

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(N 2)

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

положим $\varphi = 7x + \frac{\pi}{4}$ и $\psi = \frac{\pi}{4} - 3x$, имеем $4x = \varphi + \psi - \frac{\pi}{2}$, и тогда

$$\sqrt{2} \sin \varphi + \sqrt{2} \sin \psi + \sqrt{2} \cos \left(\varphi + \psi - \frac{\pi}{2} \right) = 0, \text{ или}$$

$$\sin \varphi + \sin \psi + \sin (\varphi + \psi) = 0$$

$$2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi - \psi}{2} + 2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2} = 0 \quad | :2$$

$$\sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \left(\cos \frac{\varphi - \psi}{2} + \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \right) = 0 \quad | :2$$

$$\sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} = 0, \text{ откуда заключаем, что}$$

$$\begin{cases} \varphi + \psi = 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \varphi = \pi + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \psi = \pi + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{2} - 3\psi$$

$$\varphi = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\psi = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3\psi + 7\psi = 21x + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} - 21x = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi + \psi = \frac{7\psi - 3\psi + \frac{5\pi}{2}}{7} = \frac{4\psi + \frac{5\pi}{2}}{7} = 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \varphi = \pi + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{2} - 3\psi = 7\pi + 14\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi = -\frac{5\pi}{8} + \frac{7}{2}\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \varphi = \pi + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \psi = -\frac{3\pi}{2} + \frac{17}{3}\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} \varphi = \frac{-5\pi + 28\pi n}{8} = \frac{28n - 5}{8}\pi - \text{нечетное число } n \\ \psi = (1 + 2n)\pi - \text{четное число } n \\ \varphi = \frac{-9 + 28\pi n}{6} - \text{нечетное число } n \end{cases}$

пусть $\exists m, n \in \mathbb{Z} : \frac{28n - 5}{8} = \frac{-9 + 28m}{6}$, тогда получим

$$84n + 21 = 112m \Rightarrow m = 3m_1 \quad (m_1 \in \mathbb{Z}), \text{ и } 28n + 7 = 7(4n + 1) = 112m_1,$$

и откуда $4n + 1 = 16m_1$. Но левая часть нечетна, правая четна!

Значит, решение не переписываем. Тогда найдем

$$x = \frac{4 - \frac{n}{4}}{7} = \begin{cases} \frac{1}{7} \left(\frac{28n-5}{8} n - \frac{n}{4} \right) = \frac{1}{7} \left(\frac{28n-5-2}{8} \right) n = \frac{4n-1}{8} n \\ \frac{1}{7} \left(n+2n - \frac{n}{4} \right) = \left(\frac{2n+1}{7} - \frac{1}{28} \right) n = \frac{8n+3}{28} n \\ \frac{1}{7} \left(\frac{28n-9}{6} - \frac{1}{4} \right) n = \frac{1}{7} \left(\frac{56n-18-3}{12} \right) n = \frac{8n-3}{12} n \end{cases}$$

Ответ = $\begin{cases} x = \frac{4n-1}{8} \pi \\ x = \frac{8n+3}{28} \pi \\ x = \frac{8n-3}{12} \pi \end{cases} (n \in \mathbb{Z})$

Прим. $43,7 \in \mathbb{P}$ - разложение не корректно
Заметим, что $64827 = 3 \cdot 7^4$. Там или $\forall a, b \in \mathbb{N}: 3^a \cdot 5^b \geq 3 \cdot 5^7 9$,
то найдем, что наименьшее число - это $1, 3, 7$. Там или все цифры
8, а $3+4=7 < 8$, то среди цифр есть ровно одна единица,
3 тройки, 4 семёрки, нулей среди них нет, $\Rightarrow$ любая цифра
может быть на любом из 8 мест. Число ~~разно~~ ^{описанных} ^{условий} чисел

$N = 8 \cdot C_7^3$, т.к. 8 - число мест для единицы

$$N = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280.$$

C_7^3 - число вариантов размещения
на 3 местах $\sqrt[3]{3}$ тройки (порядок
не важен)
 $C_4^4 = 1$ - число способов разместить
оставшиеся 4 места семёрками
(порядок не
важен)

Ответ: 280 чисел

Примечание. Символ для "размещения" цифру "1", затем цифри
"3" и "7". Ответ порядок размещения цифр не важен
при подсчёте, $\Rightarrow$ ответ верен.

Прим.

Пусть $z = -y > 0$, тогда имеем по ОДЗ $x > 0$, и $y < 0$, и

$$\left(\frac{x^7}{z} \right)^{\ln(z)} = x^{2 \ln(xz^2)} \quad (1)$$

$$z^2 + 12x - 2xz - 3x^2 - 4z = 0 \quad (2) \Leftrightarrow (z-x)^2 - 4x^2 + 12x - 4z = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{28m - 5}{8} = \frac{-5 + 28m}{6} \quad | \cdot 24$$

$$84m - 15 = -36 + 4 \cdot 284 = -36 + 1124$$

$$84m + 21 = 112n$$

$$n \geq n_1$$

$$28m + 7 = 112m$$

$$\left(1 + \frac{3}{s}\right) \ln(s) = 3 + \ln(3)$$

$$3 \cdot 2^{\log(3^5)} \rightarrow 3^{\log 3}$$

$$4n+21=12m$$

$$= f(4u+1) \cdot (26u, = 4u+1)$$

⑤
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 9 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 16|x| - 30|y| + 17^2 = 0$$

$$|y + (x+8)| + |y - (x+8)| = 16$$

$$82 + 17 = 65 + 215 = 215$$

$$(1x + 1y - 15)^2$$

$$\begin{cases} x+y \geq -8 \\ x-y \geq -8 \end{cases} \Rightarrow x+y+8+x-y+8 \geq 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq -(x+8) \\ y \leq (x+8) \end{cases}$$

$$3^{20-1} = \frac{3^{20}-1}{4137}$$

$$\begin{array}{r} \times 727 \\ \hline 53 \\ \times 26 \\ \hline 558 \\ + 186 \\ \hline 558 \end{array} \quad \begin{array}{l} \log(3) (x_0 - 1) \log(3) = \\ 558 \rightarrow \log(3)^{2x} - 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -7 \\ -8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x & -7y \\ -8x & -7y \end{pmatrix}$$

$y = 16$
 $y = 8$
 $x \in [-10; 0]$

$$x \rightarrow y \leq (x+10) - 10$$

13) - упрощение

Прологарифмируем (2) по основанию e:

$$\ln(z) \cdot (7\ln(x) - \ln(z)) = \ln(x) \cdot (2\ln(x) + 4\ln(z)), \text{ если}$$

$$a = \ln(x) \text{ и } b = \ln(z), \text{ то имеем } 7ab - b^2 = 2a^2 + 4ab, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 3ab + b^2 = 0, \Rightarrow \begin{cases} b=a \\ b=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(z) = \ln(x) \\ \ln(z) = 2\ln(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=x \\ z=x^2 \end{cases}$$

Ч.1 $z=x$, и в (2): $0^2 - 4x^2 + 12x - 4x = 0, \Rightarrow x \cdot (4x - 8) = 0, \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \leq 0 \\ x=2 > 0 \end{cases}, \Rightarrow (x; y) = (x; -z) = (2; -2)$$

Ч.2 $z=x^2$, и в (2): $(x^2 - x)^2 - 4x^2 + 12x - 4x^2 = 0$, или

$$x \cdot [x^3 - 2x^2 + x - 8x + 12x] = 0, \text{ или } x \cdot \cancel{(x^3 - 10x^2)} \\ x(x^3 - 2x^2 - 7x + 12) = 0,$$

$$\text{или } \begin{cases} x \cdot (x-3) \cdot (x^2 + x - 4) = 0, \\ x > 0 \text{ - не 0D3} \end{cases} \text{ Тогда } \begin{cases} x=3 > 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=3^2=9 \\ z = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \text{ Тогда}$$

$$(x; y) = (3; -9) \text{ или } (x; y) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 9}{2}\right).$$

Order: $(x; y) = (2; -2)$

$$(x; y) = (3; -9)$$

$$(x; y) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}; \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}\right).$$

15)

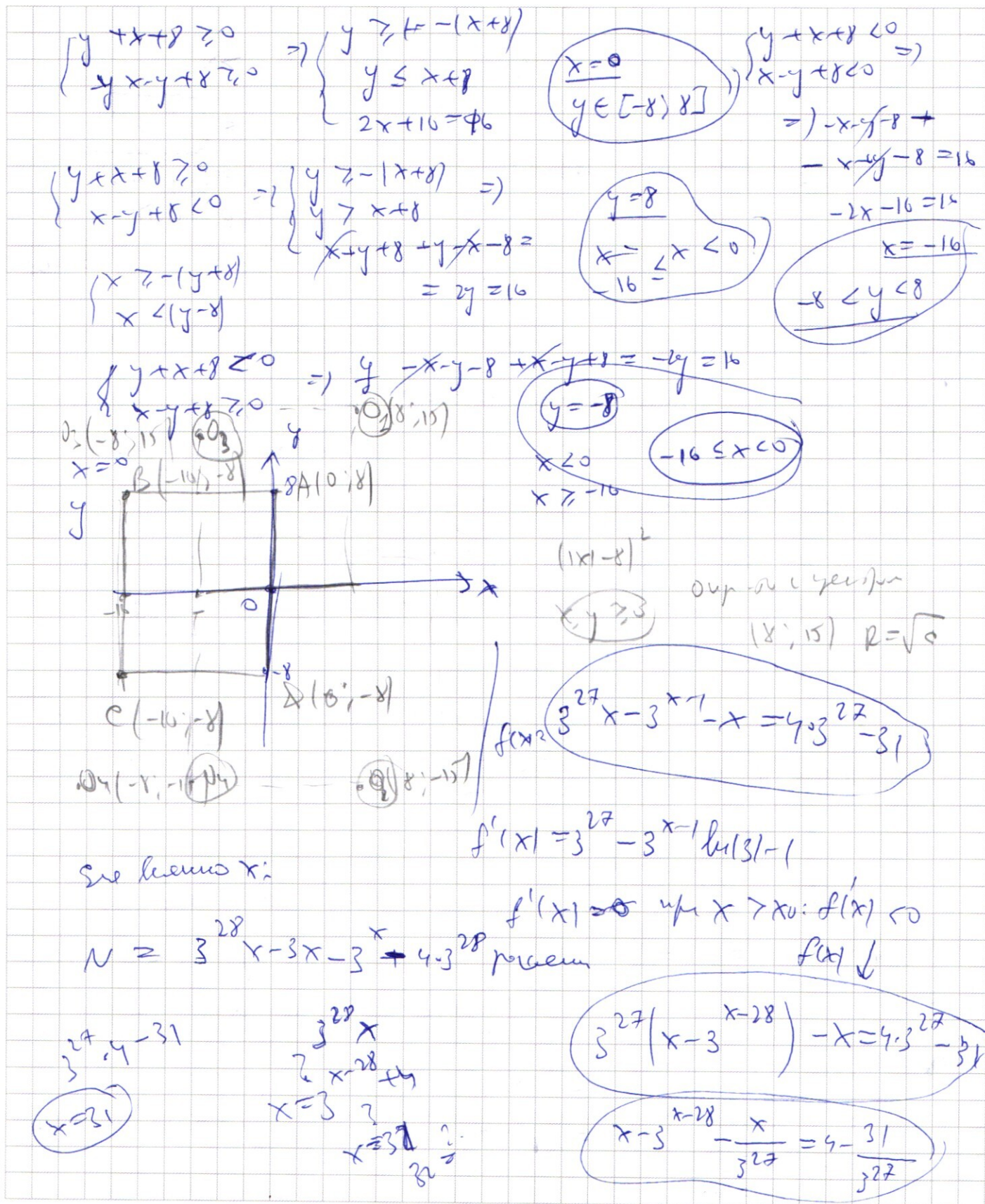
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2) \end{cases} \text{ Разкрываю модули в уравнении (1),} \\ \text{илим, то по решению - точки}$$

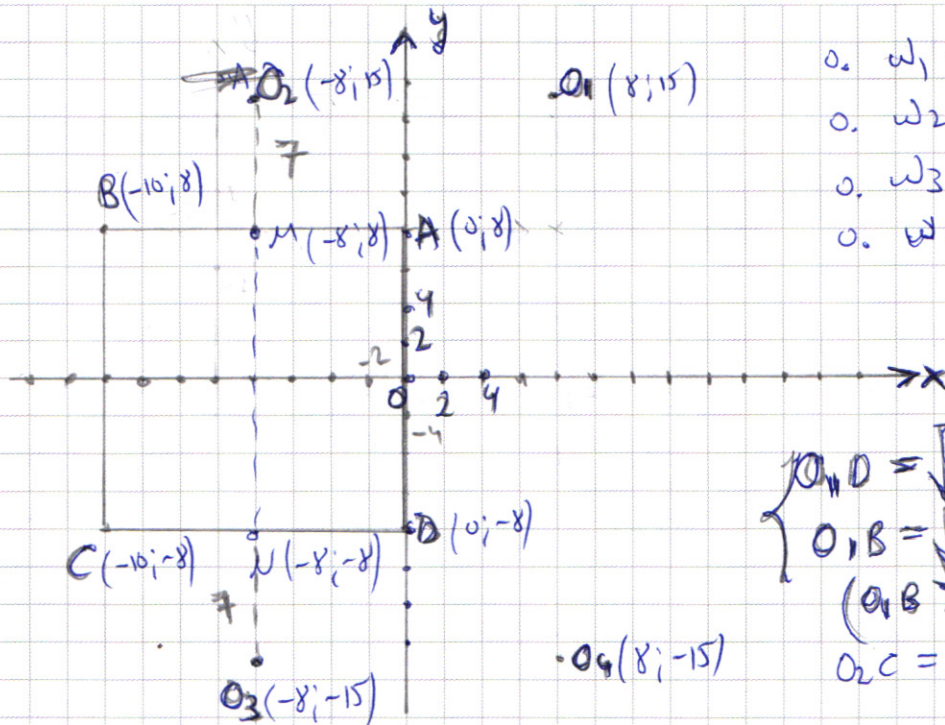
границ квадрата ABCD, где A(0; 8), B(-16; 8), C(-16; -8), D(0; -8)

Уравнение (2) задает окружность с центром O₁(8; 15),

O₂(-8; 15), O₃(-8; -15), O₄(8; -15) и радиусами, равными $R = \sqrt{a}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





- о. ω_1 — центр O_1
- о. ω_2 — центр O_2
- о. ω_3 — центр O_3
- о. ω_4 — центр O_4

$$\begin{cases} O_1D = \sqrt{8^2 + 23^2} \\ O_1B = \sqrt{4^2 + 7^2} \end{cases} \quad (O_1B > O_1D)$$

$$O_2C = \sqrt{8^2 + 23^2} = O_1D < O_1B$$

Существует ли 2 окружности, если ω_2 и ω_3 касаются $ABCD$ отн-но Ox

Т.к. окружности вписаны в прямоугольник $ABCD$ симметричны относительно Ox и Oy , то достаточно рассмотреть окружности в верхней половине. Пусть ω_1 и ω_2 касаются $ABCD$ одну общую точку. Это происходит, если ω_2 касается BA (при этом $\omega_1 \cap ABCD = \emptyset$) или если $\omega_1 \ni C$ (при этом $\omega_2 \cap ABCD = \emptyset$). Действительно, при $R \leq 7$ $\omega_1 \cap ABCD \neq \emptyset$, $\omega_2 \cap ABCD = \emptyset$

2) при $R = 7$: touches only $M = \omega_2 \cap ABCD$, $\omega_1 \cap ABCD = \emptyset$

3) при $7 < R \leq \sqrt{(6+7)^2 + 8^2} = \sqrt{23^2 + 8^2} = \sqrt{O_2M^2 + CM^2}$: ω_2

касается $ABCD$ в 2 точках,

4) при $\sqrt{O_2M^2 + CM^2} < R$: $\omega_2 \cap ABCD = \emptyset$, и надо, чтобы

$|\omega_1 \cap ABCD| = 1$, $\Rightarrow \omega_1 \ni C$. Действительно, при $R < OC$, но

$R > \sqrt{O_2M^2 + CM^2}$ у нас ω_1 касается $ABCD$ в 2 точках.

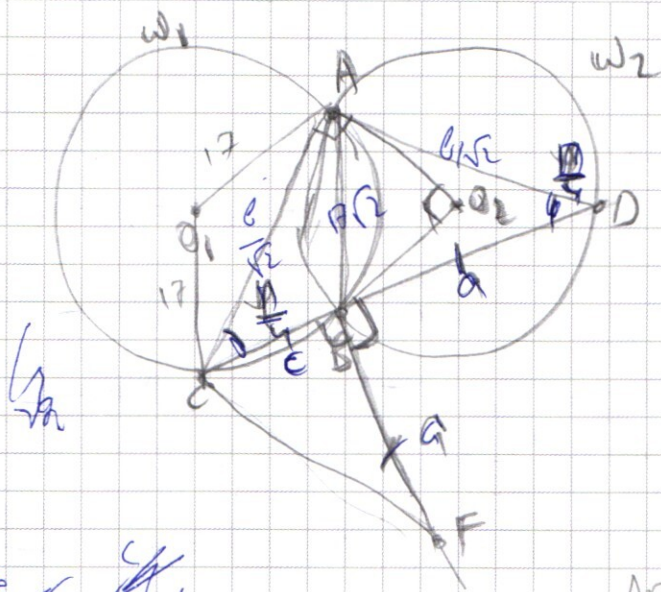
($OA < \sqrt{O_2M^2 + CM^2} < OC$)

Тогда имеем:

Other: $\begin{cases} a = 49 \\ a = 1095 \end{cases}$

$$\begin{cases} R = 7 = O_2M \\ R = OC = \sqrt{24^2 + 23^2} > O_2C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 49 \\ a = 24^2 + 23^2 = 1105 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$R=17$$

$$AB=17\sqrt{2}$$

$$CF=?$$

$$BC=16$$

$$S_{\Delta ACF}=?$$

$$\angle ACB = \angle APB = \frac{AB}{R}$$

$$\frac{c}{\sin \varphi} = \frac{c}{\sin \varphi} = b$$

$$a^2 = AB^2 + AD^2 -$$

$$-2AB \cdot AD \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

$$CB=16$$

$$a=16$$

$$a+b$$

$$CB$$

$$AC=AD=BC=? \quad AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \frac{\pi}{2}$$

$$2 \cdot 17^2 = \frac{b^2}{2} + c^2 - 2 \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{b^2}{2} + c^2 - bc =$$

$$= \frac{b^2}{2} + a^2 - bc$$

$$c^2 - bc = a^2 - bc$$

$$c^2 - a^2 + b(a-c) = 0$$

$$(c-a)(c+a-b) = 0$$

$$c=a$$

$$b=a+c$$

$$2AB^2 = b^2 +$$

$$+ c^2 + c^2 - b(ac) =$$

$$= a^2 + c^2$$

$$\frac{b^2}{2} + c^2 - bc =$$

$$= \frac{b^2}{2} + a^2 - bc$$

$$c^2 - bc = a^2 - bc$$

$$c^2 - a^2 + b(a-c) = 0$$

$$(c-a)(c+a-b) = 0$$

$$c=a$$

$$b=a+c$$

$$2AB^2 = b^2 +$$

$$+ c^2 + c^2 - b(ac) =$$

$$= a^2 + c^2$$

$$c^2 - bc = a^2 - bc$$

$$c^2 - a^2 + b(a-c) = 0$$

$$(c-a)(c+a-b) = 0$$

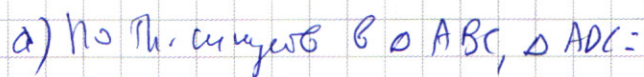
$$AB^2 = \frac{b^2}{2} + c^2 - 2c \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b^2}{2} + c^2 - bc$$

$$AB^2 = \frac{b^2}{2} + c^2 - bc \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b^2}{2} + c^2 - bc$$

$$2AB^2 = b^2 +$$

$$+ c^2 + c^2 - b(ac) =$$

$$= a^2 + c^2$$



$$) \frac{AB}{\sin \angle AOB} = 2R = 34$$

$$\} \angle AEB + \angle ADB = n - \angle CAD = \frac{n}{2}$$

$\angle ACB, \angle ADB$ - angles subtended by the same chord AB at the circumference $\Rightarrow$

на пр. рассмотрим $AB = 0,1A \cdot \sqrt{2} = 17\sqrt{2}$, и

или $a = bc$, $b = BD$, то имеем в $\triangle ADC$: $AC = AD = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$, ч

по Th. Канторов в ΔACB , $\Delta ADB =$

$$\begin{cases} AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{(a+b)^2}{2} + a^2 - (a+b)a \\ AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{(a+b)^2}{2} + b^2 - (a+b)b \end{cases}$$

Сложнее за ур-е, и извлечь

$$2AB^2 = (a+b)^2 + a^2 + b^2 - (a+b)(a+b) = a^2 + b^2$$

и тогда $CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2AB^2} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 17^2} =$

$$= 2 \cdot 17 = 34$$

Order: $CF = 34$.

d) unknown $BC = 16$, $\angle C = 60^\circ$: $c = \sqrt{a^2 - bc^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 2\sqrt{17^2 - 8^2} =$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30, \text{ u. wenn } \varphi = \angle \text{BerF}, \text{ so } \tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{1+17}} = \sqrt{\frac{8^2}{8^2+15^2}} = \frac{8}{17}, \sin \varphi = \sqrt{1-\cos^2 \varphi} = \frac{15}{17}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{\Delta} ACF = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{2}} \cdot 34 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin\varphi + \cos\varphi) =$$

$$= \frac{17}{2} \cdot (16 + 30) \cdot \left(\frac{8}{17} + \frac{15}{17} \right) = \cancel{17} \cdot 23 \cdot \frac{23}{\cancel{17}} = 529 \quad \underline{\text{Order: } S_{\text{DAIF}} = 529}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $\cos 7x + \cos 3x + \sin 47x - \sin 43x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta) =$

$= 2 \cos \alpha \sin \beta =$

$= 2 \cos 5x \sin 2x$

$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) +$

$+ \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(-3x + \frac{\pi}{4}) +$

$+ \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$

$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$

$\begin{cases} \varphi = 7x - \frac{\pi}{4} \\ \psi = 3x + \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\cos \varphi + \cos \psi + \sqrt{2} \cos \varphi$

$= \sqrt{2} \cdot 2 \cos 5x \cos \frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2} = 2\sqrt{2} \cos 5x \cos(2x - \frac{\pi}{4})$

$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

③ $\begin{cases} (-\frac{x^7}{y}) \ln(-y) = x^{2 \ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$

$\text{ДЗ: } y < 0$
 $x > 0$

$\begin{cases} z = -y \\ \left(\frac{x}{z}\right) \ln(z) = x^{2 \ln(xz^2)} \end{cases}$

$z^2 - 2xz - 3x^2 + 12x - 4z = 0$

$7 \ln(z) \ln(x) - \ln^2(z) = 2 \ln^2(x) + 4 \ln(z) \ln(x)$

$3 \ln(z) \ln(x) = 2 \ln^2(x) + \ln^2(z)$

$a = \ln(x)$

$b = \ln(z)$

$3ab = 2a^2 + b^2$

$0 = 2a^2 - 3ab + b^2 = (2a - b)(a - b) \Rightarrow \begin{cases} b = a \\ b = 2a \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \ln(z) = \ln(x) \\ \ln(z) = 2 \ln(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ z = x^2 \end{cases}$

$(z - x)^2 - 4x^2 + 12x - 4z = (z - x)^2 - 4(x^2 - 3x + z)$
1) $z = x, \Rightarrow x^2 - 3x + x = 0, \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$
2) $z = x^2, \Rightarrow (x^2 - x)^2 - 4(x^2 - 3x) = 0$

$$(x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - 3x) = 0$$

$$0 = x \cdot [x(x-1)^2 - 4(2x-3)] = x \cdot [x^3 - 2x^2 + x - 8x + 12] = x \cdot [x^3 - 2x^2 - 7x + 12] = 0$$

$$x = -2 \quad -8 - 2 \cdot 4 + 14 + 12 = 0$$

$$x = 3: 27 - 18 - 21 + 12 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 7x + 12 \quad | x-3 \\ \underline{-x^3 + 3x^2} \\ 5x^2 - 7x + 12 \\ \underline{-5x^2 + 15x} \\ 8x + 12 \\ \underline{-8x + 24} \\ 36 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ y &= \frac{-5n \pm \sqrt{17}}{2} \\ y &= \frac{-5n}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \\ y &= \frac{-5n}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \\ y &= \frac{-5n}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

① 8-значных чисел, цифр = 64827

$$a_1 \dots a_8 = 64827 = 9 \cdot 7203 = 3^3 \cdot 2401 = 3^3 \cdot 7^4 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$\text{если, то если } a, b \in \mathbb{N}, \text{ то } 3^a \cdot 7^b \geq$$

$$= 3^3 \cdot 7^4 \cdot 7^4 = 3^3 \cdot 7^8$$

⇒ каждая цифра - степень 3 или 7 с неубывающей.

При этом $3+4=7 \leq 8$, то одна из цифр - 1.

Остальные: 3 пятёрки и 4 четвёрки

$$\begin{aligned} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 &= C_7^3 \cdot C_4^4 \\ \text{сл 1} & \quad \text{сл 3} \quad \text{сл 7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \cdot C_7^3 &= C_8^3 \cdot 5 \cdot 1 \\ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \end{aligned}$$

$$\# = 8 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4$$

$$8 \cdot C_7^3 \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = 280$$

$$\textcircled{2} \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(\cos 7x - \sin 3x) + (\cos 3x + \sin 7x) =$$

$$\sqrt{2} \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 3x$$

$$y = 7x + \frac{\pi}{4}$$

$$y = \frac{\pi}{4} - 3x \Rightarrow \sin y + \sin y + \sqrt{2} \cos \left(y + y - \frac{\pi}{2} \right) = 2 \sin y + \sqrt{2} \cos \left(2y - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(x) = 3^{27}x - 3^{x-1} - x - 4 \cdot 3^{27} + 31$$

$$x = 9170$$

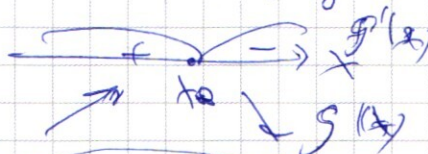
$$g(4) = g(31) = 0.$$

$$g'(x) = 3^{27} - 3^{x-1} \ln((x-1)) - 1 \approx \text{минимум} \downarrow$$

$x_0 \approx 27$ - мин чужд

$$N = 93 + 3^{28}x - 3x -$$

$$-3^x - 4 \cdot 3^{28} = 93 + (x-4) \cdot 3^{28} - 3^x - 3x$$



где n — число

(N7) — упражнение

$x \in \{5, 6, \dots, 30\}$ имеют $N(x) = 93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}$

Найдите число пер (x, y) сгб

значит где y .

$$N = \sum_{x=5}^{30} N(x) = 93 \cdot (30 - 5 + 1) + (3^{28} - 3) \sum_{x=5}^{30} x - \sum_{x=5}^{30} 3^x - \sum_{x=5}^{30} 4 \cdot 3^{28}$$

$$= 93 \cdot 26 + (3^{28} - 3) \cdot 26 - 3^5 \cdot \sum_{x=5}^{25} 3^x - 4 \cdot 3^{28} \cdot 26 =$$

$$= 26(3^{28} - 4 \cdot 3^{28}) + 93 \cdot 26 - 3^5 \cdot \frac{3^{26} - 1}{3 - 1} = -26 \cdot 3^{29} +$$

$$+ 26 \cdot 93 - \frac{3^5}{2} \cdot (3^{26} - 1) = \frac{3^5}{2} + 26 \cdot 93 - 26 \cdot 3^{29} - \frac{3^{31}}{2}$$

$$N = 93 \cdot 26 + (3^{28} - 3) \cdot \left(\frac{30 \cdot 31}{2} - \frac{4 \cdot 5}{2} \right) - 3^5 \sum_{x=0}^{25} 3^x - 4 \cdot 3^{28} \cdot 26 =$$

$$= 93 \cdot 26 - 4 \cdot 3^{28} \cdot 26 + (3^{28} - 3) \cdot \left(\frac{930 - 20}{2} \right) - 3^5 \cdot \frac{3^{26} - 1}{3 - 1} =$$

$$= 93 \cdot 26 - 4 \cdot 26 \cdot 3^{28} + (3^{28} - 3) \cdot 455 - \frac{3^{31}}{2} + \frac{3^5}{2} =$$

$$= 93 \cdot 26 + \frac{3^5}{2} + (455 - 4 \cdot 26) \cdot 3^{28} - 3 \cdot 455 - \frac{3^{31}}{2} = 351 \cdot 3^{28} +$$

$$+ 93 \cdot 26 + \frac{3^5 - 3^{31}}{2} = 3 \cdot 455 = 3^3 \cdot 13 \cdot 3^{28} - \frac{3^{31}}{2} + \frac{3^5}{2} + 93 \cdot 26 - 3 \cdot 455 =$$

$$= 3^{31} \left(\frac{26 - 1}{2} \right) + \frac{3^5}{2} + 1053 = 3^{31} \cdot \frac{25}{2} + \frac{243 + 2106}{2} =$$

$$= \frac{25}{2} \cdot 3^{31} + \frac{2349}{2}$$

Ответ: $\frac{2349 + 25 \cdot 3^{31}}{2}$ пер.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a=16$
 $x-1 < \frac{27 \ln(3)}{\ln(3)}$ (22)
 $3^{x-1} = \frac{3^{27}-1}{\ln(3)} < \frac{3^{27}}{\ln(3)}$
 $\frac{a+b}{\sqrt{2}} = \frac{16+b}{\sqrt{2}} = AC = AD$
 $S = \frac{1}{2} \left(\frac{16+b}{\sqrt{2}} \cdot CF \cdot \sin \angle ACF \right)$
 $\sin \angle ACF = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$
 $\cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$
 $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{16+b}{\sqrt{2}} \cdot 34 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{16+b}{\sqrt{16^2+b^2}}$

$25 \cdot 5$
 $\frac{23}{\lambda_2} = \frac{65}{56}$
 $\frac{2 \cdot 27}{x-2}$

$(x; y) \in D^2$
 $\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27}-1)x \end{cases}$
 $1) 3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3 \cdot 3^{28} - 3x$
 $3^x + 3x < 93 - 3^{28}$
 $3^x + 3x + 3^{25} < 93$
 $3^x + 3x - 3^{28} < 93 - 4 \cdot 3^{28}$
 $3^{28}x - 3^x - 3x > 4 \cdot 3^{28} - 93$
 $3^{27}x - 3^{x-1} - x > 4 \cdot 3^{27} - 31$
 $x=4$

$f(x) = 3^{27}x - 3^{x-1} - x > 4 \cdot 3^{27} - 31 = c$
 $x=4: f(4) = c$
 $f(x) = 3^{27}x - 3^{x-1} - x$
 $f'(x) = 3^{27} \ln 3 - 3^{x-1} \ln 3 - 1$
 $\ln x \geq 5$
 $3^{x-1} \ln 3 = 3^{27} - 1$
 $(3^{27}-1)x - 3^{x-1} > 4 \cdot 3^{27} - 31$
 $x=4$

(N7)

 $\exists x, y \in \mathbb{Z} :$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3 \cdot (3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Если $\exists y \in \mathbb{Z}$, то $3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3x - 3x$,

откуда
 $g(x) = 3 \cdot f(x) = 3^{28}x - 3^x - 3x >$

$$> 4 \cdot 3^{28} - 93,$$

$$f(x) = 3^{27}x - 3^{x-1} - x > 4 \cdot 3^{27} - 31 = C.$$

Исследуем функцию f :

$$f'(x) = 3^{27} - 3^{x-1} \ln 3 - 1, \text{ и}$$

если $f'(x_0) = 0$, то $\ln 3 \cdot 3^{x_0-1} = \frac{3^{27}-1}{\ln 3} < \frac{3^{27}}{\ln 3}$

следовательно,

$$\ln 3 \cdot (x_0 - 1) < \frac{27 \ln 3}{\ln 3} = 27, \quad x_0 < 1 + \frac{27}{\ln 3} < 28.$$

При этом замечаем, что $f(4) = 3^{27} \cdot 4 - 3^3 - 4 = C.$

$$\begin{aligned} f(31) &= 3^{27} \cdot 31 - 3^{31-1} - 31 = \\ &= 3^{27} \cdot 31 - 3^{30} - 31 = \\ &= 3^{27} \cdot 4 - 31 = C. \end{aligned}$$

Итак, мы получили функцию (макс. ↓).
 Откуда следует, что $\text{при } x > 31: f(x) < C$

$$f'(x) = 3^{27} - 1 - \ln 3 \cdot 3^{x-1}$$

или $x \leq 4: f(x) > f(4) = C$
 или $x \in [5, 30]: f(x)$

$$\exists f'(x_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{x_0-1} \ln 3 = 3^{27} - 1$$

$$(x_0 - 1) \ln 3 = \ln(3^{27} - 1), \text{ и } \ln 3 \cdot (x_0 - 1) = \frac{\ln(3^{27})}{\ln 3} = 27, \text{ и}$$

$x_0 < \frac{27}{\ln 3}$ — явно невозможное; значит, при $x > 31 > x_0$ верно,

что $f(x) < f(31) = C$. И при $x < 4: f'(x) > 0, \Rightarrow f(x) < f(4) = C.$

Значит, все целые значения $x \in \{5, 6, \dots, 30\}$