

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K , L , M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$64827 = 64800 + 27 = 648 \cdot 100 + 27 = (540 + 108) \cdot 100 + 27 = \\ = (27 \cdot 20 + 27 \cdot 4) \cdot 100 + 27 \Rightarrow 64827 : 27.$$

$$\frac{64827}{27} = (20 + 4) \cdot 100 + 1 = 2401 = 49 \cdot 49 = (50 - 1)(50 - 1) = 2500 - 100 + 1$$

Итак, $64827 = 27 \cdot 49 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$.

Из условия, $64827 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_8$, $0 < a_i \leq 9$.

Значит, $3^3 \cdot 7^4 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_8$. везде $n, a, b \in \mathbb{N}$

Заметим, что $a_i \neq 7$, $n > 1$, т.к. $7^n \geq 49 > 9$.

$a_i \neq 3$, $n > 2$, т.к. $3^n \geq 27 > 9$.

$a_i \neq 3^a \cdot 7^b$, где $a, b > 0$, т.к. $3^a \cdot 7^b \geq 21 > 9$.

Значит, a_i может быть равно: 3; 7; $3^2 = 9$; 1

I все a_i равны либо 3; либо 7, либо 1.

$(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7)$ — семь чисел.

$X = C_8^3 \cdot C_5^4$ — выберем позиции для $a_i = 3$ и для

каждого такого варианта выберем поз. для $a_i = 7$.

Позиция $a_i = 1$ определится однозначно.

$$X = \frac{8!}{3! 5!} \cdot \frac{5!}{4! 1!} = \frac{56 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56 \cdot 5 = 280.$$

I есть $a_i = 9$, тогда $64827 = (9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \leftarrow 6 \text{ чисел.}$
 $\downarrow C_8^4 \text{ способов}$

$X = C_8^4 \cdot 4 \cdot 3$ — выберем поз. для $a_i = 7$, для каждого такого варианта ~~выберем~~ выберем поз. для $a_i = 9$ и $a_i = 3$. Поз. единицы определяются однозначно.

$$Y = \frac{8!}{4!4!} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 = 20 \cdot 6 \cdot 7 = 120 \cdot 7 = 840$$

Общее кол-во способов $X+Y=880+840=1120$

Ответ: 1120

$$\sqrt[3]{\left(\frac{-x^7}{y}\right)^{\ln(-y)}} = x^{2 \ln(xy^2)} \quad (1)$$

$$\text{ДЗ: } y < 0.$$

$$xy^2 > 0 \Rightarrow x > 0.$$

$$\text{ДЗ: } \left(\frac{-x^7}{y}\right) > 0.$$

$$\begin{cases} y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \quad (2) \end{cases}$$

①. Заметим, что: $\left(\frac{x^7}{-y}\right)^{\ln(y)} > 0$ и $x^{2 \ln xy^2} > 0.$

$$\ln\left(\left(\frac{-x^7}{y}\right)^{\ln(y)}\right) = \ln(x^{2 \ln(xy^2)})$$

$$\ln(-y) \cdot \ln\left(\frac{-x^7}{y}\right) = 2 \ln xy^2 \cdot \ln x.$$

$$\ln(-y) \cdot (\ln x^7 - \ln(-y)) = 2 \ln(x) (\ln x + \ln y^2)$$

Примем $a = \ln(-y) \in \mathbb{R}$, тогда,
 $b = \ln(x) \in \mathbb{R}$.

$$a(7b - a) = 2b(b + 2a)$$

$$7ab - a^2 = 2b^2 + 4ab.$$

$$2b^2 - 3ab + a^2 = 0.$$

(1 случай: $a=0 \Rightarrow$
 $b=0 \Rightarrow \ln x = 0$
 $\ln y = 0 \Rightarrow$

2 случай: $a \neq 0$, тогда.

$t = \frac{b}{a}$ тогда.

$$2b^2 - 3ab + a^2 = 0 \quad | : a^2$$

$$2\frac{b^2}{a^2} - 3\frac{b}{a} + 1 = 0.$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{aligned} t=1 &\Rightarrow \ln x = \ln(-y) \Rightarrow x = -y. \\ t=\frac{1}{2} &\Rightarrow \frac{\ln x}{\ln(-y)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \ln x = \ln(-y) \Rightarrow x^2 = -y. \end{aligned} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② из разбора ① есть 3 случая:

I $x=1; y=-1$.

$$(-1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 12 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 4 \neq 0.$$

Значит: $(1; -1)$ — не экв. реш.

II $x=-y$.

$$y^2 + 2 \cdot (-y) \cdot y - 3y^2 + 12(-y) + 4y = 0.$$

$$y^2 - 2y^2 - 3y^2 - 12y + 4y = 0.$$

$$-4y^2 - 8y = 0 \quad | : y \neq 0.$$

$$-4y - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = 2. \quad (2; -2) \in \mathbb{D}.$$

III $x^2 = -y$, тогда $y = -x^2$.

$$(-x^2)^2 - 2x \cdot x^2 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0 \quad | : x \neq 0.$$

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

Заметим, что $x=3$ — корень.

$$(x-3)(x^2+x-4) = 0.$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x^2+x-4=0 \end{cases} \Rightarrow y = -9$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \notin \mathbb{D}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{17}-9}{2}$$

Ответ: $(2; -2),$
 $(3; -9),$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}-9}{2} \right)$$

N5. $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$ ①

$\begin{cases} (x-8)^2 + (y-15)^2 = a \end{cases}$ ② 2 решения:

① $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$.

$a = x+y+8$

I $a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow$

II $a \geq 0, b < 0$.

$b = x-y+8$

$\Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \leq x+8 \end{cases}$

$\begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \leq x+8 \end{cases}$

III $a < 0, b \geq 0$.

IV $a < 0, b < 0$.

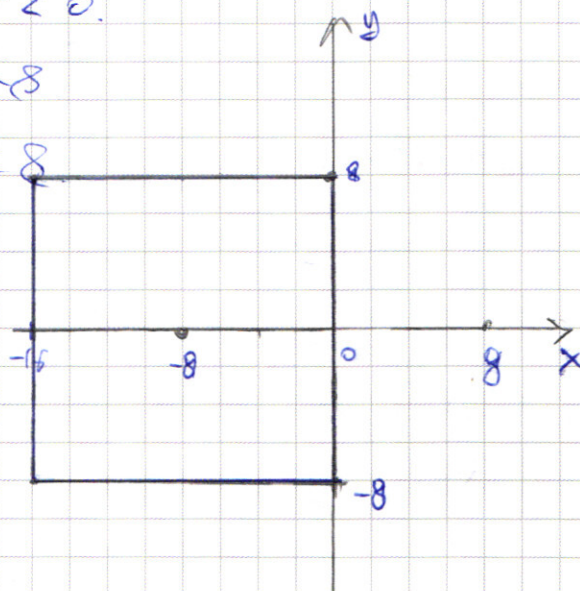
$\begin{cases} y \leq -x-8 \\ y \leq x+8 \end{cases}$

$\begin{cases} y \leq -x-8 \\ y > x+8 \end{cases}$

График ф-ции -

- квадрат с координатами

вершин: $(-16; -8); (-16; 8);$
 $(0; -8); (0; 8)$



② $(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$. - ф-ция симметричная и относительно ОХ и относительно ОУ

I четверть:

окружность с центром O_2

в т. $(8; 15)$ и $R = \sqrt{a}$

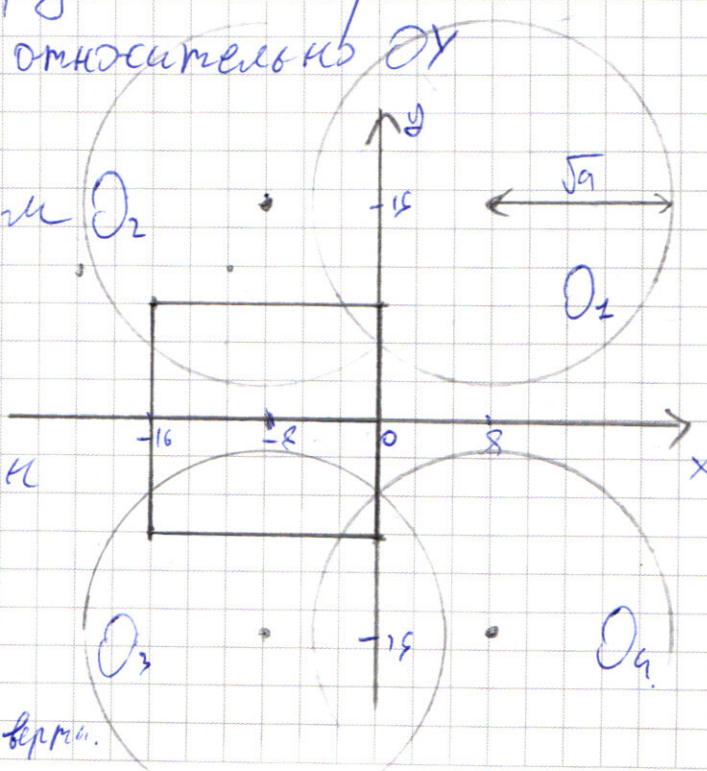
В II; III; IV четвертях

рисунок, симметричен

рисунок I четверти

глазовем. окружности.

$O_1; O_2; O_3; O_4$ зависят от четверти.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что если O_2 пересекает квадрат, то и O_3 и его пересекает.

Если O_2 пересекает квадрат, то и O_4 его пересекает.

Рассмотрим момент касания O_2 с кв.

Он произойдет при $\bar{a} = \sqrt{15^2 - 8^2} = \sqrt{113} \Rightarrow a = 49$

O_2 каснется кв. при $\bar{a} = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{113} \Rightarrow a = 113$

П.к. $\sqrt{113} > \sqrt{113}$ $113 > 49$ $a = 49$ - подходит (2 т. кас)

при $49 < a \leq 113$. Больше 2 реш.

при $113 < a \leq a'$ (где a' момент, когда O_2 и O_3

больше 2-ух последний раз пересекаются с кв.)

решений, т.к. из симметрии отн $x = -8$.

у нас есть как минимум 2 пересеч. O_2 и O_3 с кв.

Эти пересечения совпадают в т. $(0; 2)$ и в т. $(-16; 0)$

при некотором a ; но при этом же a . O_1 и O_4 пересекают кв. в иных точках.

$\bar{a}_2 = \sqrt{24^2 + 23^2} \Rightarrow a_2 = 24^2 + 23^2$ момент, когда

O_1 и O_4 в последний раз пересекают кв.

Кол-во решений равно двум.

При $a > a_2$ ни одна окр. не пересекает кв.

При $a' < a < a_2$ больше 2-ух точек

Ответ: $a = 49$
 $a = 1105$

№ 6

Дано: $R_1 = R_2 = 17$
 $\angle CAD = 90^\circ$
 $BF \perp CD$
 $BF = CD$
 $BC = 16$

Найти CF - ?
 S_{AFC} - ?

Решение:
Проведем BF до пересеч.
с ω_1 в T .

И провезем BFG по пересеч.

СВАС - вписан. $\Rightarrow \angle SAC = \angle SBC = 90^\circ \Rightarrow SC$ - диаметр.

$$\text{MO} \perp \text{CAD} = 90^\circ \Rightarrow \angle \text{SAC} + \angle \text{CAD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т. SAD лежат на 1 прямой.

II, ~~SCA = LSA (в Ω_2 вписанное, опир. на $\partial\Omega_2$)~~ ^{опор. на $\partial\Omega_2$}

и обозначим $T_K = \mathbb{Z}H \cap \mathcal{W}_2$.

$\angle KBQ = 90^\circ \Rightarrow KB - \text{диаметр.}$

Обозначим $\gamma_0 \cdot k' = AC \cap \omega_2$

с $\angle A'D = 90^\circ \Rightarrow K$ — диаметр $\vec{I} \Rightarrow A, K, C$ лежат на $\vec{l}$ прямой

III $\angle SCA = \angle SBA$ (в ω_2 пара впис. углов), отсюда SA

$\angle B A = \angle K B A = \angle K D A$ (в ω_2 пара впис. углов, опир. на $A K$)

* Значит, $SCA = KDA$ но

$SC = kD$ (диаметры в равных окружностях)

$$\angle SAC = \angle KAD = 90^\circ \text{ (прям. треугольники)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит, $\triangle SCA = \triangle KDA \Rightarrow AD = AC \Rightarrow \triangle CAD$ — ~~равностор.~~ ^{равнобедр.}

Но $\triangle CAD$ — прям $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$

В $\triangle CBK$ — прям

$\angle CBK = 45^\circ \Rightarrow \angle CKB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow CB = BK$ $\Rightarrow$

Но $BF = BD$ (по усл) и $\angle CBF = \angle KBD = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle CBF = \triangle KBD \Rightarrow CF = KD = 34$.

2) из теоремы Пифагора $\rightarrow$ из $\triangle KBD$ (обозначение)

из $\triangle KBD$ $BD^2 = 34^2 - 16^2 = 18 \cdot 50 \Rightarrow BD = 30$.

$\angle ADC = 45^\circ, \angle BDF = 45^\circ \Rightarrow \angle ADF = 90^\circ$

из $\triangle BDF$ $DF = 30\sqrt{2}$

$CD = BC + BD = 30 + 16 = 46$.

из $\triangle CAD$ $AD = 23\sqrt{2}$ $\parallel \frac{46}{\sqrt{2}}$

из $\triangle AKD$ $AK^2 = 34^2 - (23\sqrt{2})^2 = 98$

из $SA = AK$ (см. II) $S_{SAK} = SA \cdot AK / 2 = 98 / 2 = 49$.

$S_{FKAD} = S_{FBD} - S_{SAK} = \frac{(30\sqrt{2})^2}{2} - 49 = 900 - 49 = 851$

$S_{FKA} = S_{FKAD} - S_{FAD} = 851 - \frac{23\sqrt{2} \cdot 30\sqrt{2}}{2} = 851 - 690 = 261$

$S_{KCF} = \frac{KF \cdot BC}{2} = \frac{46 \cdot 16}{2} = 46 \cdot 8 = 368$

$S_{ACF} = 368 + 261 = 629$ Ответ: $CF = 34$
 $S_{ACF} = 629$.

$$\sqrt{2} \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \cos 5x \cdot \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \overset{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 4x} (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0.$$

$$\textcircled{1} \cos 2x + \sin 2x = 0$$

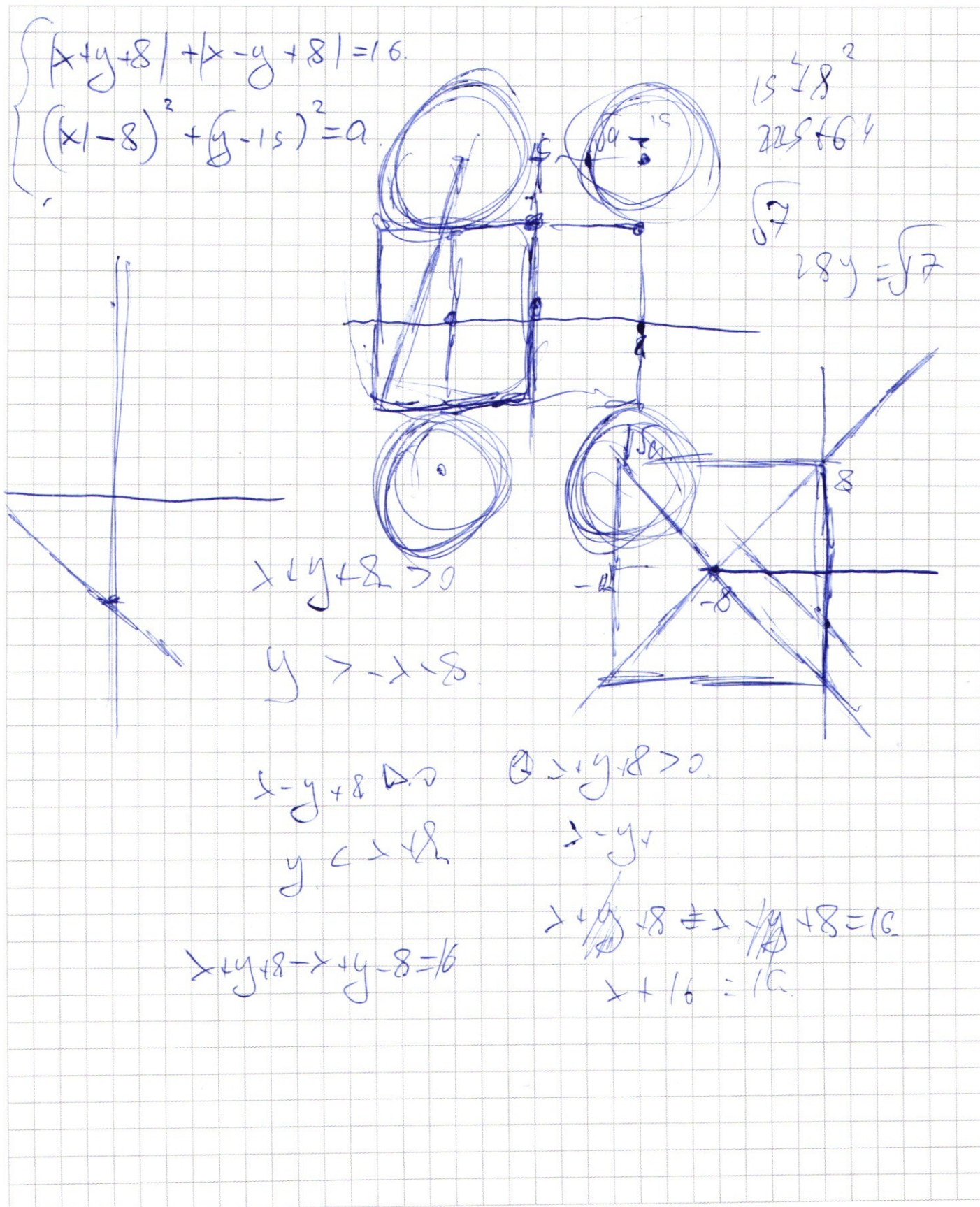
$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{одно из решений}$$

~~- все реш.~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$4.5 + 5.5 \cos \alpha$$

$$0 = 2.4 \cdot 5 - 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha + 4.5 + 5.5 \cos \alpha$$

$$2.4 \cdot 5 - 5.5 \cos \alpha$$

$$(4 + 5.5 \cos \alpha)$$

$$4 + 5.5 \cos \alpha$$

$$5.5 \cos \alpha + (4.5 + 5.5 \cos \alpha)$$

$$0 = 5.5 \cos \alpha + 2.4 \cdot 5 - 5.5 \cos \alpha + 4.5 + 5.5 \cos \alpha$$

$$5.5 \cos \alpha + 2.4 \cdot 5$$

$$5.5 \cos \alpha + 4.5$$

$$+ 5.5 \cos \alpha$$

$$0 = 4.5 + 5.5 \cos \alpha$$

$$0 = (4.5 + 5.5 \cos \alpha) + 5.5 \cos \alpha$$

$$(4.5 + 5.5 \cos \alpha)$$

$$4.5 + 5.5 \cos \alpha = 5.5 \cos \alpha$$

$$4.5 + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha$$

$$4.5 + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha$$

$$4.5 + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha$$

$$4.5 + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha$$

$$4.5 + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha$$

$$4.5 + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha$$

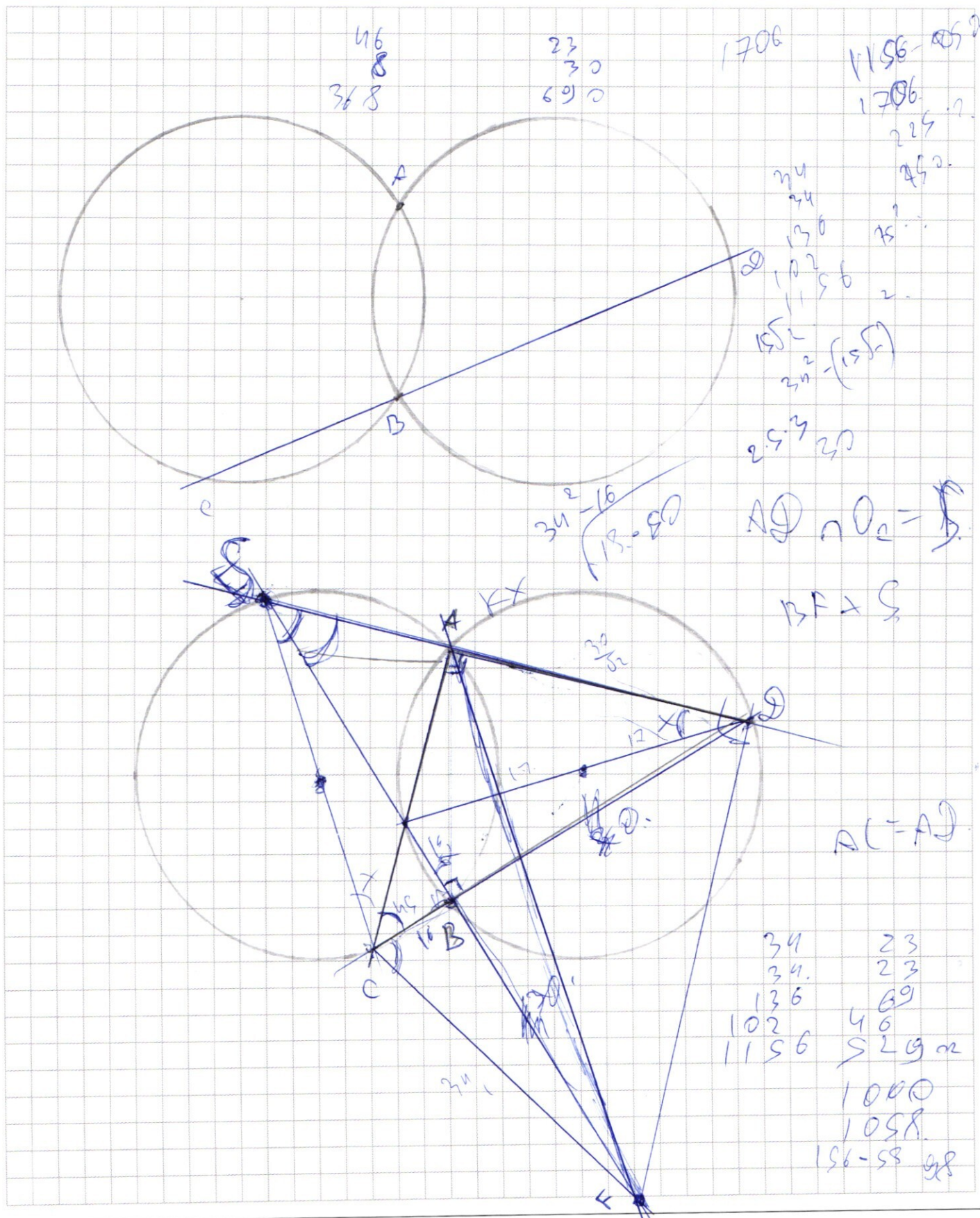
$$4.5 + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha$$

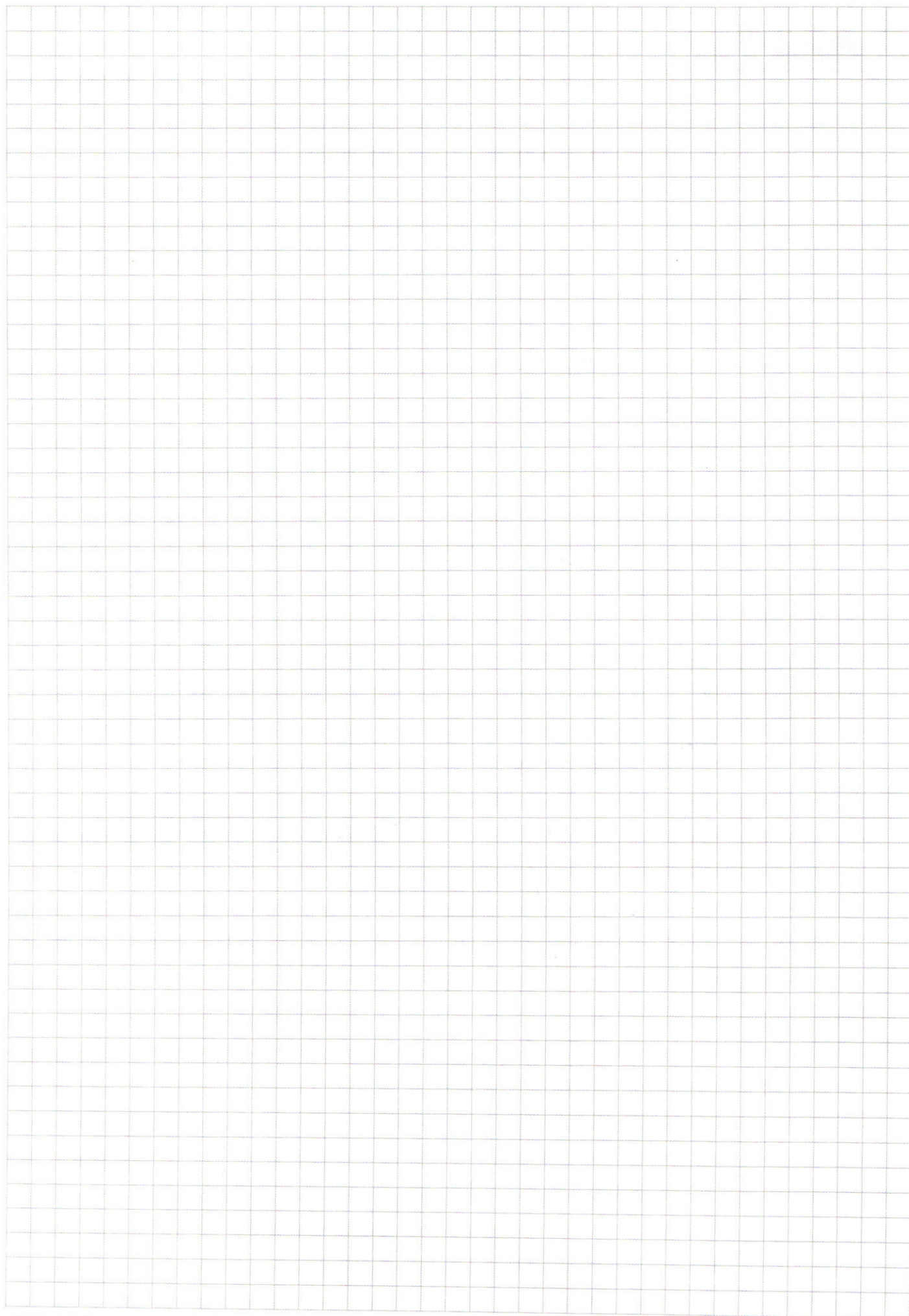
$$4.5 + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha$$

$$4.5 + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha$$

$$0 = 4.5 + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha + 5.5 \cos \alpha$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

$$\cos 4(\alpha) = -2 \cos^2 \frac{2\alpha}{2} \sin^2 \frac{2\alpha}{2} \quad (\cos u - v + \cos(u+v))$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2 \cos \frac{2\alpha+2\beta}{2} \cos \frac{2\alpha-2\beta}{2} \quad C_4 C_4 - S_4 S_4 + C_2 S_4 C_2 S_4 + S_2 S_4$$

$$2 \cos 2\alpha \cos 2\beta = \cos 2(\alpha+\beta) + \cos 2(\alpha-\beta)$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2 \cos(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \sin 2(\alpha+\beta) + \cos 2(\alpha-\beta)$$

$$\sin 2\alpha - \sin 2\beta = 2 \cos \alpha \sin \alpha - 2 \cos \beta \sin \beta$$

$$2 \cos \alpha \sin \alpha - 2 \cos \beta \sin \beta = 2 \cos \alpha \sin \alpha - 2 \cos \beta \sin \beta$$

$$2 \cos \alpha \sin \alpha - 2 \cos \beta \sin \beta = 2 \cos \alpha \sin \alpha - 2 \cos \beta \sin \beta$$

$$\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha$$

$$2(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)$$

$$2 \cos 2\alpha \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \sin 2\alpha = 2 \cos 4\alpha$$

$$2 \cos 4\alpha = 2 \cos 4\alpha$$

$$0 = 2 \cos 4\alpha - 2 \cos 4\alpha = 0$$

$$(2 \cos 4\alpha - 2 \cos 4\alpha) \cos 2\alpha = 0$$

$$2 \cos 4\alpha \cos 2\alpha = 0$$

$$2 \cos 4\alpha \cos 2\alpha = 0$$

$$2 \cos 4\alpha \cos 2\alpha = 0$$

$$2 \cos 4\alpha \cos 2\alpha = 0$$

$$2 \cos 4\alpha \cos 2\alpha = 0$$

$$2 \cos 4\alpha \cos 2\alpha = 0$$

$$2 \cos 4\alpha \cos 2\alpha = 0$$

$$2 \cos 4\alpha \cos 2\alpha = 0$$

$$\cos 2x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$23 + 8$$

$$f(x) = -(2x+4) + \cos 7x - 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 7x + \cos 3x + \sin 3x \cdot \sin 7x$$

$$23 \quad 24231$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x$$

$$a + b + \sqrt{2} a b$$

$$\Rightarrow \ln y \text{ affix}$$

$$y^{\ln x} = \ln y^{\ln x} \quad \ln y \cdot \ln x$$

$$\sin 7x - \sin 3x$$

$$= 0$$

$$+ \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$= 2 \ln y \sin 7x (1 + \sqrt{2} \sin 3x) - 5$$

$$x = 2 \ln y \ln x$$

$$(2 \ln x + 2 \ln y) \cdot \ln y$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)A$$

$$1000 + 29 + 26$$

$$\ln x - \ln y = 2x + 4 \cdot 28x$$

$$1050b - a^2 = 6(2 \cdot 3 + 28a)$$

$$79b - a^2 = 6(3 + 4 \cdot 3) < 93 \cdot (3^{28} - 3)A$$

$$2b^2 - 3ab + a^2$$

$$\cos 4x \cdot \cos 3x - \sin 4x \sin 3x \quad \sin 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x$$

$$\cos 3x$$

$$3^x + 43 \quad - \sin 3x$$

$$93 + (3^{28} - 3)x - 4 \cdot 3^{28} - 3^x > 0$$