 \ln(t)} = x^{2 \ln(x t^2)}$$

Прологарифмируем по e:

$$\ln\left(\left(\frac{x}{t}\right)^{7 \ln(t)}\right) = \ln\left(x^{2 \ln(x t^2)}\right)$$

$$\ln(t) \cdot \ln\left(\frac{x}{t}\right)^7 = 2 \ln(x t^2) \ln(x) \quad t > 0, x > 0$$

$$\ln(t) \left[\ln(x^7) - \ln(t) \right] = 2 \left[\ln(x) + \ln(t^2) \right] \ln(x)$$

$$\ln(t) \left[7 \ln(x) - \ln(t) \right] = 2 \left[\ln(x) + 2 \ln(t) \right] \ln(x)$$

$$\ln(t) = 4$$

$$\ln(x) = v$$

$$4(7v - 4) = 2v(v + 2 \cdot 4)$$

$$74v - 4^2 = 2v^2 + 44v$$

$$2v^2 - 34v + 4^2 = 0$$

$$2v^2 - 24v - 4v + 4^2 = 0$$

$$2v(v - 4) - 4(v - 4) = 0$$

$$(2v - 4)(v - 4) = 0$$

$$\begin{cases} u = v \\ u = 2v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(t) = \ln(x) \\ \ln(t) = 2 \ln(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(t) = \ln(x) \\ \ln(t) = 2 \ln(x) \end{cases} \quad \begin{cases} t = x \\ \ln(t) = \ln(x^2) \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} t = x \\ t = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ y = -x^2 \end{cases}$$

I. $\begin{cases} y = -x \\ y = x - 4 \end{cases}$

$$2y = -4$$

$$y = -2$$

$$x = -y = 2$$

$$(x; y) = (2; -2)$$

II. $\begin{cases} y = -x \\ y = -3x \end{cases}$

$$-x = -3x$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{не уг. о.д.з.}$$

III. $\begin{cases} y = -x^2 \\ y = x - 4 \end{cases}$

$$-x^2 = x - 4$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 0$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$\text{не уг. о.д.з.}$$

$$y = x - 4 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} - 4 = \frac{\sqrt{17} - 1 - 8}{2} = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} < 0$$

~~scribble~~
$$\sqrt{17} < \sqrt{81} = 9$$

$$(x; y) = \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \right)$$

IV .
$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$-x^2 = -3x$$

$$x^2 = 3x \quad | :x \neq 0$$

$$x = 3 > 0$$

$$y = -9 < 0$$

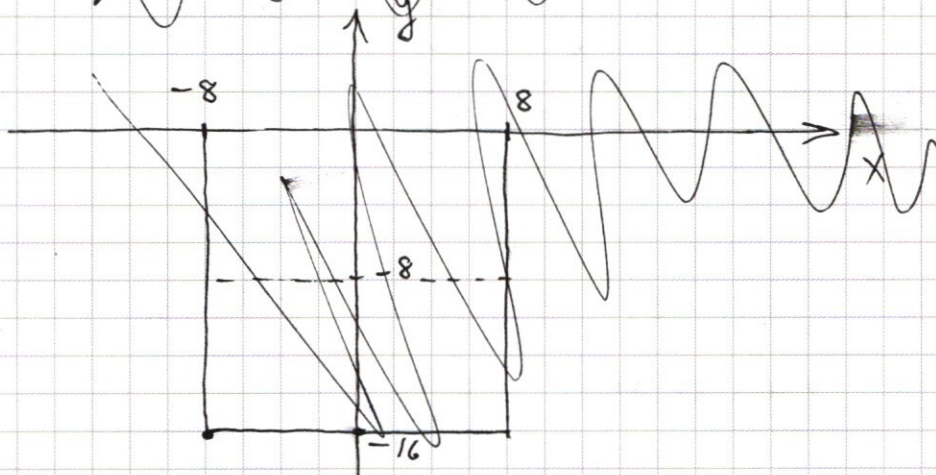
$$(x; y) = (3; -9)$$

Ответ: $(2; -2)$; $\left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \right)$; $(3; -9)$

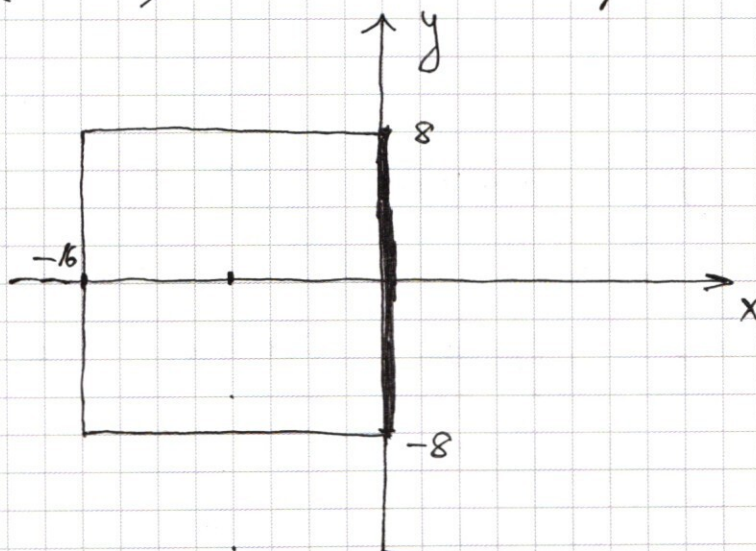
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) - Это квадрат с центром в $(0; 48)$ и стороной 16:



(1) - Это квадрат с центром в $(0; -8)$ и стороной 16:



(2): ~~Если $x > 0, y > 0$, то (2)~~

Система не имеет решений при $x > 0$, т.к. квадрат (1) располагается во II и III четвертях. Поэтому нас не интересует, какое множество задаёт

$$\boxed{x \leq 0}$$

Перепишем (2) в соответствии с тем, что $x \leq 0$:

$$(2): (-x-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$$

$$(x+8)^2 + (|y|-15)^2 = a$$

I. $a < 0$

$(x+8)^2 + (|y|-15)^2 \geq 0 \Rightarrow (2)$ не им. реш.
 $\Rightarrow$ сист. не им. реш.

II. $a = 0$

~~$$(x+8)^2 + (|y|-15)^2 = 0$$~~

$$\begin{cases} x = -8 \\ y = \pm 15 \end{cases}$$

(2) — это две точки $(-8; 15)$ и $(-8; -15)$

Ни одна из них не лежит на квадрате (1) $\Rightarrow$ сист. не им. реш.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

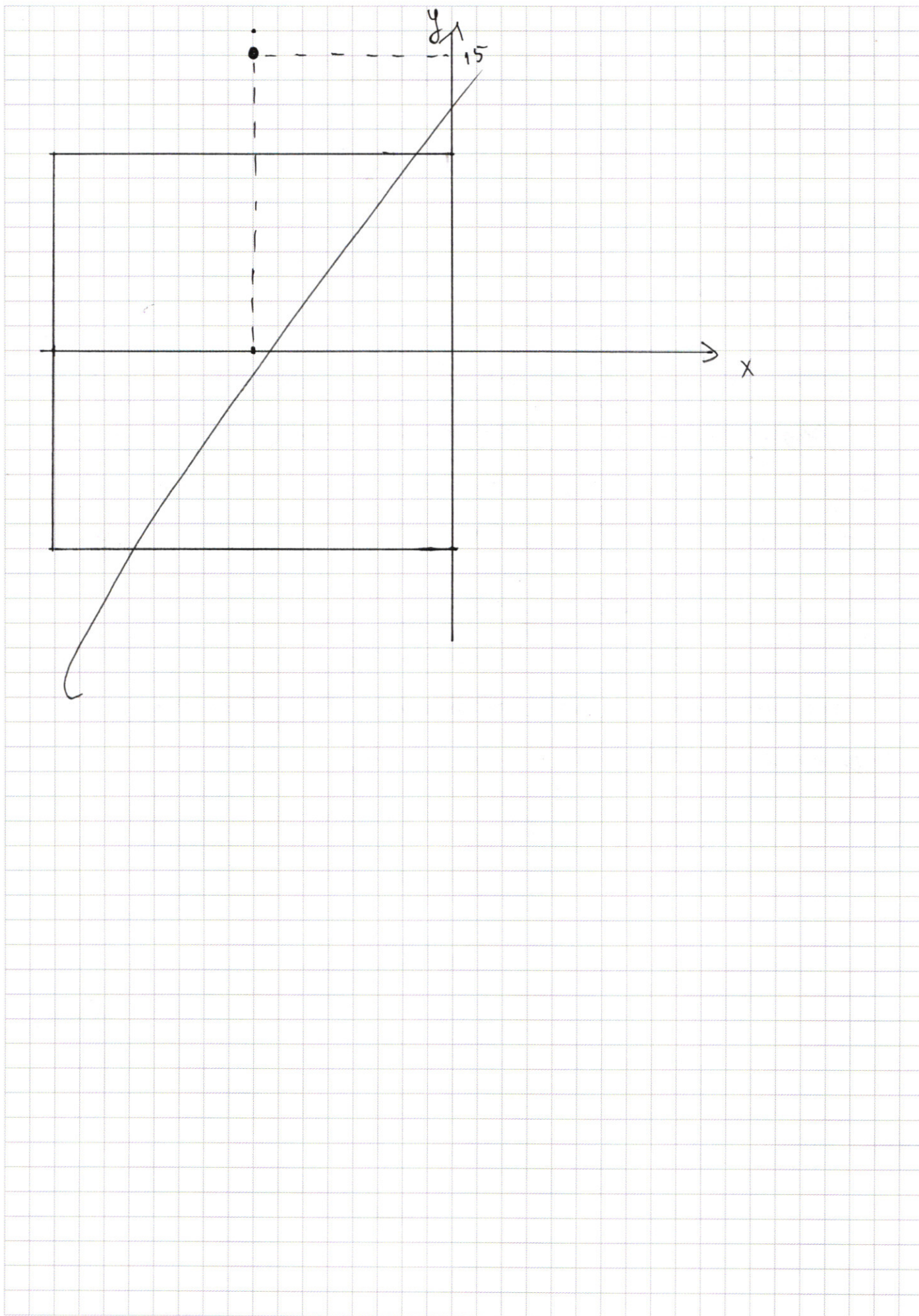
III. $a > 0$ 1) При $x \leq 0$, $y \geq 0$

(2): $(x+8)^2 + (y-15)^2 = a$

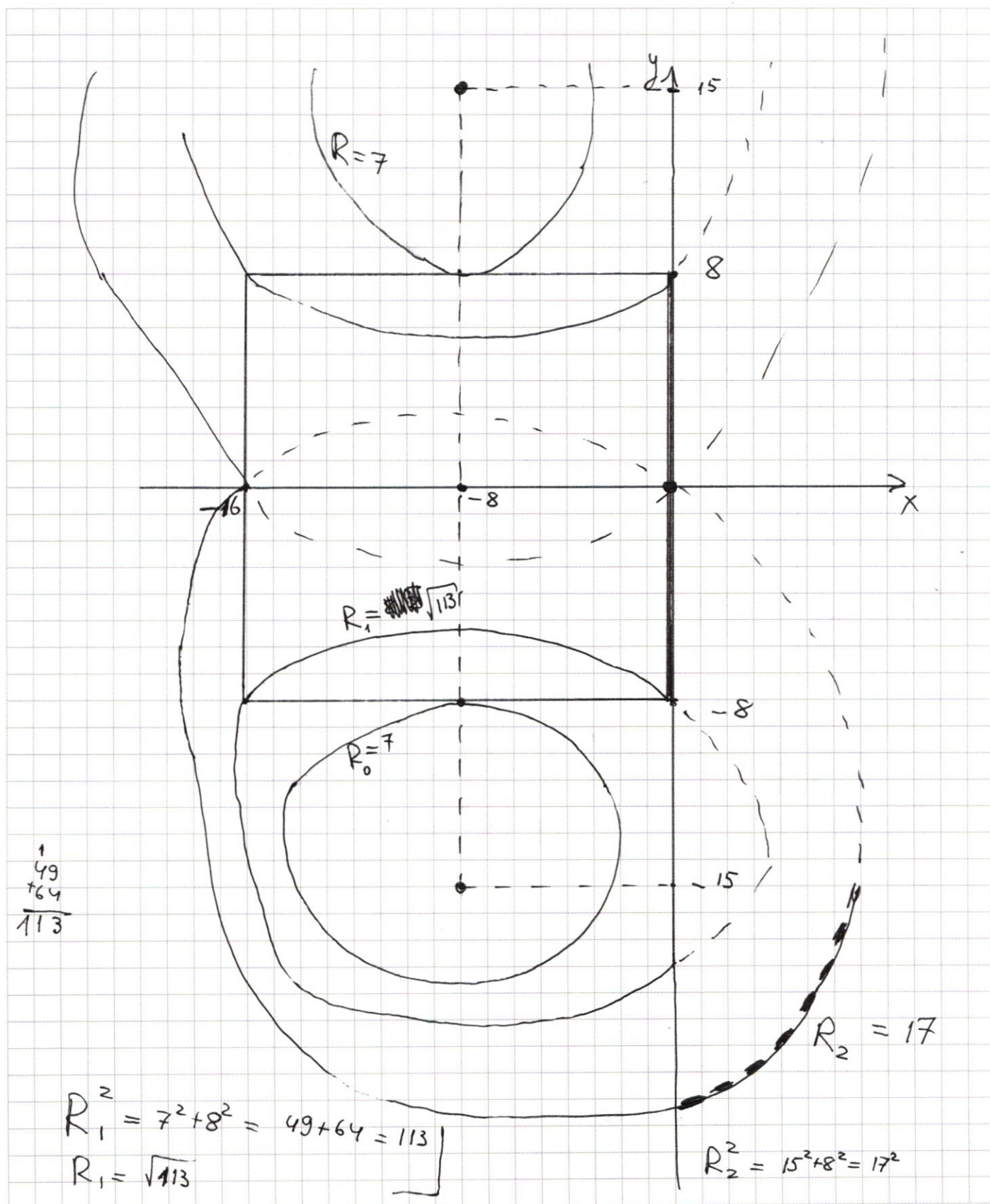
(2) Это часть окружности с центром в $(-8; 15)$ и радиусом $R = \sqrt{a}$, расположенная в которую входят те и только те точки, которые $x \leq 0$, $y \geq 0$

2) При $x \leq 0$, $y < 0$

(2) — это множество точек, симметричное описанному в прошлом пункте от-но оси X .



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



R	количество решений	
$(0; 7)$	0	
7	2	✓
$(7; \sqrt{113})$	4	
$\sqrt{113}$	4	
$(\sqrt{113}; 17)$	4	
17	2	✓
$(17; +\infty)$	0	

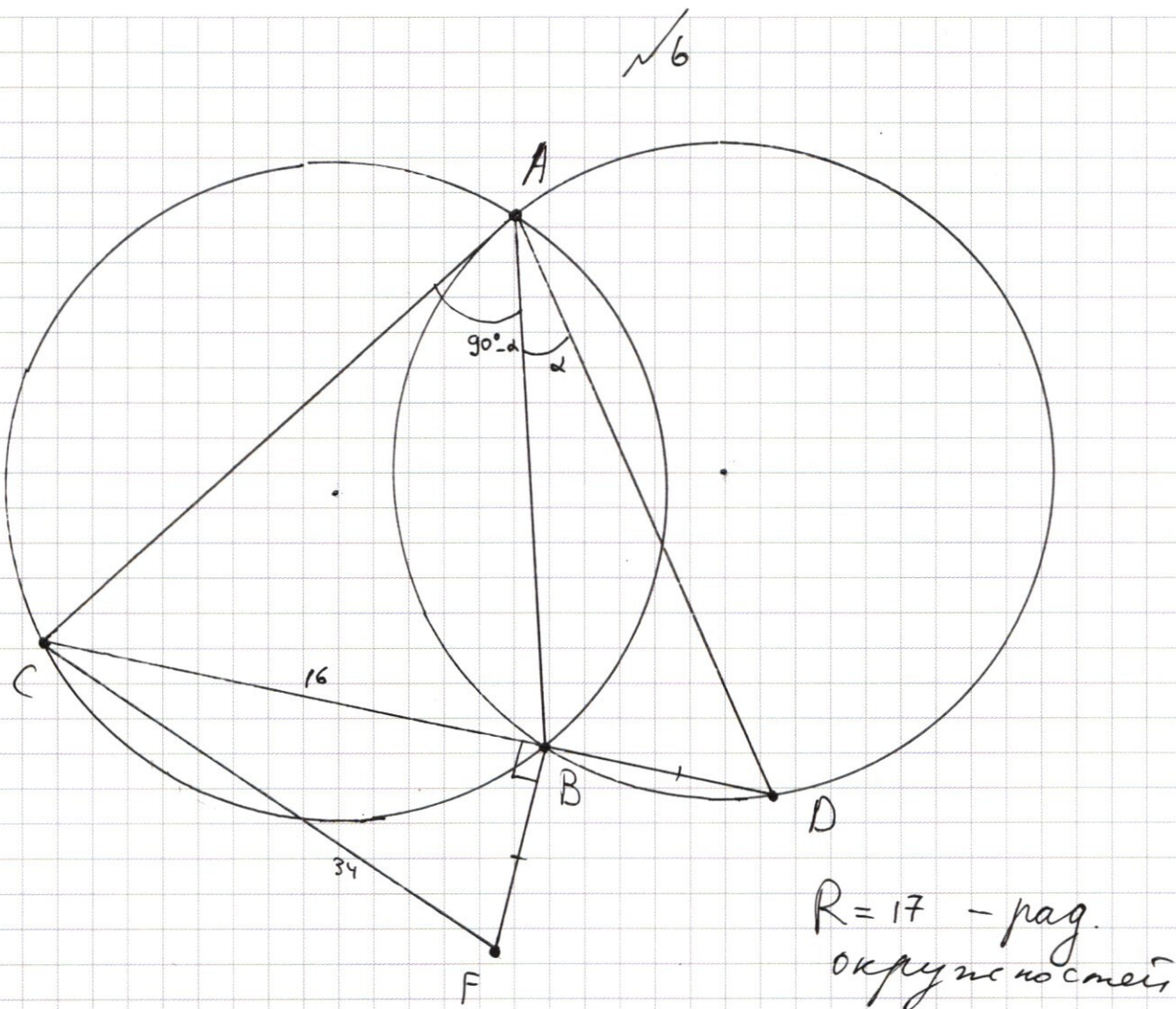
$$\begin{cases} R = 7 \\ R = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = R^2 = 49 \\ a = R^2 = 289 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 49 \\ a = 289 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} a = 49 \\ a = 289 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\angle BAD = \alpha$$

$$\angle CAB = \angle CAD - \angle BAD = 90^\circ - \alpha$$

Это теореме синусов:

$$\Delta ABD : \frac{BD}{\sin \alpha} = 2R$$

$$BD = 2R \sin \alpha$$

$$\Delta ACB: \frac{BC}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R$$

$$BC = 2R \sin(90^\circ - \alpha) = 2R \cos \alpha$$

$$BD^2 + BC^2 = (2R)^2 \sin^2 \alpha + (2R)^2 \cos^2 \alpha = (2R)^2$$

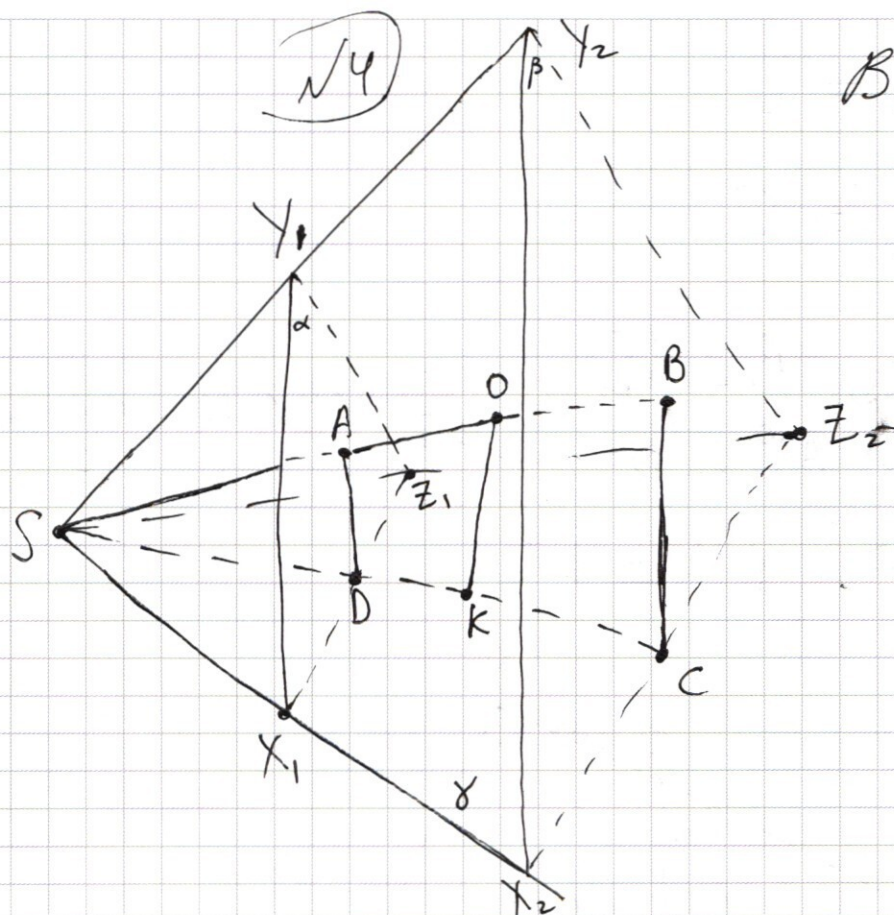
$$CF^2 = BF^2 + BC^2 = BD^2 + BC^2 = (2R)^2 \quad \text{### (meop. Туп } \simeq CBF)$$

$$CF = 2R = 2 \cdot 17 = 34$$

$$(CF = 34)$$

5)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Вб. од. как
на рис.

α, β - плоскости, кас. сфера и перп. SO

Плоск. α кас. сфер. в точке A : $\Rightarrow$ ~~тогда~~
 $\Rightarrow OA \perp \alpha$ а B — в точке B

Но $SO \perp \alpha$, а через точку O
проходит только одна прямая перп. $\alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ прямые SO и OA совпадают $\Rightarrow$
 $\Rightarrow A$ лежит на SO .

Анал. В лем. на SO , $SO \perp \beta$

γ — теснота, которой сфера кас. в точке K .

$$SO \perp \alpha, SO \perp \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

Рассмотрим плоскость φ , содержащую SO и K

$$\varphi \cap X_1 Z_1 = D$$

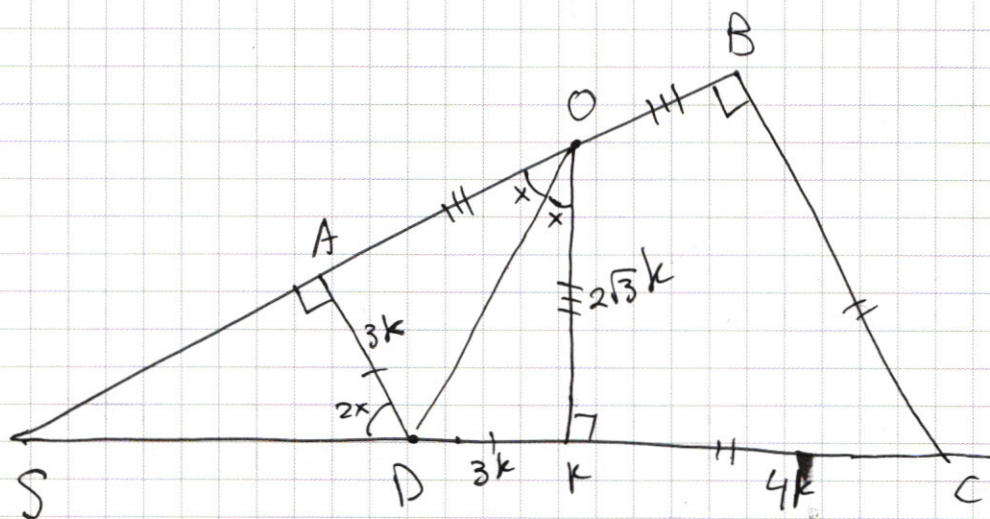
$$\varphi \cap X_2 Z_2 = C$$

$$AB \perp \alpha \Rightarrow AB \perp AD$$

$$AB \perp \beta \Rightarrow AB \perp BC$$

$\Rightarrow ABCD$ - н/у трап.

$$OK \perp \gamma \Rightarrow OK \perp DC,$$



$AD = DK$, $KC = BC$, как отрезки кас. к сферам.

$AO = OB = OK$, как радиусы.

В н/у Δ DOK;

$$OK^2 = DK \cdot KC = 3k \cdot 4k = 12k^2$$

$$R = OK = \sqrt{12} k = 2\sqrt{3} k$$

$$\angle DOK = X$$

$$\operatorname{tg} X = \frac{DK}{OK} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} SOK = \operatorname{tg} 2X = \frac{2 \operatorname{tg} X}{1 - \operatorname{tg}^2 X} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{4}} = 4\sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} KSO = \operatorname{tg} SOK = 4\sqrt{3}$$

$$\angle KSO = \operatorname{arccctg}(4\sqrt{3})$$

$$SK = OK \cdot \operatorname{tg} 2X = 2\sqrt{3} k \cdot 4\sqrt{3} = 8 \cdot 3k = 24k$$

$$\text{Анал. } SL = SM = SK = 24k. \text{ (как кас)}$$

$$AS = AD \cdot \operatorname{tg} 2X = 3k \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3} k$$

$$SD^2 = AS^2 + AD^2 = (12\sqrt{3})^2 k^2 + 9k^2 = 9k^2((4\sqrt{3})^2 + 1)$$

$$SD^2 = 9k^2(48 + 1) = 9 \cdot 49k^2$$

$$SD = 3 \cdot 7k = 21k$$

$$\frac{SD}{SK} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{SK}{SD} = \frac{8}{7}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\alpha \parallel \beta \Rightarrow \text{нужно } S_{X_1 Y_1 Z_1} \sim S_{X_2 Y_2 Z_2}$$

$$\Rightarrow \Delta X_1 Y_1 Z_1 \sim \Delta X_2 Y_2 Z_2$$

$$AD \text{ и } BC - \text{соотв. элементы в } \Delta X_1 Y_1 Z_1 \text{ и } \Delta X_2 Y_2 Z_2 \Rightarrow \left(\frac{AD}{BC}\right)^2 = \frac{S_{X_1 Y_1 Z_1}}{S_{X_2 Y_2 Z_2}}$$

$$\left(\frac{AD}{BC}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Пусть } AD = 3k \Rightarrow BC = 4k$$

$$\Downarrow \\ DK = 3k$$

$$\Downarrow \\ KC = 4k$$

$$AO = AD, OK = DK \Rightarrow \text{нужно } \Delta DAO = \Delta DKO$$

$$\text{Аналог } \Delta OKC = \Delta OBC$$

$$\angle AOD = \angle DOK$$

$$\angle OKC = \angle OCB$$

$$\angle AOD + \angle DOK + \angle KOC + \angle COB = 180^\circ$$

$$2\angle DOK + 2\angle KOC = 180^\circ$$

$$\angle DOK + \angle KOC = 90^\circ \Rightarrow \angle DOC = 90^\circ$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8
 $\triangle KLM$ гомотетичен $\triangle X, Y, Z$, с
центром в точке S и коэф $\left(\frac{SK}{SD}\right)$

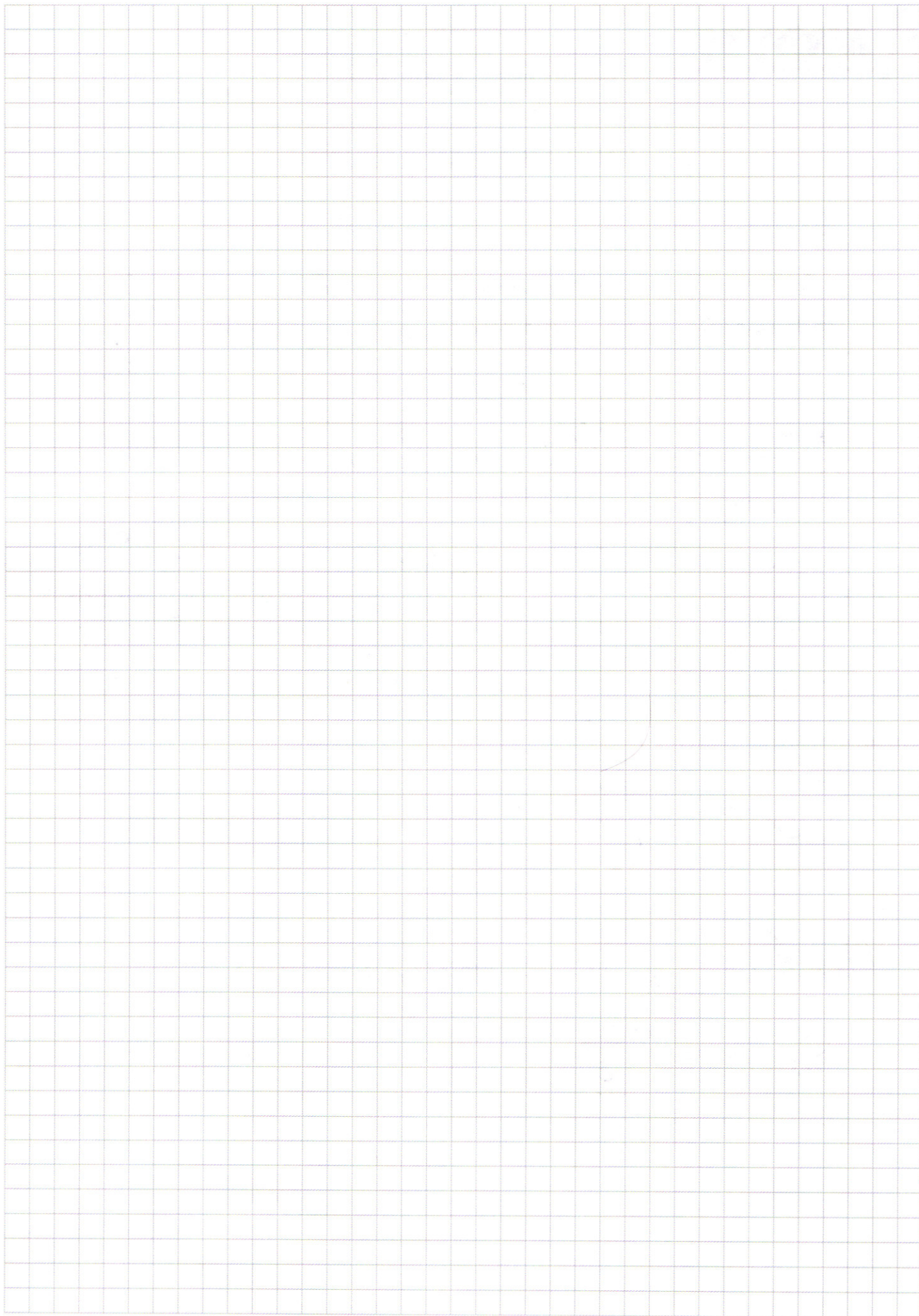
$$\frac{S_{KLM}}{S_{X,Y,Z}} = \left(\frac{SK}{SD}\right)^2 = \left(\frac{8}{7}\right)^2$$

$$S_{KLM} = S_{X,Y,Z} \left(\frac{8}{7}\right)^2 = 9 \left(\frac{8}{7}\right)^2 = \frac{9 \cdot 8^2}{49}$$

$$S_{KLM} = \frac{576}{49}$$

$$\text{Отв: } \angle KSD = \arctg(4\sqrt{3})$$

$$S_{KLM} = \frac{576}{49}$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline 81 \end{array}$$

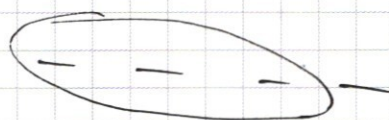
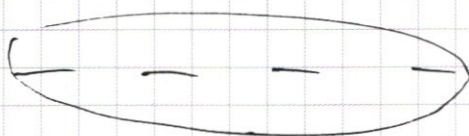
$$50^2 = \frac{2500}{27}$$

$$25^2 \cdot 100 = 62500$$

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$= 5$$

$$\begin{array}{r} 6417 \\ \underline{63} \end{array}$$



$$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

$$\begin{array}{r} 64827 \\ \underline{63} \\ 18 \\ \underline{14} \\ 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 47 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$34567 \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cos(5x + 2x) + \cos(5x + 2x) \\ & 2\cos 5x \cdot \cos 2x + 2\cos 5x \sin 2x \\ & \sin(5x + 2x) - \sin(5x - 2x) \end{aligned}$$

$$y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x$$

$$- 3x(x-4)$$

~~$$+10x+4$$~~

$$3x$$

$$x-4$$

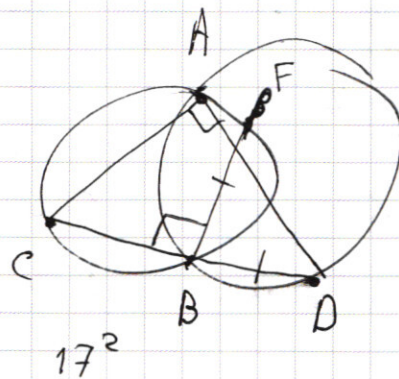
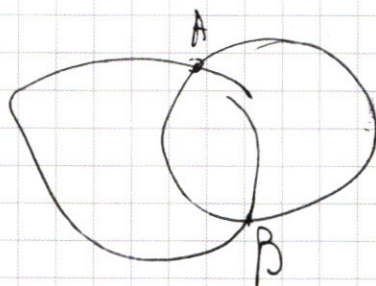
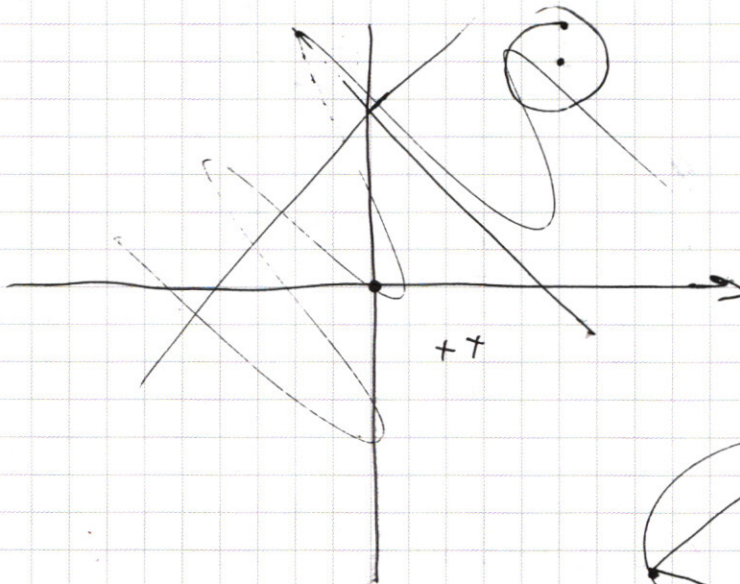
$$-3x$$

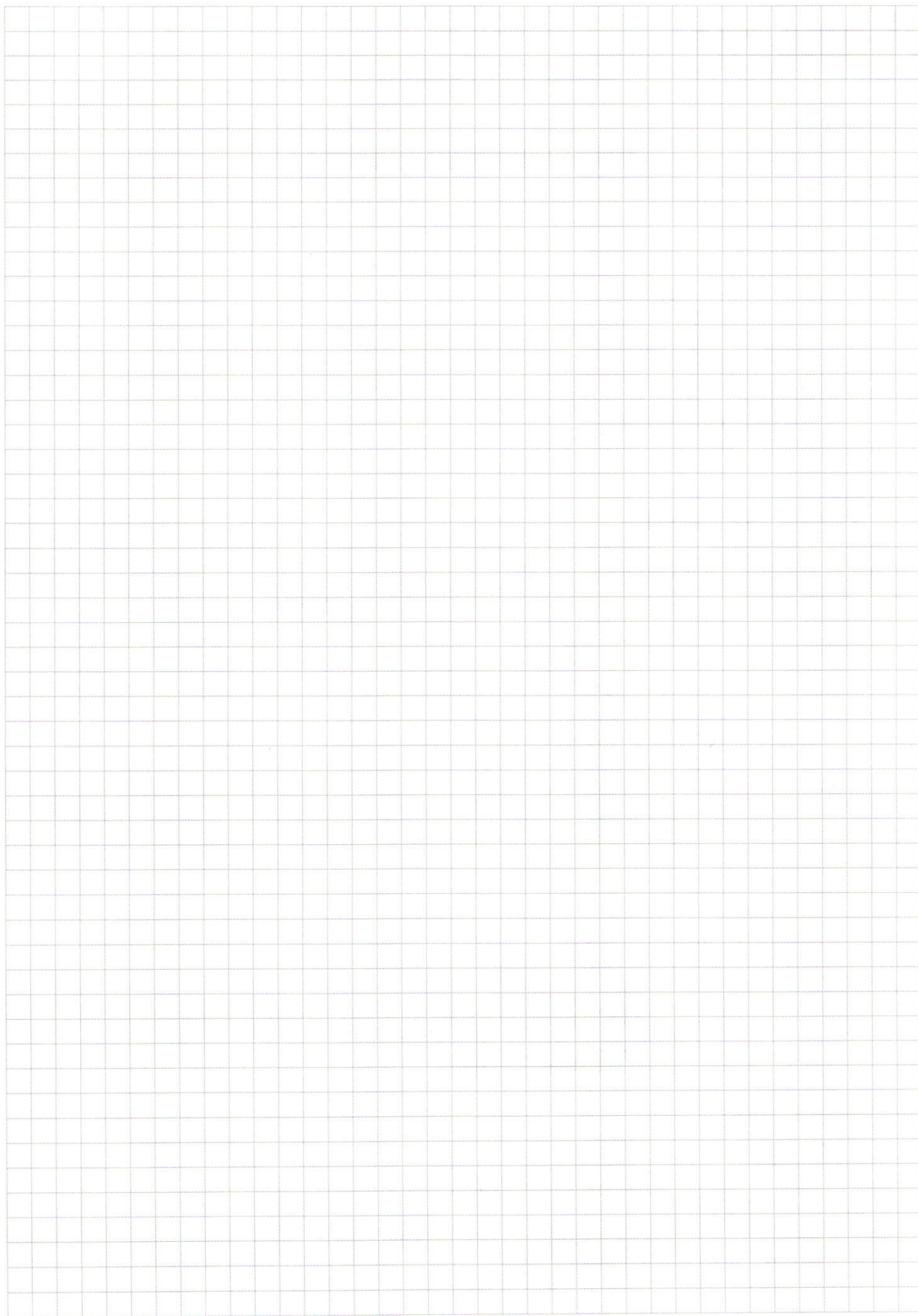
$$a=R^2$$

$$y+3x$$

$$\ln(t) \ln\left(\frac{x^7}{t}\right) = 2\ln\left(x\frac{1}{t^2}\right) \ln(x)$$

$$-\frac{17+1-2\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}-9}{2}$$

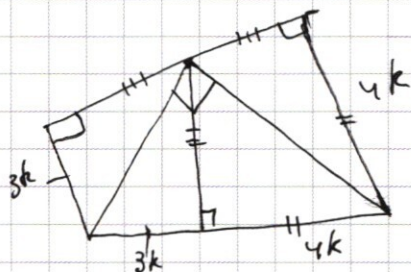




☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

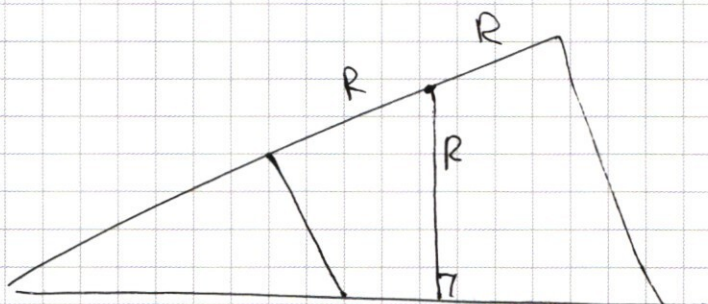
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$R^2 = 3k \cdot 4k = 12k^2$$

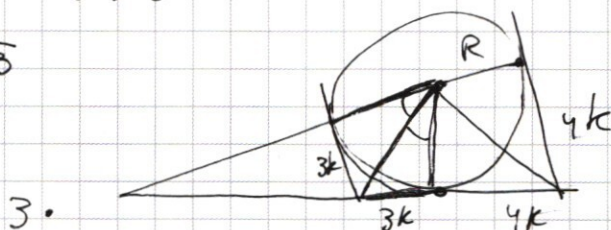
$$(2R)^2 = 49k^2 - k^2 = 48k^2$$

$$9k^2 + 48k =$$



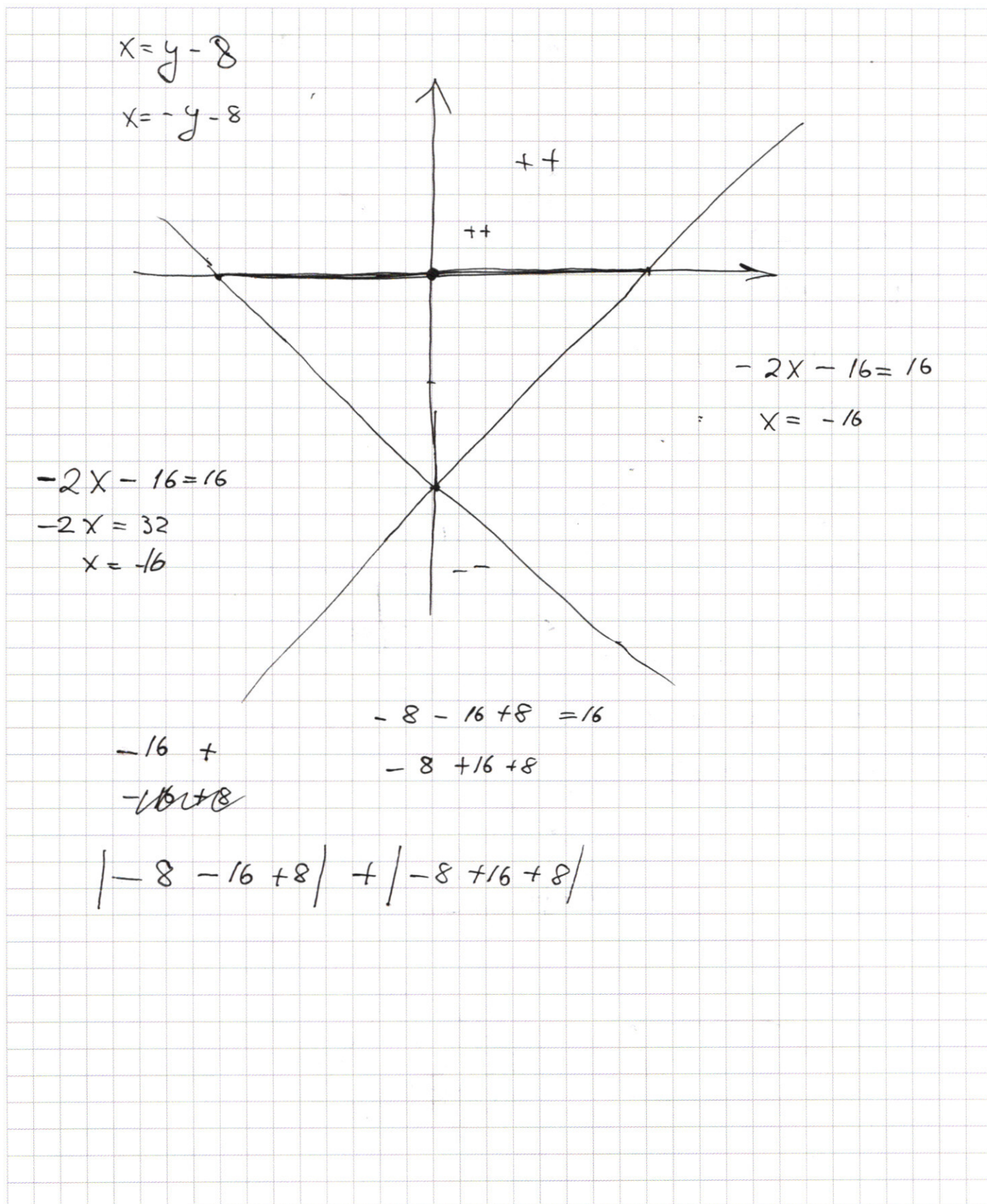
$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 39 \\ \hline 576 \end{array}$$

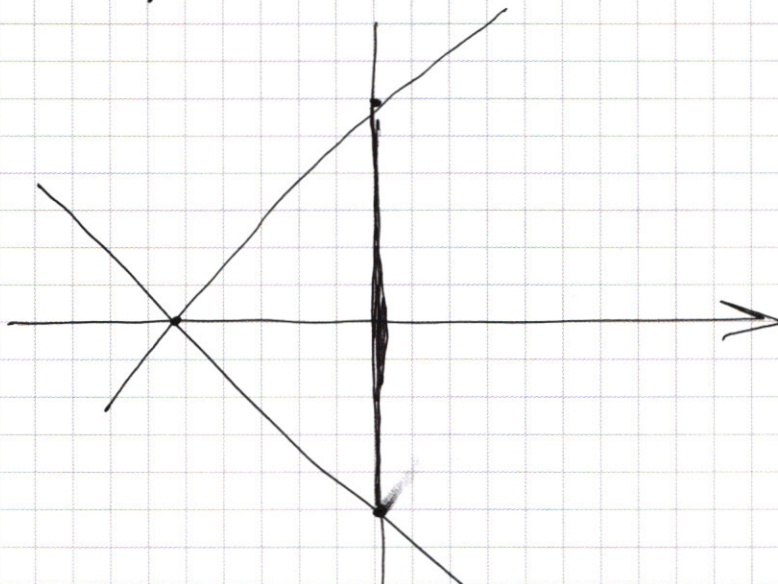
$$24\sqrt{3}$$



$$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{4}} = 4\sqrt{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$y = -x - 8$$

$$y = x^2 + 8x$$

$$-16 + 8 = -8$$

$$-8$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$BD = 2R \sin \alpha$$

$$CB = 2R \cos \alpha$$

$$BD^2 + CB^2 = (4R)^2$$

