

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$(\cos 7x + \cos 5x) + (\sin 7x - \sin 5x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos \frac{7x+5x}{2} \cos \frac{7x-5x}{2} + 2 \sin \frac{7x-5x}{2} \cdot \cos \frac{7x+5x}{2} + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \right) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$2 \cdot \left(\cos 5x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \right) \right) (\cos 2x + \sin 2x) = 0 \quad | :2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}, \text{ значит } \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x =$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x = \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\left(\cos 5x + \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin 2x = 0 \\ \cos 5x + \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2x = -1 \\ 2 \cos \frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$1) 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos \frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0 \Rightarrow \frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7x = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi n}{1}; n \in \mathbb{Z}$$

$$3) \cos \frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}; \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}; n \in \mathbb{Z}$$

№1

$64827 = 5^3 \cdot 7^3$; число может состоять только из цифр $\Rightarrow$ некакие возмозможные числа

можно составить только $y: \{1; 3; 7; 9\}$
 в разложении 64824 ~~и~~ ~~есть~~ ~~есть~~ $7^3 \Rightarrow$
 в числе ровно 3 семерки, в числе
 может быть либо $\{3, 9\}$, либо $\{3, 3, 3\}$,
 остальные - единицы

I) $\{7, 7, 7, 3, 3, 3, 1, 1\}$

Эти цифры в числе можно переставить
 $P(8) = 8!$ способами ($P(x) = x!$)

учитывая, что некоторые перестановки
 могут повторяться (в наборе есть равные
 числа): $\{7, 7, 7\}$ можно переставить между
 собой в одном числе $P(3) = 3! = 6$ способами, а
 $\{3, 3, 3\}$ — $P(3) = 6$; $\{1, 1\}$ — $P(2) = 2$

итого: $\overset{36}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 72$ раз повторяется каждая
 комбинация?

всего таких чисел: $\frac{8!}{72}$

II) $\{7, 7, 7, 9, 3, 1, 1, 1\}$

точно так же $8!$ повторяющихся перестановок

$\{7, 7, 7\}$ — $P(3) = 6$

$\{1, 1, 1\}$ — $P(3) = 6$

$6 \cdot 6 = 36$

всего таких чисел: $\frac{8!}{36}$

Значит ~~и~~ искомого кол-во 8-значных чисел:

$$\frac{8!}{36} + \frac{8!}{72} = \frac{3 \cdot 8!}{6 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = \overset{80}{5 \cdot 6} \cdot \overset{56}{7 \cdot 8} =$$

Ответ: 1680

~~1680~~ 1680

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

WS

$$I) |x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$II) ((x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$$

$$I) 1) \begin{cases} x+y+8 > 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+8 > 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases}$$

$$x+y+8 + x-y+8 = 16$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y > -x-8 \\ y < x+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < x+8 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$x = 0$$

$$2) \begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 < 0 \end{cases}$$

$$-(x+y+8) - (x-y+8) = 16$$

$$\begin{cases} y < -x-8 \\ y > x+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > x+8 \\ x = -16 \end{cases}$$

$$x = -16$$

$$3) \begin{cases} x+y+8 > 0 \\ x-y+8 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+8 > 0 \\ x-y+8 < 0 \end{cases}$$

$$x+y+8 - (x-y+8) = 16$$

$$\begin{cases} y > -x-8 \\ y > x+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > x+8 \\ 2y = 16 \end{cases}$$

$$2y = 16 \Leftrightarrow y = 8$$

$$4) \begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 > 0 \end{cases}$$

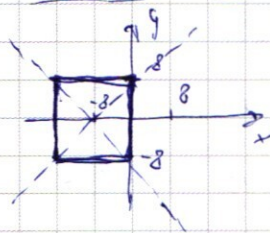
$$-(x+y+8) + x-y+8 = 16$$

$$\begin{cases} y < -x-8 \\ y < x+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < x+8 \\ -2y = 16 \end{cases}$$

$$-2y = 16 \Leftrightarrow y = -8$$

график I:



$$II) ((x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \quad - \text{окр. (полны при радиусе } < 8)$$

$$R = \sqrt{a} \quad O_{\pm 8, \pm 15}(\pm 8; \pm 15); \text{ рисунке чертится на}$$

следующей странице.

1) Сначала окр. не имеют общих точек с квадратами; по мере увеличения радиуса,

найдётся a , при
которой ^{с центрами} $\text{окр. } \sqrt{O_1} \text{ и } O_3$
касаться квадрата, и
 O_1, O_4 - кет

тогда

$$\sqrt{a} = R = 15 - 8 = 7$$

$$a = 49$$

2) Дальше с увеличением радиуса
будет 4 точки пересечения:

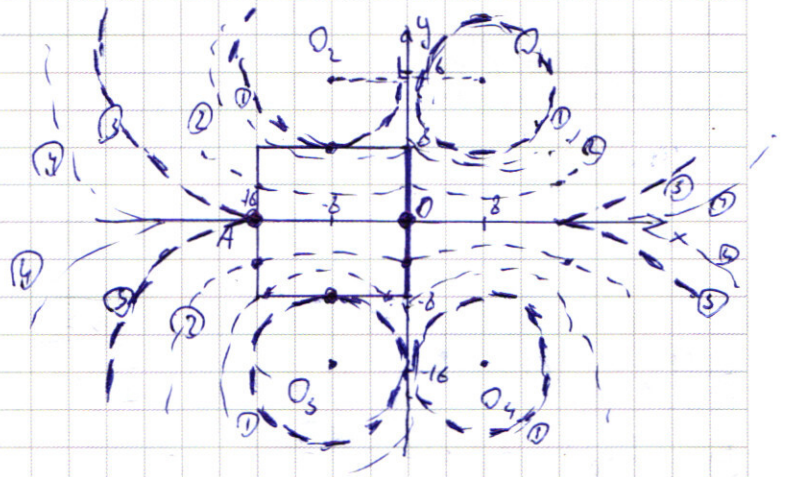
сначала O_2, O_3 окр с центрами O_2, O_3
пересекают ~~на куб~~ на 2 раза, а
потом ~~еще окр. с центрами~~ O_3, O_4 на 1 раз (точки
пересечения ~~кв. и окр. с центрами~~ O_1 и O_4 совпадают
с точками из точек пересечения окр. с
центрами O_2 и O_3 соответственно)

3) Но когда окр. проходит через
точки $O(0;0)$ и $A(-16;0)$ 4 точки
становятся двумя (тогда каждая 2 совпадают)

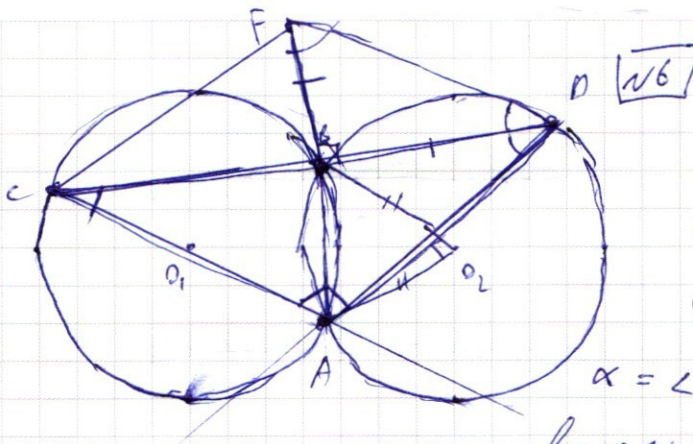
$$\text{Тогда } \sqrt{a} = R = \rho(O; O_1) = \sqrt{8^2 + 15^2}$$

$$a = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$$

4) Дальше окр. не имеют общих
точек с квадратом



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



а) Дуги равны $\Rightarrow$
их точки пересечения
деляют равные дуги $\Rightarrow$

$$\alpha = \angle BDA = \angle BCA \text{ как}$$

вписанные углы, стягиваемые

равными дугами $\Rightarrow$; $2\alpha + 90^\circ = 180^\circ$ (в $\triangle CAD$) $\Rightarrow$

$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \triangle CAD$ - равнобедренный

$\angle BO_2A = 90^\circ$ ~~так~~. ($\angle BO_2A$ - центральный,
отв. на $AB \Rightarrow \angle BO_2A = 2 \cdot \angle BDA$)

$$O_2B = O_2A = R_2 = 17 \Rightarrow \text{в } \triangle BO_2A$$

$$AB = 17\sqrt{2}$$

Пусть $\angle BAD = \beta$, тогда по т. косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \beta$$

$$\cos \angle CAD = \cos (90^\circ - \beta) = \sin \beta$$

$$BD = x \quad AD =$$

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \sin \beta$$

$$AC^2 = AD^2$$

~7

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 5^{28} \\ y \leq 95 + 5(5^{27} - 1)x \end{cases}$$

у графиках

$$y = 3^x + 4 \cdot 5^{28}$$

$$y = 95 + 5(5^{27} - 1)x$$

2 точки пересечения:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 31$$

~~вычитаем $31 - 4 = 27$ точек~~

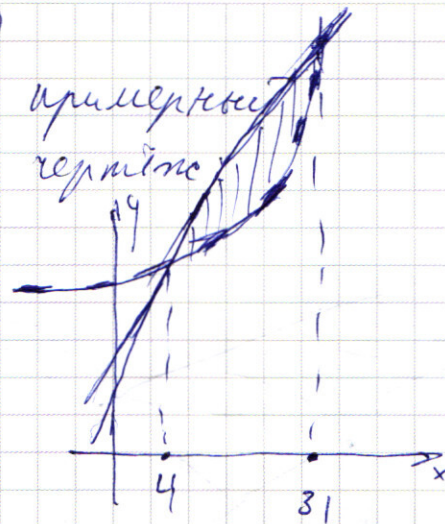
$$f(x) = 3^x + 4 \cdot 5^{28} - (95 + 5(5^{27} - 1)x)$$

$$f'(x) = 3^x \ln 3 + 0 - 0 - 0 + 5 - 5^{28}$$

$$f'(x_0) = 0$$

$$3^{x_0} \ln 3 = 5^{28} - 5$$

$$x < 27$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \quad |x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$2) \quad (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$$

$$(1) \quad \begin{cases} x-y+8 > 0 \\ x+y+8 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+8 = 0 \\ x+y+8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+8 = 0 & y' : y = x+8 \\ x+y+8 = 0 & x' : y = -x-8 \end{cases}$$

$$x+y+8 + x-y+8 = 16$$

$$2x = 0 \quad 2x = 0 \quad x = 0$$

$$4) \quad \begin{cases} x-y+8 > 0 \\ x+y+8 < 0 \end{cases}$$

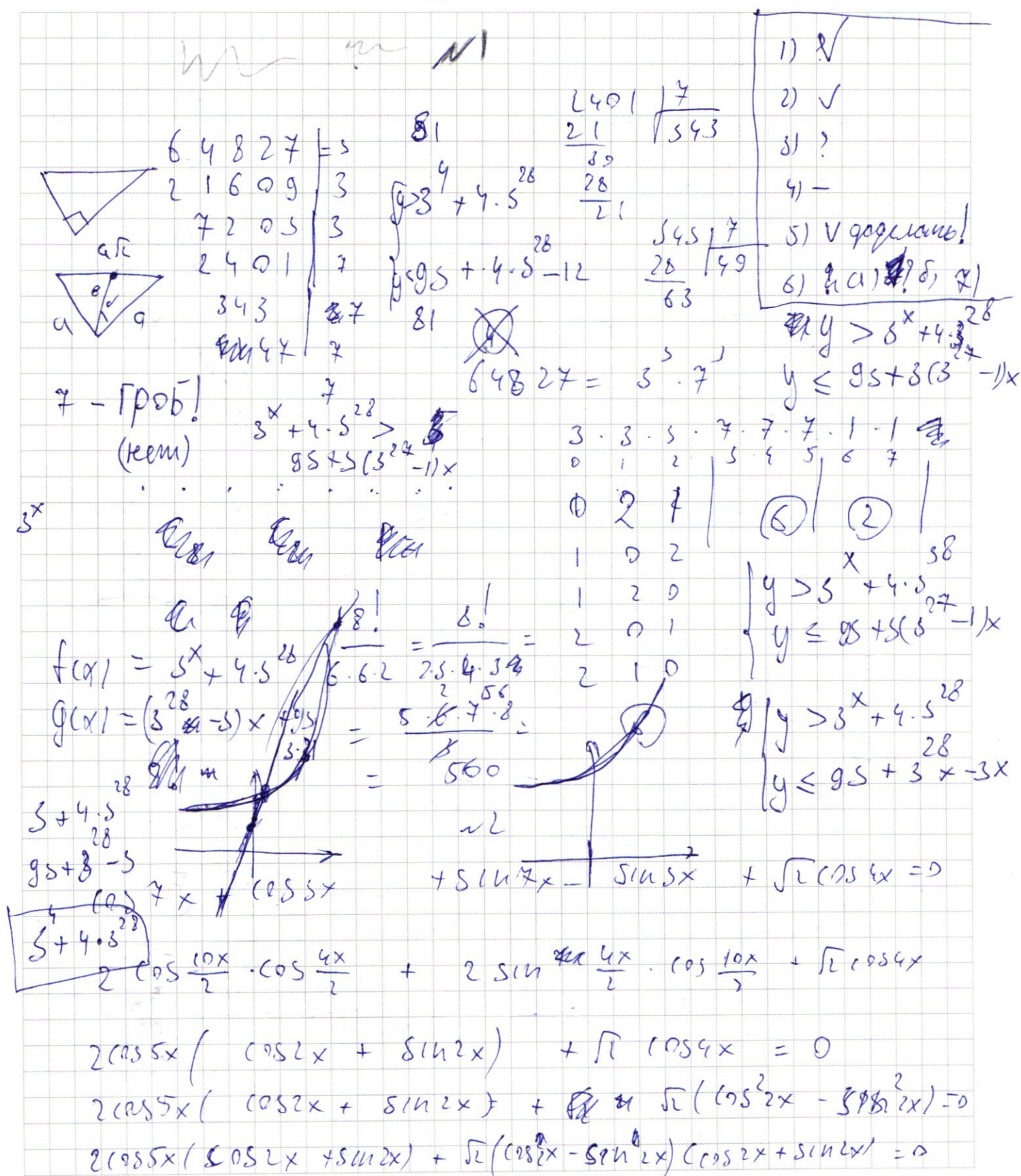
$$2) \quad \begin{cases} x-y+8 > 0 & y < x+8 \\ x+y+8 < 0 & y < -x-8 \end{cases}$$

$$x+y+8 - (x-y+8) = 16$$

$$2y = 16 \quad y = 8$$

$$3) \quad \begin{cases} x-y+8 < 0 & y > x+8 \\ x+y+8 > 0 & y > -x-8 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(2\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x))(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x = -\sin 2x$$

$$2\cos 5x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \right) = 0$$

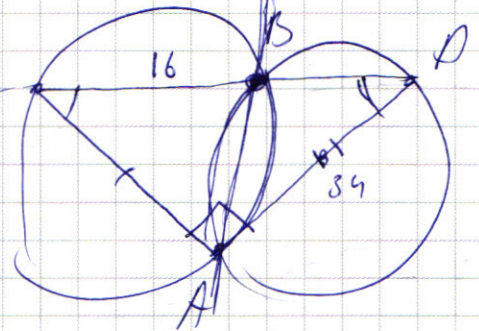
$$\tan 2x = -1$$

$$2\cos 5x + 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos 5x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\begin{cases} 7x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} 7x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \\ 3x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

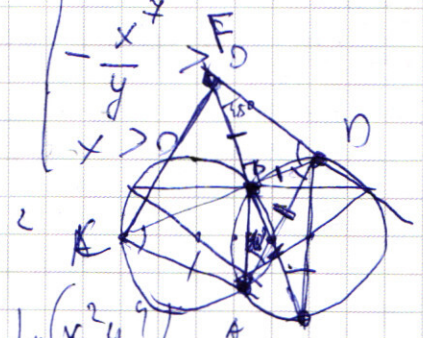


$$\int \left(-\frac{x}{y} \right)^4 \ln(-y) = x^2 \ln(xy^4)$$

$$y^2 + 2xy - 5x^2 + 12x + 9y$$

$$\begin{cases} -y > 0 \\ xy^2 > 0 \\ -\frac{x}{y} > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ & (x^4)^{\ln(-y)} - (-y)^{\ln(-y)} = x^4 \ln(x^2 y^4) \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$I) |x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$II) ((x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 9$$

$$I) \begin{cases} x+y+8 > 0 \\ x-y+8 > 0 \\ x+y+8 + x-y+8 = 16 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 < 0 \\ -(x+y+8) - (x-y+8) = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -x-8 \\ y > x+8 \\ x = -6 \end{cases}$$

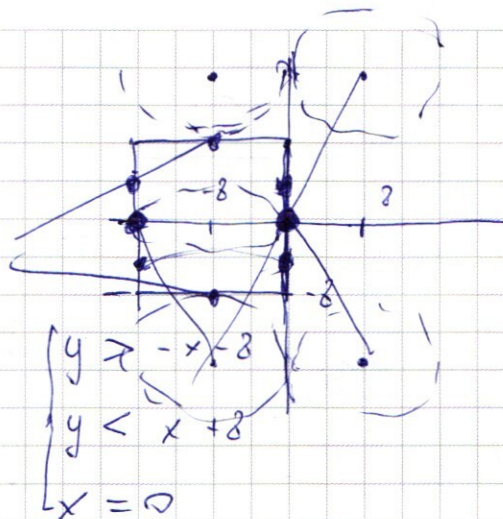
$$y' = x + (x-y)$$

$$x' = x+y$$

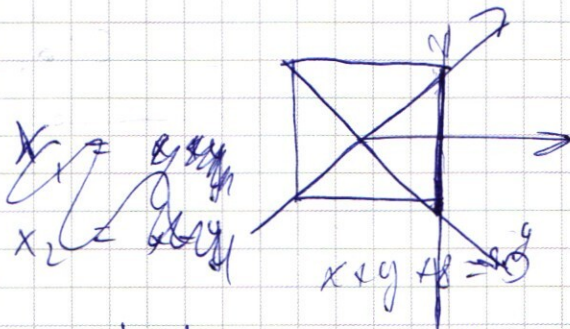
$$x' = x+y$$

$$y' = x-y$$

$$|x'+8| + |y'+8| = 16$$



$$\begin{cases} y < -x-8 \\ y > x+8 \\ -2x = 32 \end{cases}$$



$$x' + y' = 2x \quad \text{or} \quad 4x$$

$$x' = 2x - y'$$

$$x' - y' = 2y$$

$$x' + y' = 2x$$

$$y > -x-8$$

$$x-y+8=0$$

$$y > x+8$$

