МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФГ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27}-1\right)x \end{cases}$$

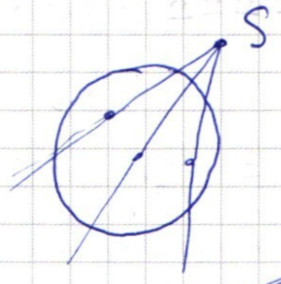
Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

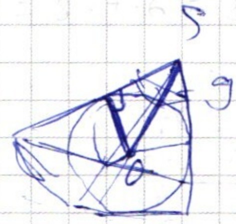
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

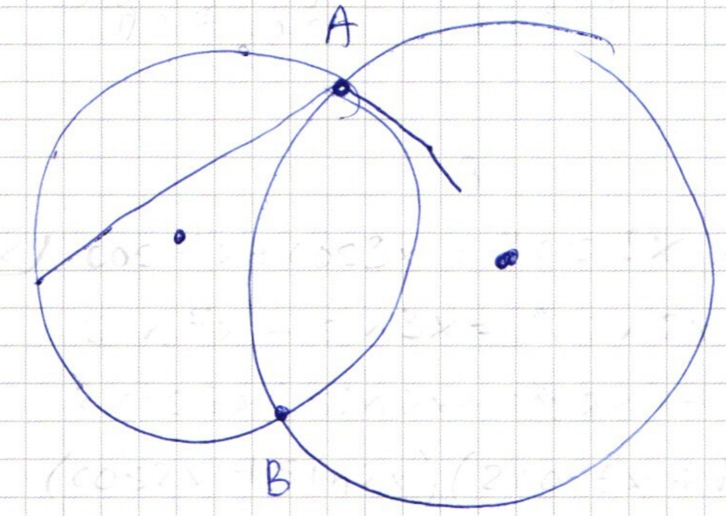
1) 64827 =





16 $\frac{x}{x+2R}=\frac{3}{4}$

$x+R$

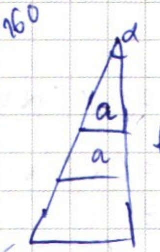


$289-254$

$\begin{array}{r}16\\16\\160\end{array}$

$\frac{ba}{a}=\frac{2}{3}$ $\frac{4}{9}$

$\frac{2}{3}$



β γ

$4x=3x+6R$

$\frac{1}{2}l$ $x=6R$

$\frac{S}{16}=\frac{4}{9}$

$S=\frac{64}{9}$

$\frac{4}{3}a$ $\frac{2}{3}a$ $\frac{x}{x+R}=$

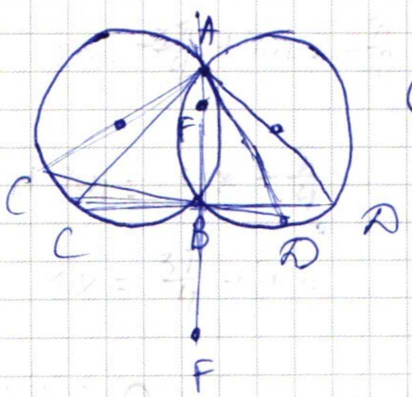
$\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{a}{\frac{3}{4}a}$ $\frac{4}{9}\cdot 16$ $\left(\frac{6}{7}\right)^{2}\frac{29}{}=S$

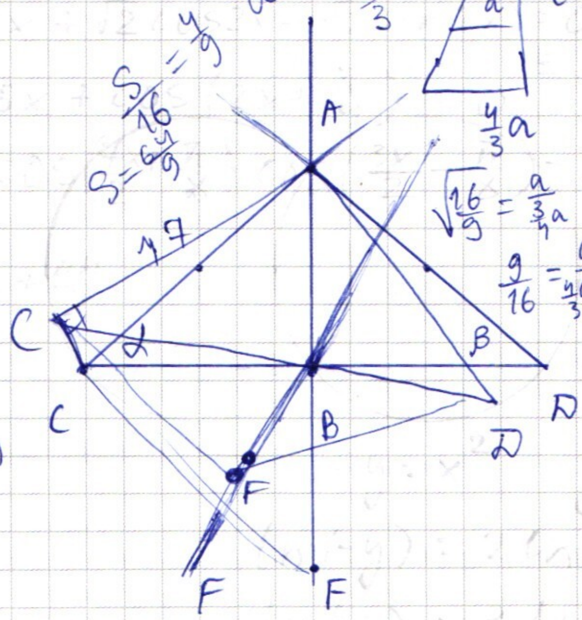
$\frac{9}{16}=\frac{a9}{\frac{4}{3}a}$ $S=\frac{49\cdot 9}{36}$

$\frac{9}{\cancel{81}}16$

$\left(\frac{7}{9}\right)^{2}=\frac{S}{16}$

$\frac{16\cdot 49}{81}$





$CF^{2}=BF\cdot AF$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

5) $x^2+y^2+64+2xy+16x+16y+$

$+x^2+y^2+64-2xy-16y+16x+2x^2+32x+64-y^2=256$

$4x^2+64x+y^2\pm 64$

$4(x+8)^2+y^2=320$

$4x^2+64x+y^2-64=0$

$x_{1,2}=-8\pm\sqrt{64-32+}$

$x+8+y\geq 0$

$2x=0$

① $x+y+8\geq 0$

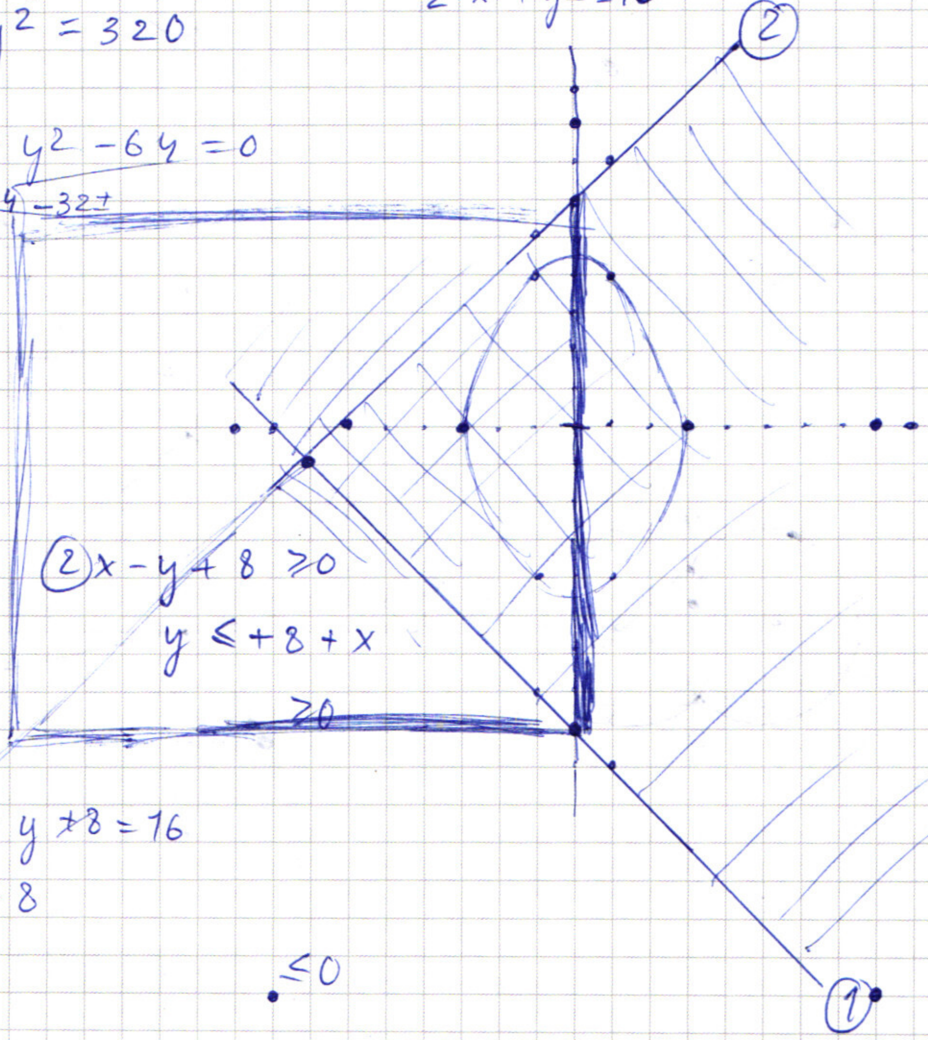
$y\geq -x-8$

≤ 0

② $x-y+8\geq 0$

$y\leq +8+x$

$2x^2+y^2=18$



$-x-y-8+x-y+8=16$

$y=-8$

≤ 0

≤ 0

$-x-y-8-x+y-8=16$

$x=-16$

≥ 0

≤ 0

$x+y+8-x+y-8=16$ $y=8$

☑ черновик   ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Решение. Разложим 64827 на множители:
$64827 = 3^3 \cdot 7^4$. Заметим, что восьмизначное число обязательно должно содержать 3 тройки и 4 семерки, но тогда остается еще один разряд не занятый ($3+4+1=8$), пусть на его месте будет стоять единица, чтобы произведение не изменилось. Т.о. $64827 = 3^3 \cdot 7^4 \cdot 1$. Привидем пример восьмизначного числа: 13337777. Найдем сколькими сбособами можно расставить „7" в 8-значном числе: $C_8^4 = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8^2 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 70$ (способов);
„3" в 8-значном числе $C_8^3 = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 42$ (способа);
„1" в 8-значном числе: $C_8^1 = \frac{8!}{7!\,1!} = 8$.
Т.о. данных чисел 8-значных произведение цифр, которых равно 64827, будет
$70 + 42 + 8 = 120$

Ответ: 120.

2) $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
Решение. Заметим, что 1) $\cos 7x + \cos 3x =$
$= 2\cos 5x \cos 2x$; 2) $\sin 7x - \sin 3x =$

$2\cos \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2}$ $= 2\sin \frac{7x-3x}{2} \cos \frac{7x+3x}{2} =$
$= 2\sin 2x \cos 5x$.

Подставляя, получим $2\cos 5x \cos 2x +$
$+ 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\cos 2x + \sin 2x)(2\cos 5x + \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\boxed{\begin{aligned}&\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \\ &= (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)\end{aligned}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\cos 2x + \sin 2x = 0 \quad (1)\\ &2\cos 5x + \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = 0 \quad (2)\end{aligned}\right.$

(1) $\sin 2x = -\cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2x = -1 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \; n \in \mathbb{Z}. \Rightarrow \boxed{x_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \; n \in \mathbb{Z}.}$

(2) $\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos 5x + \cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos 5x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{5x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0\\ &\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n\\ &\frac{3x}{2} + \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi n\end{aligned}\right., n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\frac{7x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi n\\ &\frac{3x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi n\end{aligned}\right., n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{aligned}&x_2 = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}\\ &x_3 = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}\end{aligned}\right., n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}$; $\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & (1) \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 & (2) \end{cases}$

Решение. (1) $\frac{x^{7\ln(-y)}}{-y^{\ln(-y)}} = x^{2\ln x + 2\ln y^2}$ $\Leftrightarrow$

Заметим, что 1) $\ln(-y)$ существует при $-y>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y<0$; 2) $\ln(xy^2)$ существует при $xy^2>0 \Rightarrow x>0$.

$\Leftrightarrow \frac{x^{7\ln(-y)}}{x^{2\ln x + 2\cdot 2\ln(-y)}} = -y^{\ln(-y)}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^{7\ln(-y) - 2\ln x - 4\ln(-y)} = (-y)^{\ln(-y)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^{3\ln(-y) - 2\ln x} = (-y)^{\ln(-y)}$. Заметим, что

3) $x = e^{\ln x}$; 4) $(-y) = e^{\ln(-y)}$. Подставляя, получим

$e^{\ln x(3\ln(-y) - 2\ln x)} = e^{(\ln(-y))^2}$. Обозначим

$\begin{cases} \ln x = a \\ \ln(-y) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e^a \\ y = -e^b \end{cases}$, тогда $e^{a(3b-2a)} = e^{b^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3ab - 2a^2 = b^2 \Leftrightarrow b^2 - 3ab + 2a^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad b_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2}}{2} = \frac{3a \pm a}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b_1 = a \\ b_2 = 2a \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ а) Перейдем к x, y: $\left[\begin{array}{l} \ln(-y) = \ln x \\ \ln(-y) = 2\ln x \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln(-y) = \ln x \\ \ln(-y) = \ln x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -y = x \\ -y = x^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = -x \\ y_2 = -x^2 \end{array}\right.$$

Подставим y в (2), тогда получим

$$\left[\begin{array}{l} (-x)^2 + 2x(-x) - 3x^2 + 12x + 4(-x) = 0 \\ (-x^2)^2 + 2x(-x^2) - 3x^2 + 12x + 4(-x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0 \\ x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

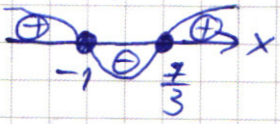
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x - 4x^2 = 0 \\ x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \quad (3) \\ x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0 \quad (4) \end{array}\right., \text{т.к. } x > 0$$

(3) $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = -2$

(4) Рассмотрим $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 12$, тогда $f'(x) = 3x^2 - 4x - 7$. Найдем точки экстремума: $3x^2 - 4x - 7 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+21}}{3} = \frac{2 \pm 5}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{7}{3} \end{array}\right.$



Т.о. на $x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{7}{3}; \infty)$ $f(x)$ возрастает, а на $x \in (-1; \frac{7}{3})$ $f(x)$ убывает, т.е. x_2 - точка минимума, тогда $f(x_2) = f(\frac{7}{3}) =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= \left(\frac{7}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{3}\right) + 12 = \frac{343}{27} - \frac{98}{9} - \frac{49}{3} + 12 =$

$\times \begin{array}{r} 49 \\ 7 \\ \hline 343 \end{array}$

$= \frac{343 - 294 - 441 + 324}{27} = \frac{667 - 735}{27} =$

$= -\frac{68}{27}$, т.е. $f(x)$ пересекает Ox в 3 точках,

$\times \begin{array}{r} 27 \\ 12 \\ \hline 54 \\ 27 \\ \hline 324 \end{array}$

~~Но т.к. у нас~~ $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$, ~~то корни (4) нам не подходят~~

Одна из которых $x_1 < 0$, т.е она не подходит

...

Ответ: $(2; -2)$.

5| $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2) \end{cases}$ имеет 2 решения

Решение. Построим графики функций

$y = y_1 = |x+y+8| + |x-y+8| = 16$ и $y = y_2 =$

$= [(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a]$ в одной системе

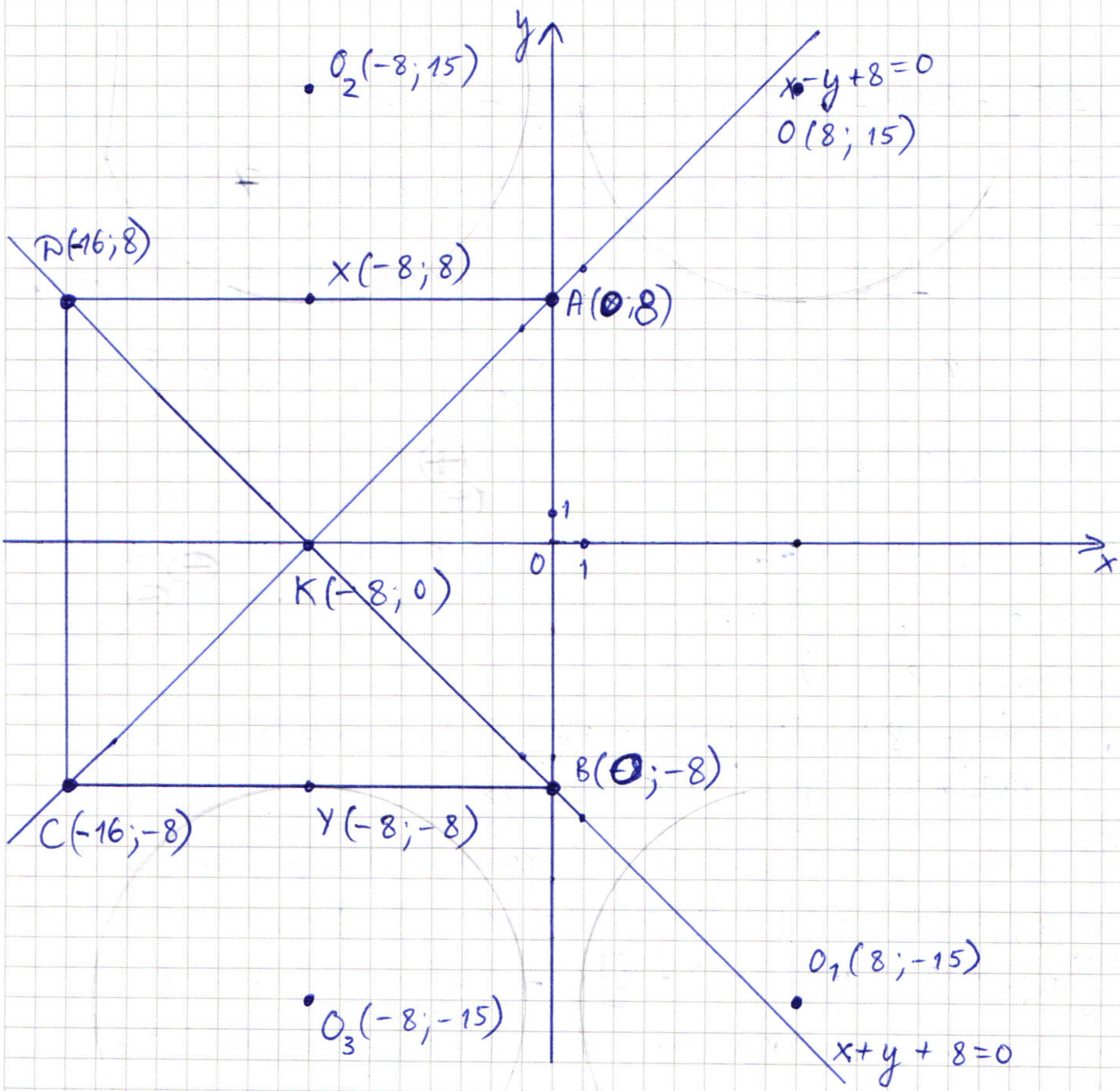
координат Oxy на ОДЗ совпадающую с $\mathbb{R}$:

(1) 1) $\begin{cases} x+y+8 \geq 0; \quad x-y+8 \geq 0 \\ x+\cancel{y}+8+x-\cancel{y}+8 = 16 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y+8 \leq 0; \quad x-y+8 \geq 0 \\ -\cancel{x}-y-\cancel{8}+\cancel{x}-y+\cancel{8} = 16 \Leftrightarrow y = -8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+8 \leq 0; \quad x-y+8 \leq 0 \\ -x-\cancel{y}-8-x+\cancel{y}-8 = 16 \Leftrightarrow x = -16 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \ ; \ x-y+8 \leq 0 \\ \cancel{x}+y+8-\cancel{x}+y-8=16 \iff y=8. \end{cases}$



Т.о график y_1 – квадрат со стороной 16 и центром в т. $K(-8;0)$, а график y_2 –
– это 4 окружности с центрами в точках

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$O(8;15)$; $O_1(8;-15)$; $O_2(-8;15)$ и $O_3(-8;-15)$ и радиусом $R=\sqrt{a}$. $\Rightarrow a=R^2$. Из рисунка видно, что 2 точки (решения) возможны лишь тогда, когда окружности с центрами $O_2(-8;15)$ и $O_3(-8;-15)$ касаются сторон квадрата в т. $X(-8;8)$ и $Y(-8;-8)$, тогда из рисунка $R=|15-8|=7 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=49$. Других случаев нет в силу свойств исследуемых функций.

Ответ: $a=49$.

7) $\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} & (1) \\ y \leq 93 + 3(3^{27}-1)x & (2) \end{cases}$

Решение. (*) Заметим, что система (1), (2) равносильна двойному неравенству
$3^x+4\cdot 3^{28} < y \leq 93 + 3(3^{27}-1)x$. Составим
(1) $y > 3^x + 3^{29} + 3^{28}$;
(2) $y \leq 3^4 + 3^2 + 3 + 3^{28}x - 3x$. Т.о.

$3^x + 3^{29} + 3^{28} \leq 3^4+3^2+3+3^{28}x - 3x \iff$

$\iff 3^x + 3x - (3^4+3^2+3) \leq 3^{28}(x-4)$ (3). Заметим, что при $x_1 = 4$ (3) превращается в равенство $0=0$ и при $x_2 = 31$ (3) превращается в равенство $3^{31} = 3^{31}$, тогда $x \in (4; 31)$.

Проверка: при $x = 3$: $3^3 + 3\cdot 3 - 93 \le 3^{28}(3-4) \iff$

$\iff 27 - 84 \le -3^{28}$ — ложь;

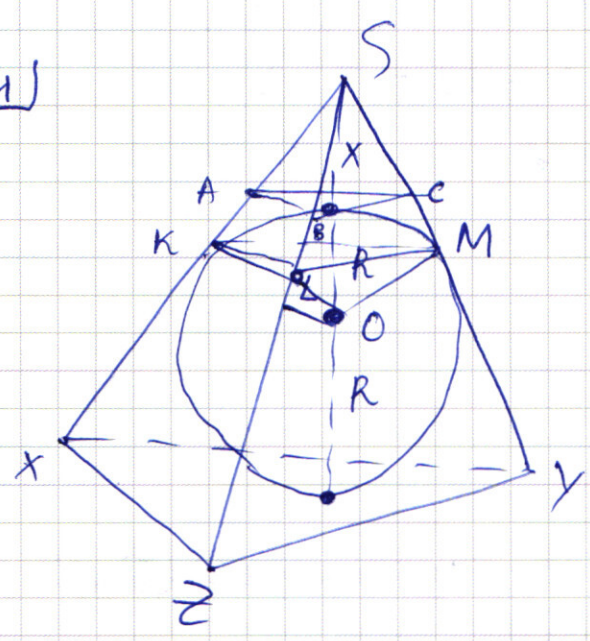
при $x = 32$: $3^{32} + 3\cdot 32 - 93 \le 3^{28}(32-4) \iff$

$\iff 3^{32} + 3 \le 3^{28}(28) \iff 3^{32} + 3 \le 3^{28}(81-53) \iff$

$\iff \cancel{3^{32}} + 3 \le \cancel{3^{32}} - 53\cdot 3^{28}$ — ложь, т.е. $x \in (4; 31)$,

тогда $y \in (0; 3^{31})$. При $x = 5$; y может быть $(105; \cancel{3^{28}})$; при $x = 6 \Rightarrow y \in (0)$

4)



$$\frac{S_{ABC}}{S_{XYZ}} = \cancel{\sqrt{k^2}} = \cancel{\sqrt{\frac{9}{16}}} \Rightarrow \cancel{k}$$

$S_{ABC} = 9$

$S_{XYZ} = 16$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{XYZ}} = k^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SXYZ}} = k^3 = \frac{27}{64} =$$

где $x \in SO$

$$= \frac{\frac{1}{3}x\cdot 9}{\frac{1}{3}(x+2R)\cdot 16}$$

Т.о. $\frac{\cancel{9}x}{\cancel{16}(x+2R)} = \frac{\cancel{27}^{\,3}}{\cancel{64}_{\,4}}$

$$\frac{x}{x+2R} = \frac{3}{4} \iff$$

$\iff 4x = 3x + 6R \Rightarrow x = 6R$, тогда $\frac{V_{SKLM}}{V_{SABC}} = \left(\frac{x+R}{x}\right)^2 =$

$= \frac{\frac{1}{3}S(x+R)}{\frac{1}{3}\cdot 9\cdot x}$; $\frac{(x+R)^2}{x^2} = \frac{S\cancel{(x+R)}}{9\cancel{x}} \Rightarrow S = \frac{9(x+R)}{x} = \frac{{}^{3}\cancel{9}\cdot 7}{\cancel{6}_{2}} = \boxed{\frac{21}{2}}$

Ответ: 21/2