МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $64827 = 27 \cdot 2401 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \Rightarrow$

Восьмизначное число состоит либо из цифр:

а) 3; 3; 3; 7; 7; 7; 7; 1 C – кол-во комбинаций (всех возможных, упорядоченных)

~~...~~ $C = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ т.к цифра 3 встречается 3 раза, а цифра 7 – 4 раза, нужно разделить полученное кол-во комбинаций на $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ и на $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow$

$C_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{6} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$ C_1 – кол-во неупорядоченных комбинаций

б) 3; 3; 7; 7; 7; 7; 1; 1

$C = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ т.к цифра 1 встречается 2 раза, а цифра 7 – 4 раза, разделим полученное кол-во комбинаций на 2 и на $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$C_1 = \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

$C_{общ} = C_1 + C_2 = 1120$

Ответ: 1120

2) $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$2\cos 5x \cos 2x + 2\cos 5x \sin 2x + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$(2\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x))(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(2\cos 5x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x))(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$$\left(2\cos 5x + 2\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$4\left(\cos\frac{5x+2x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\left(\cos\frac{5x-2x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$\cos 2x + \sin 2x = 0$

$\cos 2x \neq 0$ т.к при ~~[illegible]~~ $\cos 2x = 0$ $\sin 2x \neq 0 \Rightarrow$ равенство неверно

$$\frac{\cos 2x}{\cos 2x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0$$

$\operatorname{tg} 2x = -1$

$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi n \quad n \in Z$

$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$

$$\cos\frac{5x+2x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in Z$

$7x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$

$7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$

$$\cos\frac{5x-2x-\frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$\frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \quad m \in Z$

$3x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi m$

$3x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m$

$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}$

Ответ: $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ $n \in Z$; $\frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$ $k \in Z$;

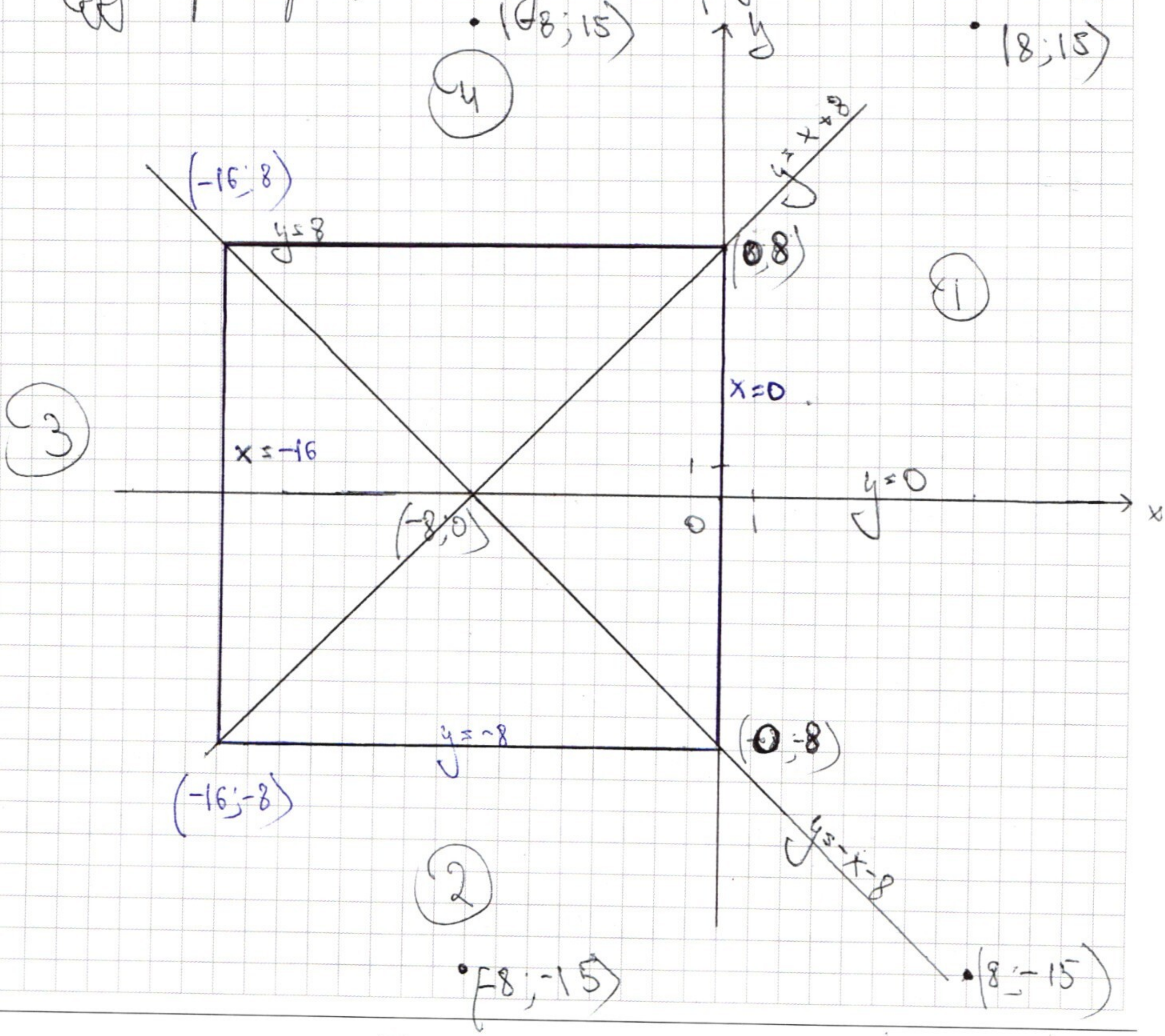
$\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}$ $m \in Z$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$

рассмотрим 1 уравнение: построим графики $y = -x-8$ и $y = x+8$ $\Rightarrow$ разделив координатную плоскость этими графиками на 4 части, мы получаем 4 части в которых модули будут раскрываться одинаково: (одинаково во всей части).



в 1 часть входит точка (0;0) => подставив ее в исходное уравнение получаем, что оба модуля раскрываются с положительным знаком ($0+0+8>0$; $0-0+8>0$) =>

исходное уравнение имеет вид:

$x+y+8+x-y+8=16$

$2x=0$

$x=0$

второй части $\in$ точка (-8;-1) => подставив ее в исходное уравнение получаем, что первый модуль раскрывается с отрицательным знаком, второй – с положительным => ($-8-1+8<0$ $-8+1+8>0$) =>

исходное уравнение имеет вид:

$-x-y-8+x-y+8=16$

$-2y=16$

$y=-8$

третьей части $\in$ точка (-9;0) => подставив ее в исходное уравнение получаем, что оба модуля раскрываются с отрицательным знаком ($-9+8<0$; $-9+8<0$) =>

исходное уравнение имеет вид:

$-x-y-8-x+y-8=16$

$-2x=32$

$x=-16$

четвертой части $\in$ точка (-8;1) => подставив ее в исходное уравнение получаем, что первый модуль раскрывается с положительным знаком, второй – с отрицательным

($-8+1+8>0$ $-8-1+8<0$)

исходное уравнение имеет вид:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x+y+8-x+y-8=16$

$2y=16$

$y=8$ => графическим решением 1 уравнения является квадрат с центром в точке $(-8;0)$ и вершинами $(0;8)$, $(0;-8)$, $(-16;-8)$; $(-16;8)$.

рассмотрим 2 уравнение:

$(|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a$

разделим координатную прямую на 4 части графиками $x=0$ и $y=0$, в получених 4 частях модуль будет раскрываться одинаково (одинаково во всей части)

1) $x\geq0$ $y\geq0$
$(x-8)^2+(y-15)^2=a$

2) $x\geq0$ $y<0$
$(x-8)^2+(y+15)^2=a$

3) $x<0$ $y<0$
$(x+8)^2+(y+15)^2=a$

4) $x<0$ $y\geq0$
$(x+8)^2+(y-15)^2=a$

графическим решением 2 уравнения являются 4 окружности с центрами $(8;15)$; $(-8;15)$; $(-8;-15)$; $(8;-15)$ и радиусом $\sqrt{a}$ $a>0$:

$a<0$ — решений нет

$a=0$ — решений нет т.к при $a=0$ решением 2 уравнения являются 4 точки и квадрат их не пересекает

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$a>0$

решения обоих уравнений симметричны относительно оси ординат $\Rightarrow$

вся система имеет 2 решения если 1) окружности с центрами $(-8;15)$ и $(-8;-15)$ касаются сторон квадрата, а окружности с центрами $(8;15)$ и $(8;-15)$ не пересекают квадрат и 2) наоборот

(у окружности с центром $(-8;15)$ – аналогично)

1) рассмотрим окружность с центром $(-8;-15)$:

касание с квадратом при $\sqrt{a} = \sqrt{(-8+8)^2+(-15+8)^2} = 7$

при $\sqrt{a} > \sqrt{(-8+16)^2+(-15-8)^2} = \sqrt{64+23^2}$ – решений нет $\Rightarrow$ при $\sqrt{a} = \sqrt{24^2+23^2}$ решений нет

$\sqrt{a} < 7$ решений нет

~~$\sqrt{a} \in (7; \sqrt{64+23^2})$ – 2 решения~~

(у окружности с центром $(8;-15)$ – аналогично)

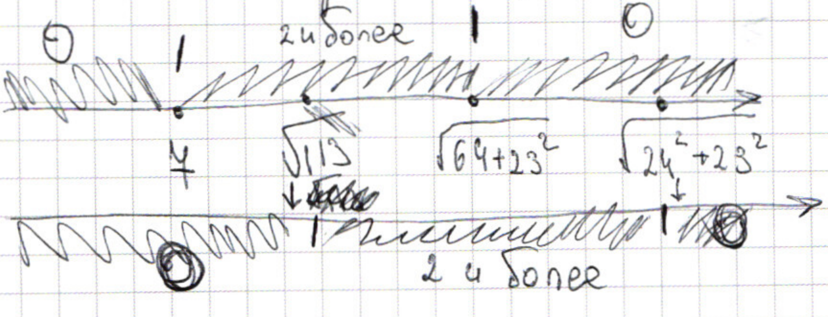
2) рассмотрим окружность с центром $(8;15)$

касание с квадратом при $\sqrt{a} = \sqrt{8^2+(15-8)^2} = \sqrt{113}$

и $\sqrt{a} = \sqrt{(-16-8)^2+(-8-15)^2} = \sqrt{24^2+23^2}$

$\sqrt{a} < \sqrt{113}$ решений нет $\Rightarrow$ $\sqrt{a} = 7$ решений нет

$\sqrt{a} > \sqrt{24^2+23^2}$ решений нет



$\Rightarrow$ 2 решения при

$\sqrt{a} = 7 \quad a = 49$

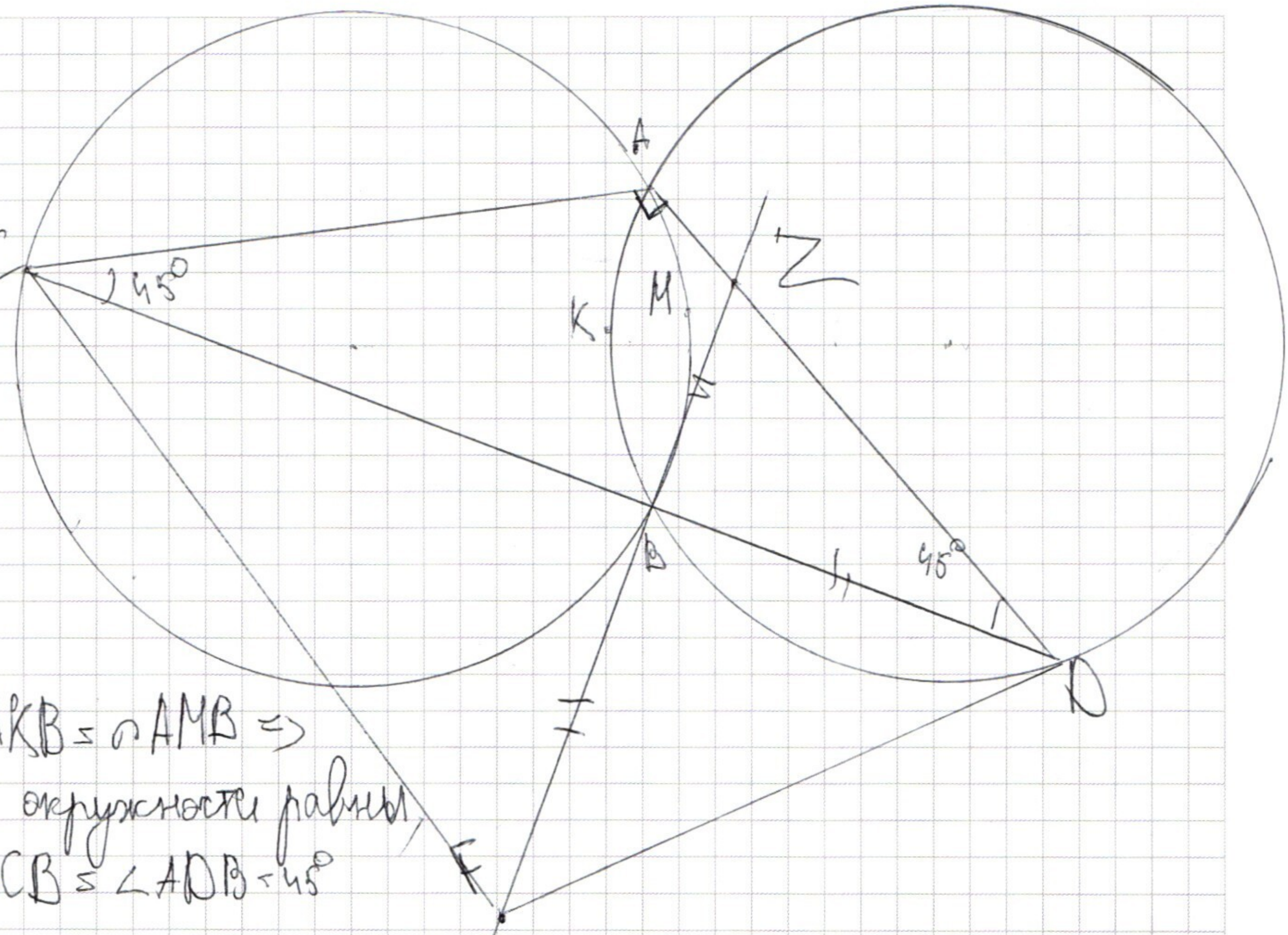
$\sqrt{a} = \sqrt{24^2+23^2} \quad a = 24^2+23^2$

Ответ: 49; $24^2+23^2 = 1105$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6)



$\Delta AKB = \Delta AMB \Rightarrow$

т.к окружности равны

$\angle ACB = \angle ADB = 45°$

$FB = BF$ т.к Δ равнобедренный

$ZB = BE$ т.к Δ равнобедренный

ΔCZF

3) $\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{9}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 \end{cases}$ $y<0$; $xy^2>0 \Rightarrow x>0$

рассмотрим 2 уравнение:

$y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0$

$y^2+(2x+4)y-3x^2+12x=0$

$y_{1,2}=\frac{-(2x+4)\mp\sqrt{D}}{2}=\frac{-2x-4\pm\sqrt{16x^2-32x+16}}{2}=$

$=\frac{-2x-4\pm\sqrt{(4x-4)^2}}{2} \Rightarrow y_1=x-4 \quad y_2=-3x$

$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{9}\right)^{\ln(-y)}=x^{2\ln(xy^2)} \\ y=-3x \end{cases}$

$\left(-\frac{x^7}{9}\right)^{\ln 3x}=x^{2\ln 9x^3}$

$3x^{\ln\left(-\frac{x^7}{9}\right)}=x^{2\ln 9+2\ln x^3}$

$3x^{\ln(-x^7)-\ln 9}=x^{2\ln 9+6\ln x}$

$3x^{7\ln(-x)-\ln 9}=x^{2\ln 9+6\ln x}$

$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{9}\right)^{\ln(-y)}=x^{2\ln(xy^2)} \\ y=x-4 \end{cases}$

$\left(-\frac{x^7}{9}\right)^{\ln(4-x)}=x^{2\ln(x\cdot(x-4)^2)}$

$(4-x)^{\ln(-x^7)-\ln 9}=x^{2\ln x+4\ln(x-4)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) A B C D E F K M   560

10) $64827 : 3 = 21609$; $21609 : 3 = 7203$; $7203 : 3 = 2401$; $2401 : 7 = 343$

$3\cdot2\cdot1 \quad 4\cdot3\cdot2\cdot1$

$49 \cdot 7 = 343$; $2401 \cdot 27$ … 64827

$\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x\cos x$

$\cos x$

$64827 = 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7$

$3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot1$

$9\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot1\cdot1$

$56 \cdot 5 = 280$; $120 \cdot 7 = 840$

$\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{6}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = 8\cdot7\cdot5 = 280$

$\frac{\cancel{8}\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1\cdot\cancel{2}} = 7\cdot6\cdot5\cdot4 = 840 + 280 = 1120$

$\frac{7x+3x}{5}$

$a+b = 10x$

$a-b = 2x + \frac{\pi}{4}$

$a = \frac{12x + \frac{\pi}{4}}{2} = 6x + \frac{\pi}{8}$

$b = 4x - \frac{\pi}{8}$

2) $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x\cos 2x + 2\sin 2x\cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x\,(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$ $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$2\cos 5x\,\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\sqrt{2}\cos 5x \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\sqrt{2}\left(\sin\left(6x + \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(4x - \frac{\pi}{8}\right)\right) + \cos 4x = 0$

$\cancel{\cos 7x + \sin 3x}$

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x + \sin 2x)(2\cos 5x - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)) = 0$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right) = 0$

$2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos 5x = 0$

$4\left(\cos\left(\frac{2x + 5x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)\right)\left(\cos \frac{2x + \frac{\pi}{4} - 5x}{2}\right) = 0$

3) $|x + y + 8| + |x - y + 8| = 16$ $\quad x + y > 0$

$x - y > 0$

$(|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 9$

$\cancel{x + y = 9}$

$\cancel{x - y = 1}$

$y = -x - 8$

$y = x + 8.$

$\cancel{|(x+8)^2 - y^2| = 16}$

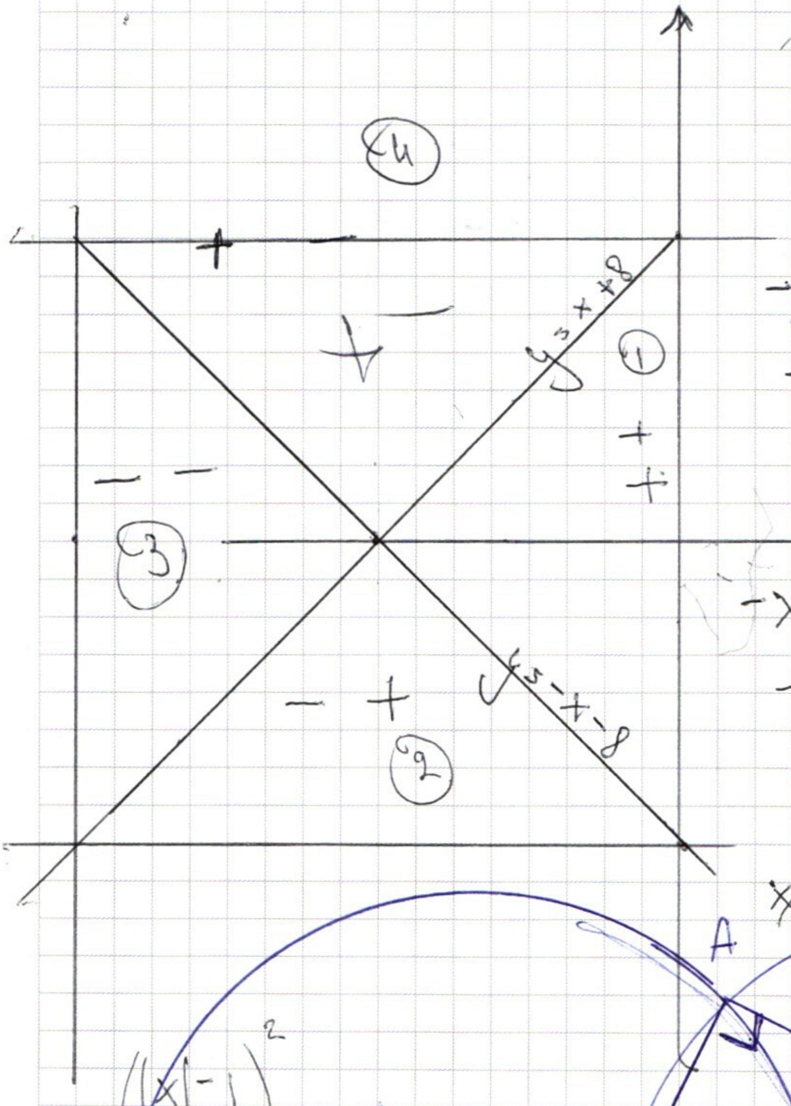
☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\cancel{x}+\cancel{y}+\cancel{8}+x-\cancel{y}+\cancel{8}=16$

$2x=0$

$x=0$

$x+8$

$-\cancel{x}-y-\cancel{8}+\cancel{x}-y+\cancel{8}=16$

$-2y=16$

$y=-8$

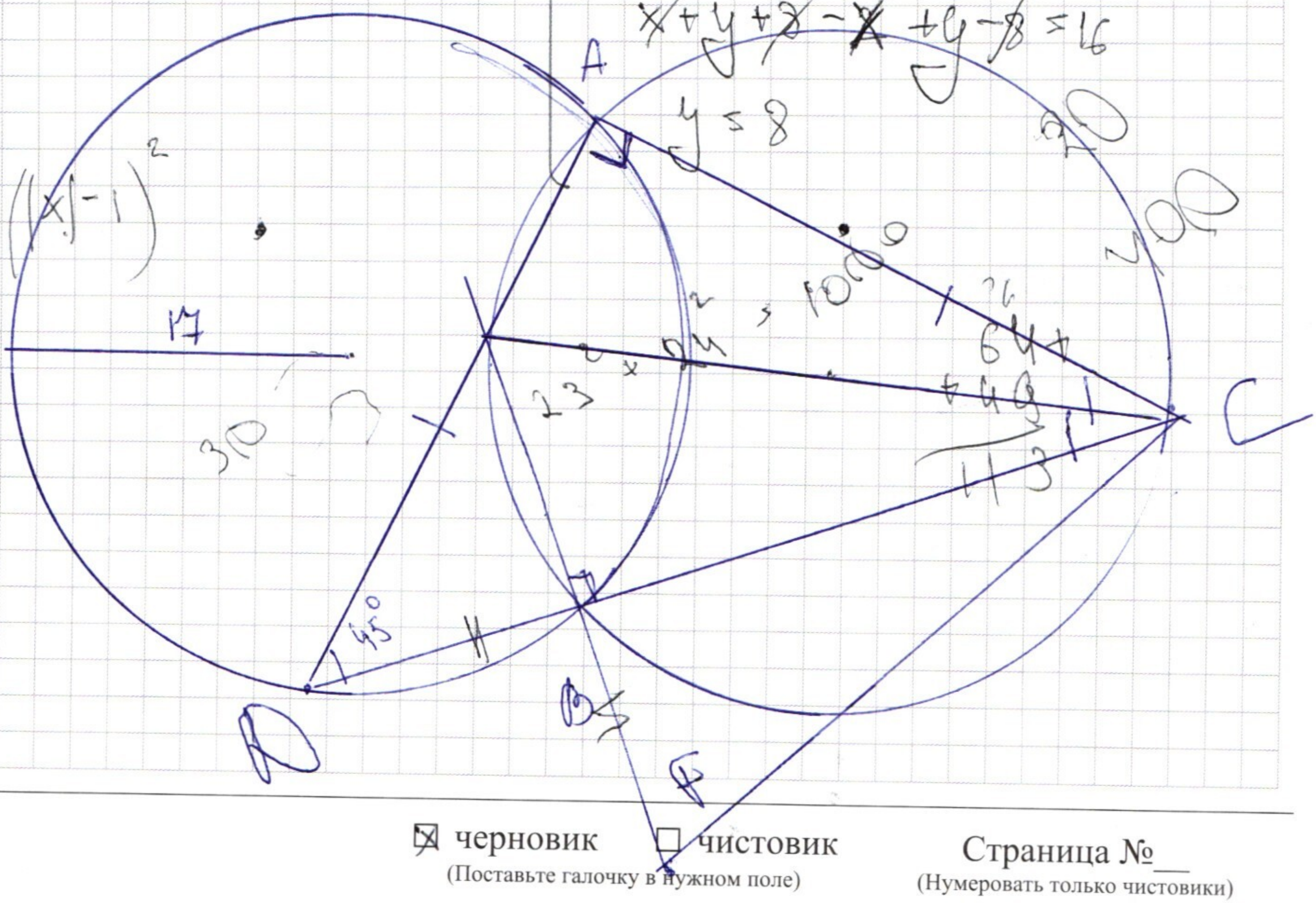
$-x-\cancel{y}-8-x+\cancel{y}-8=16$

$-2x=32$

$x=-16$

$\cancel{x}+y+\cancel{8}-\cancel{x}+y-\cancel{8}=16$

$y=8$



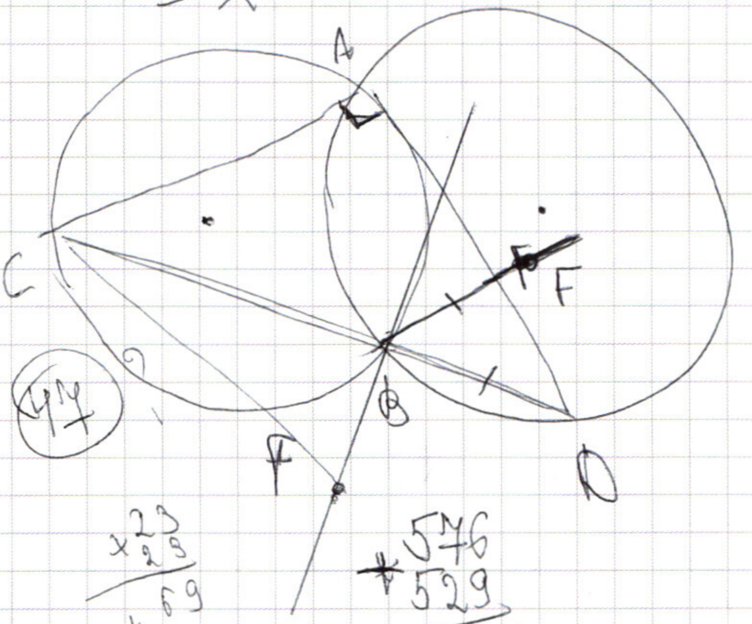
☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\ln 9 - \ln(-x^7)$ $\quad 2\ln 9 + 2\ln x^3$

$\leq x$

~~33~~



$y > 3^x + 4\cdot 3^{28}$

$y \leq 98 + 3(3^{27}-1)x$

$y \leq 98 + 3^{28} - 3x$

$93 + 3^{28} - 3x > 3^x + 4\cdot 3^{28}$

$93 - 3\cdot 3^{28} - 3x - 3^x > 0$

$31 - 3^{28} - x - 3^{x-1} > 0$

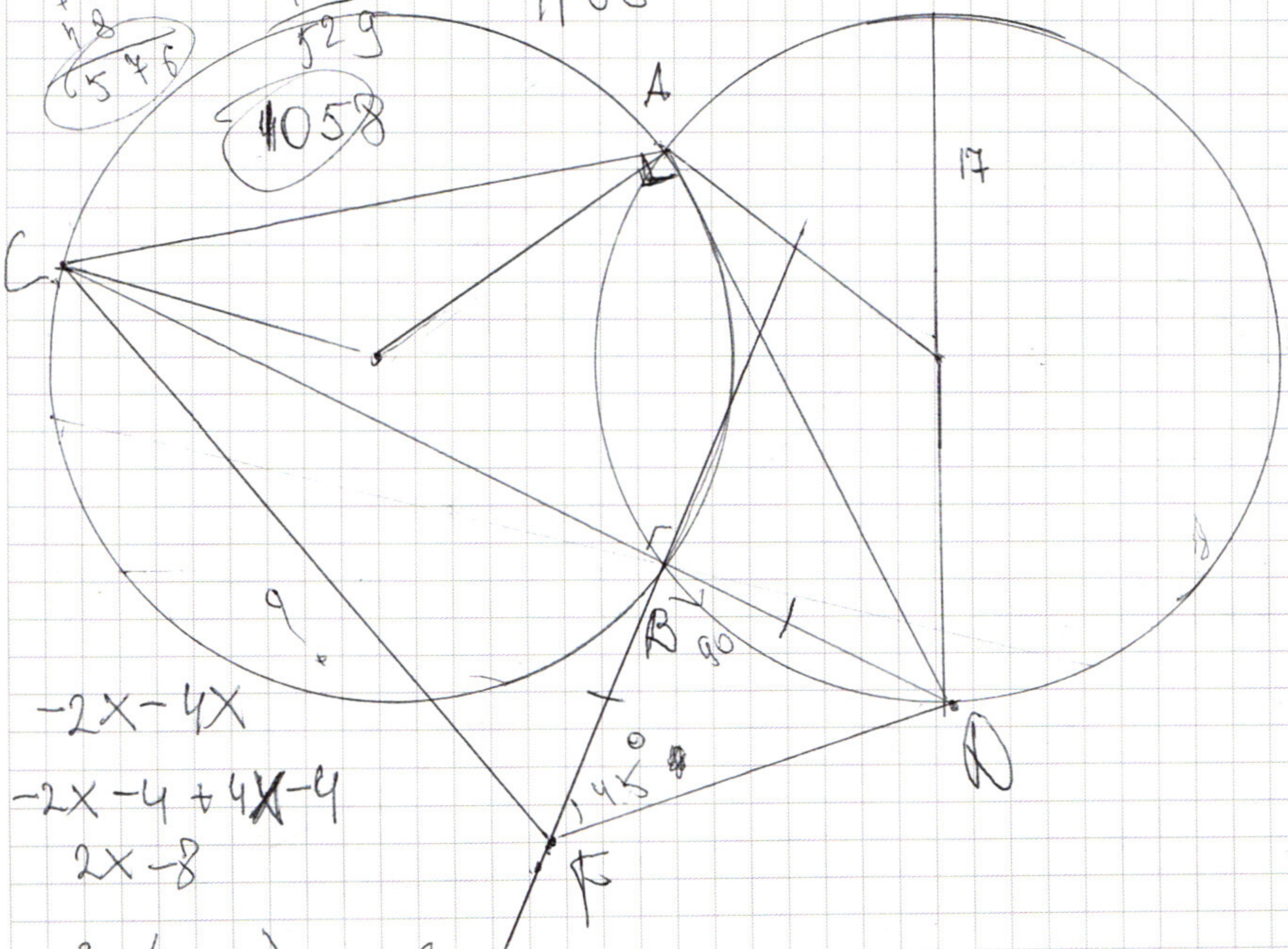
$9x^3$

24^2

417

$$\begin{array}{r} \times\ 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 576 \\ 529 \\ \hline 1105 \end{array}$$

1058



$-2x - 4x$

$-2x - 4 + 4x - 4$

$2x - 8$

$y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$

$D = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x = 0$

$16x^2 - 32x + 16 = 0$

$x -$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)