

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4}x^2 &\rightarrow 0 \\
 xy &< 0 \\
 -y &> 0 \\
 y &< 0 \quad x > 0
 \end{aligned}$$

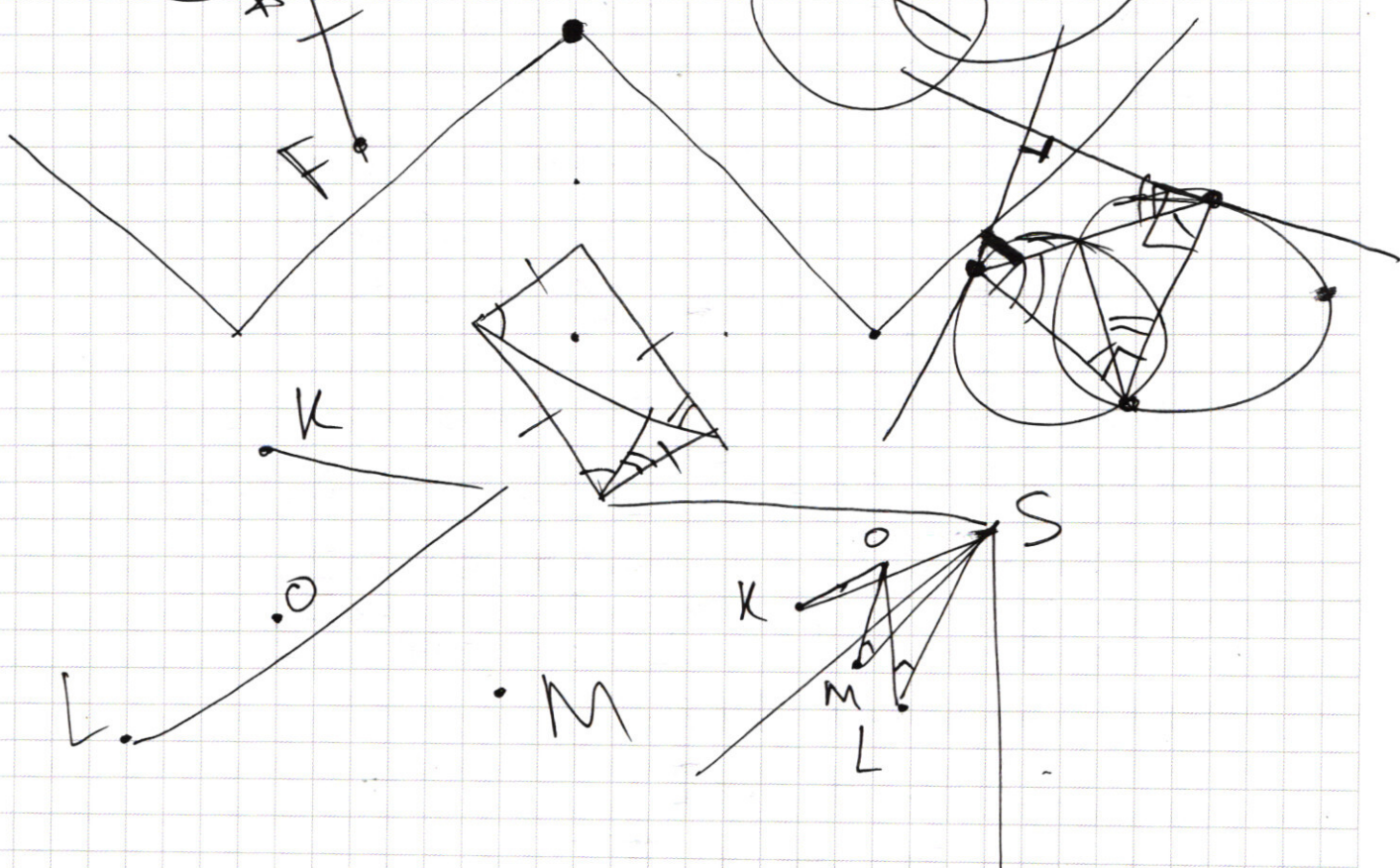
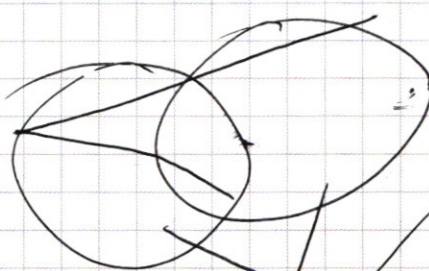
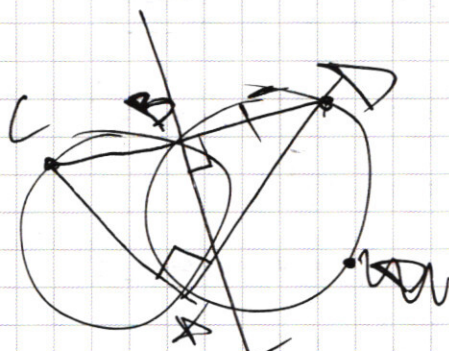
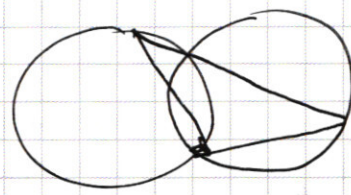
$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + y \cdot (2x + 4) + (12x - 3x^2) = 0$$

$$(2x + 2)^2 - (12x - 3x^2) =$$

$$= 3x^2 - 12x + x^2 + 4x + 4 =$$

$$= 4x^2 - 8x + 4$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2

$$\cos(7x) + \cos(3x) + \sin(7x) - \sin(3x) + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$\left(\cos(7x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(7x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\cos(3x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(3x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \cos 4x = 0$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \cos 4x = 0 \quad (*)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) -$$

$$- \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Подставляя в "(*)", получаем (равносильно):

$$2 \cdot \sin\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 3x}{2}\right) = -\cos 4x$$

$$2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(5x) = -\cos 4x$$

$$2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(5x) = -\sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(5x) = -2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot (\cos(5x) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4} + \pi\right)) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos(5x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4} + \pi\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 5x = \pm\left(2x + \frac{\pi}{4} + \pi\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 5x = 2x + \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 5x = -2x - \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Разложим 64827 на простые множители:

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 7} \\ \underline{63} \\ 18 \\ \underline{14} \\ 42 \\ \underline{42} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 7} \\ \underline{7} \\ 22 \\ \underline{21} \\ 16 \\ \underline{14} \\ 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1323 \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ 42 \\ \underline{36} \\ 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 147 \overline{) 7} \\ \underline{14} \\ 21 \end{array}$$

И.е. $64827 = 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 21 = 7^4 \cdot 3$

Непосредственно видно, что цифры, делящиеся на 7 , одна: 7 , т.е. в каждом из чисел есть 4 семёрки.

Из цифр, делящихся на 3 , два: 3 и 9 , причём 3 входит в 9 во 2-ой степени, т.е. девятка максимум одна.

Замечание: разумеется, есть универсальная цифра 0 , делящаяся и на 3 , и на 7 , но такая цифра в искомым числах нет, иначе произведение цифр $0 \neq 64827$, поэтому 0 не упоминается.

П.о. некоторые числа содержат 4 селёдки, 3 тройки или 1 девятку и 21 тройку, и все остальные ~~из~~ единицы, как нестрогое понятие, единицы. Посчитаем числа каждого вида:

1 мин 4 селёдки, 3 тройки и $8 - 4 - 3 = 1$ единица.

Кол-во равно $C_8^1 \cdot C_3^3 = 8 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} =$

↑
сначала выбираем место для единиц } потом 3 места из оставшихся для троек (оставшиеся 4 места - селёдки)

$$= 8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 7 \cdot 40 = 280$$

2 мин 4 селёдки, 1 девятка, 1 тройка и $8 - 4 - 1 - 1 = 2$ единицы

Кол-во равно $C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^2 =$

↑
выбираем место для девятки } ↑
для тройки } (оставш. места - селёдки)
для двух единиц

$$= 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 21 \cdot 40 = 840$$

Это все мин (виды) некоторых чисел.

$$840 + 280 = 1120$$

Ответ: 1120

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6

$$R = 17$$

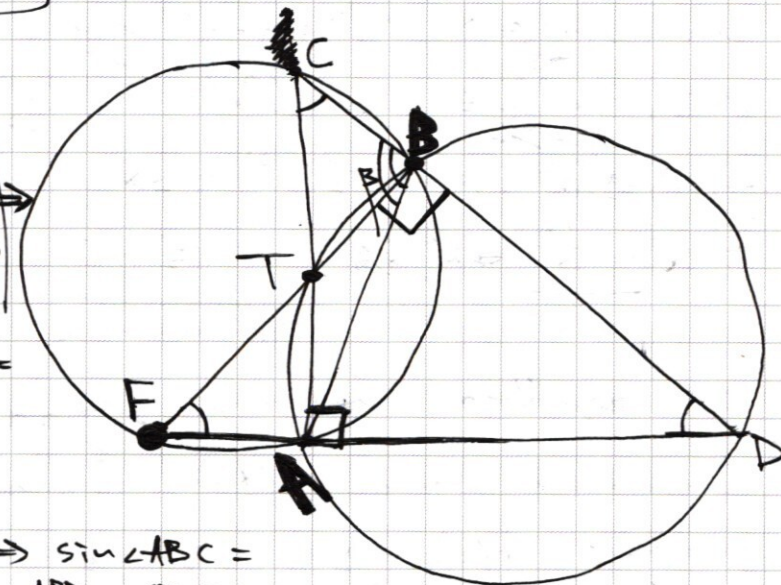
ИЗ Т. sin:

$$\frac{AC}{\sin \angle CBA} = 2R = \frac{AD}{\sin \angle ABD} \Rightarrow$$

$$\sin \angle ABC = \sin (180^\circ - \angle ABC) = \sin \angle ABD$$

$$\Rightarrow AC = AD \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC =$$

$$= \frac{180^\circ - \angle CAD}{2} = 45^\circ$$



Итак $\beta = \angle ABC \Rightarrow \sin \angle ABC =$
 $= \sin \angle ABD = \sin \beta$

ИЗ ранее упомянутой Т. sin: $AC = 2R \sin \beta = AD$

Итак $\angle CAB = \theta$, $\angle BAD = 90^\circ - \theta$

ИЗ Т. sin: $\frac{BC}{\sin \theta} = 2R = \frac{BD}{\sin (90^\circ - \theta)} \Rightarrow$

$$\begin{cases} BC = 2R \sin \theta \\ BD = 2R \cos \theta \end{cases}$$

ИЗ Т. Пифагора ($\triangle CBF$): $CF^2 = CB^2 + BF^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow CF = \sqrt{CB^2 + BD^2} = 2R \cdot \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 2R = 34$$

Итак Т - второе пересеч. со 2-ой окр-тью
прямой (AC) (если второго пересеч. нет, то

$A = T$). Ил.к $\angle TAD = 90^\circ$, TD - диаметр
(и если $A = T$, то TD прямо углы
диаметра).

~~Сделаем стандартно картинку~~

$$\angle DBF = 90^\circ \Rightarrow T \in (BF).$$

$$\angle DBT = 90^\circ$$

Задача №7

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3 \cdot (3^{27} - 1)x \end{cases}$$

1 случай $x \leq 0$: $y > 4 \cdot 3^{28}$ и $y \leq 93$ — нет реш ($93 < 3^5 < 4 \cdot 3^{28}$)

2 случай $x > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{N}$
 $y > 4 \cdot 3^{28} \Rightarrow y \in \mathbb{N}$

система $\Leftrightarrow 3^x + 4 \cdot 3^{28} < y \leq 93 + 3^{28}x - 3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < \underbrace{y - 4 \cdot 3^{28}}_{y > 4 \cdot 3^{28}} \leq 93 + 3^{28} \cdot (x - 4 - 3^{x-28}) - 3x$

$f(x) = 93 + 3^{28} \cdot (x - 4 - 3^{x-28}) - 3x$

$f'(x) = 3^{28} \cdot \cancel{3^x} \cdot \ln(3) - 3$

т.к. 3^x неограниченно возрастает, $f'(x)$ будет < 0

на $x \geq 0$ с первого момента, когда $f'(x)$ стало < 0 .

Заметим, что $f'(x)$ сначала > 0 , потом < 0 ,

причем $f(0) = 93 - 4 \cdot 3^{28} - 3^0 < 0$

т.е. до некоторого x $f(x)$ возрастает,
 потом убывает, т.е. положит. значения

$f(x)$ достигаются при нек x (или x_1 до x_2 , включит.)

причем все между и никакие другие.

$f(28) = 93 + 3^{28} \cdot (28 - 4 - 3^0) - 3 \cdot 28 =$

$= 9 + 3^{28} \cdot 23 > 0$

$f(32) = 93 + 3^{28} \cdot (32 - 4 - 3^4) - 3 \cdot 32 = -3 - 3^{28} \cdot 45 < 0$

$f(31) = 93 + 3^{28} \cdot (31 - 4 - 3^3) - 3 \cdot 31 = 0$

$f(30) = 93 + 3^{28} \cdot (30 - 4 - 3^2) - 3 \cdot 30 = 3 + 3^{28} \cdot (30 - 4 - 9) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = 30$

$f(3) = 93 + 3^{28} \cdot (-1 - 3^{x-28}) - 9 < 93 - 3^{28} < 0 \Rightarrow x_1 = 4$

$f(4) = 93 + 3^4 - 12 > 0$

Задача №6 (усложненная)
 Рассмотрим $\triangle FBD$: $FB=BD$ $\left| \begin{array}{l} \angle FBD=90^\circ \\ \Rightarrow \angle BDF=\angle BFD=\frac{180-90}{2}=45^\circ \end{array} \right.$

$$\angle BDF = \angle BDA$$

A и F лежат на одной прямой с B $\Rightarrow F \in [DA)$

~~A и B на одной прямой~~

$$\angle (FB; FA) = \angle (BF; BD) + \angle (BD; DF) = \angle (AD; AC) + \angle (CD; AD) = \angle (CB; AC) \Rightarrow \pi/2$$

C и F на одной прямой с A и B .

$$F \in (AD) \Rightarrow CA \perp AC \Rightarrow S(AFC) = AC \cdot AF / 2 =$$

$$= \frac{CD}{\sqrt{2}} \cdot |AD - FD| / 2 = \frac{CD}{\sqrt{2}} \cdot \left| \frac{CD}{\sqrt{2}} - \frac{BD \cdot \sqrt{2}}{2} \right| / 2$$

AC - катет,
 CD - гипотенуза
 $\triangle ACD$ с углом 45°

$F \in [DA)$

AD - катет,
 CD - гипотенуза
 $\triangle ACD$ с углом 45°

BD - катет,
 FD - гипотенуза
 $\triangle BFD$ с углом 45°

Как уже выводится: $BC = 2R \sin \theta$
 $BD = 2R \cos \theta$ и $BC^2 + BD^2 = \dots = (2R)^2 = 34^2$

~~Итого $BC^2 + BD^2 = (2R)^2 = \dots$~~

Ит.к. $BC = 16$, $BD = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{18 \cdot 50} = 6 \cdot 5 = 30$

Итого $CD = BC + BD = 46$

Итого $S(AFC) = \frac{CD}{\sqrt{2}} \cdot \left| \frac{CD}{\sqrt{2}} - \frac{BD \cdot \sqrt{2}}{2} \right| / 2 =$
 $= \frac{46}{\sqrt{2}} \cdot \left| \frac{46}{\sqrt{2}} - \frac{30 \cdot 2}{\sqrt{2}} \right| / 2 = \frac{46}{4} \cdot |46 - 60| = \frac{23}{2} \cdot 14 = 23 \cdot 7 =$
 $= 161$

Ответ: $CF = 34$
 $S(AFC) = 161$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

Рассмотрим второе уравнение как квадратное относительно y :

$$y^2 + y \cdot (2x+4) + (12x^2 - 3x^2) = 0$$

Решая его, получаем: $y = -x-2 \pm \sqrt{(x+2)^2 - (12x^2 - 3x^2)}$
 $= -x-2 \pm \sqrt{4x^2 - 8x + 4} = -x-2 \pm \sqrt{(2x-1)^2} =$
 $= -x-2 \pm (2x-1) = \begin{cases} x-4 \\ -3x \end{cases}$

И.е. система переписывается как:

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \cdot \ln(xy^3)} \\ \begin{cases} y = x-4 \\ y = -3x \end{cases} \end{cases}$$

1 случай $y = -3x$ Тогда первое ур-е перепис-ся как: $\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2 \cdot \ln(3x^3)}$

$$x^{6 \cdot \ln(3x)} = 3^{\ln(3x)} \cdot x^{2 \cdot \ln(3x^3)}$$

Из ОДЗ ($\ln(3x)$ существует) следует, что $x > 0$.

Тогда равносильно: $x^{6 \cdot \ln(3)} \cdot x^{6 \cdot \ln(x)} = 3^{\ln(3x)} \cdot x^{4 \cdot \ln(3)}$

$$\cdot x^{6 \cdot \ln(x)} \Leftrightarrow x^{2 \cdot \ln(3)} = 3^{\ln(3x)} \Leftrightarrow 2 \cdot \ln(3) \cdot \ln x = (\ln(3) + \ln(x)) \cdot \ln(3) \Leftrightarrow$$

все > 0 , делим на $\ln(3)$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \ln(x) = \ln(3) + \ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(3) \Leftrightarrow x = 3$$

2 случай $y = x-4$ Тогда первое ур-е перепис-ся как: $\left(\frac{x^7}{(4-x)}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2 \cdot \ln(x(4-x)^2)}$

В ОДЗ (существует $\ln(4-x)$ и $\ln(x(4-x)^2)$) включается:
 $4-x > 0$
 $x(4-x)^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №3 (продолжение)

III.в. $x > 0$ и $4-x > 0$.

III.г. Тогда равносильно получаем:

$$x \cdot 7 \cdot \ln(4-x) = (4-x) \ln(4-x) \cdot x \cdot 2 \cdot \ln(x(4-x)^2)$$

III.д. Все выражение положит., можно
равносильно упрощать:

$$\cancel{7 \cdot \ln(4-x) \cdot \ln(x)} = \ln(4-x) \cdot \ln(4-x) + 2 \cdot (\ln(x) + 2 \cdot \ln(4-x)) \cdot \ln x$$

$$0 = (\ln^2(4-x)) - 3 \cdot \ln(x) \cdot \ln(4-x) + 2 \cdot (\ln(x))^2$$

$$0 = (\ln(4-x) - \ln(x))(\ln(4-x) - 2 \cdot \ln(x))$$

$$\begin{cases} \ln(4-x) = \ln(x) \\ \ln(4-x) = \ln(x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4-x = x \\ 4-x = x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

III.е. , ~~все~~ разобрав все случаи,
получаем ответ:

Ответ: $x \in \left\{ 2; 3; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right\}$

$$93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 - 3^{28}$$

$$93 + 3^{28}x - 3x$$

$$-4 \cdot 3^{28} - 3^x$$

$$x+8 + \frac{16+2(x+8)}{2}$$

$$96$$

$$-3$$

$$60$$

$$24$$

$$84$$

$$9$$

$$+ 3^{28} \cdot 81$$

$$- 36$$

$$\hline 45$$

$$8 \cdot -16$$

$$930$$

$$8$$

$$465 - 6$$

$$108$$

$$+ 459$$

$$\hline 567$$

$$27$$

$$+ 93$$

$$\hline$$

$$16 \quad x+8$$

$$x+8 \quad 16 - 2(x+8)$$

$$- x \cdot 8$$

x

Ит.е. решения ур-я $0 < y - 3^x - 4 \cdot 3^{28} \leq f(x)$ в целых
существуют при x от $x_1=4$ до $x_2=30$.

Следовательно видим, что для каждого такого x
кол-во решений y равно $f(x)$, т.к. $(3^x - 4 \cdot 3^{28}) \in \mathbb{Z}$,
 $f(x) \in \mathbb{Z}$ (т.е. любое $y = z + 3^x - 4 \cdot 3^{28}$ подходит
 $\Rightarrow z > 0$ и $< f(x)$ — $f(x)$ реш.).

Ит.е. кол-во решений:

$$\begin{aligned} \sum_{x=4}^{x=30} f(x) &= 93 \cdot (30 - 4 + 1) + \sum_{x=4}^{x=30} (3^{28} - 4 \cdot 3^{28} - 3^x - 3x) = \\ &= 93 \cdot 27 - 4 \cdot 3^{28} \cdot 27 + \sum_{x=4}^{x=30} 3^{28} \cdot x - \sum_{x=4}^{x=30} 3^x - \sum_{x=4}^{x=30} 3x = \\ &= 27 \cdot (93 - 4 \cdot 3^{28}) + 3^{28} \cdot \left(\frac{30 \cdot 31}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} \right) - 3 \cdot \left(\frac{30 \cdot 31}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} \right) + \\ &+ \sum_{x=4}^{x=30} 3^x = 27 \cdot (93 - 4 \cdot 3^{28}) + (3^{28} - 3) \cdot 459 - \end{aligned}$$

Лемма: $\sum_{m=0}^{m=n} 3^m = \underbrace{1 + 3 + 9 + \dots + 3^n}_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{n+1} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{100 \dots 0}_{n+1} \cdot 3 - 10_3 \right) = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

$$\begin{aligned} &- \left(\frac{3^{31} - 1}{2} - \frac{3^5 - 1}{2} \right) = 3^{28} \cdot \left(108 + 459 - \frac{9}{2} \right) + \\ &+ \left(27 \cdot 93 - 3 \cdot 459 + \frac{3^5}{2} \right) = \\ &= 3^{28} \cdot \frac{4}{2} 562,5 + 4025,5 \end{aligned}$$

Ответ: $3^{28} \cdot 562,5 + 4025,5$

$$\begin{array}{r} 121,5 \\ 1377 \\ 2517 \\ \hline 4025,5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 27 \\ \times 93 \\ \hline 87 \\ 243 \\ \hline 2517 \\ \times 459 \\ \hline 1377 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = a \end{cases}$$

Решить геометрически:

$$2((x+8)^2 + y^2) + 2 \cdot |(x+8)^2 - y^2| = 16^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

Решить

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16.$$

~~Решение~~

~~Пусть $x \geq 0$, $y \geq 0$, тогда $x+y+8 \geq 0$~~

~~Если $0 \leq y < x+8$, то $|x+y+8| + |x-y+8| = 2x+16 - 2y = 16$~~

~~Решим геометрически. Для этого заметим, что левая часть уравнения — сумма расстояний от точки (x, y) до точек $A(-8, -8)$ и $B(8, 8)$. На координатной плоскости отложим отрезки OA и OB . Тогда сумма расстояний от точки (x, y) до точек A и B равна 16. Заметим, что $AB = 16$. Значит, искомые точки лежат на отрезке AB .~~

~~Заметим, что если $k = x+8$, то слева — сумма расстояний от y до k и $(-k)$.~~

~~Если y между k и $(-k)$, то сумма = $|2k|$, если y вне, то сумма равна $|2k| + \text{расст. от } y \text{ до ближайшего из } k \text{ и } (-k)$.~~

~~И.е. реш. при $|2k| = 16 \Rightarrow x = -8$ — вне y от -8 до 8 .~~

~~Реш. при $|2k| < 16 \Rightarrow x \in (-8; 0)$ —~~

~~для $x+8 \geq 0$ ($x \in [-8; 0]$): $y = x+8 + \frac{16-2(x+8)}{2} = 8$~~

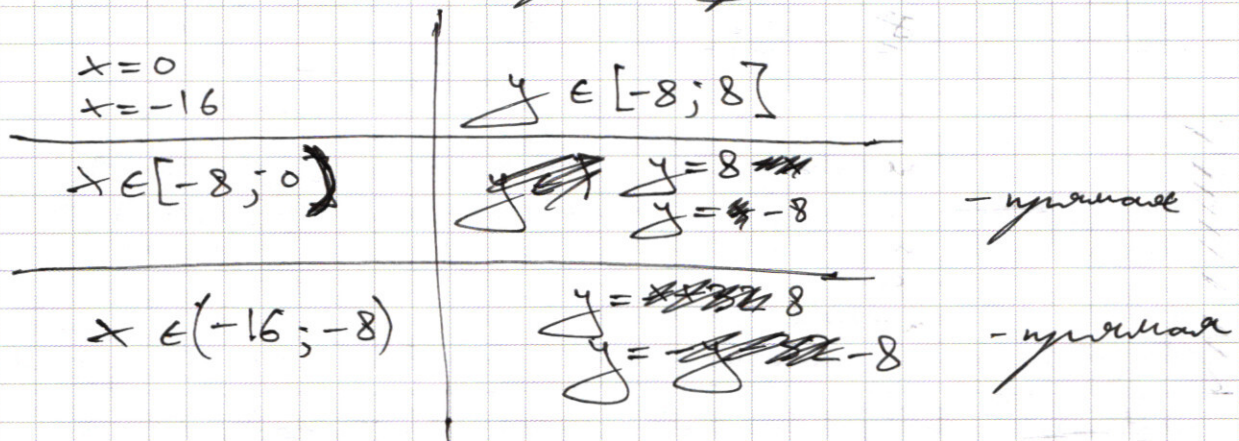
~~$y = -(x+8) - \frac{16-2(x+8)}{2} = -8$~~

при $x+8 \leq 0$ ($x \in (-16; -8)$): $y = x+8 \cdot \frac{(16+2(x+8))}{2} = \frac{x+8}{2} \cdot (16+2(x+8)) = \frac{x+8}{2} \cdot (2x+32) = (x+8)(x+16)$
 $y = -(x+8) \cdot \frac{(16+2(x+8))}{2} = \frac{-(x+8)}{2} \cdot (16+2(x+8)) = \frac{-(x+8)}{2} \cdot (2x+32) = -(x+8)(x+16)$

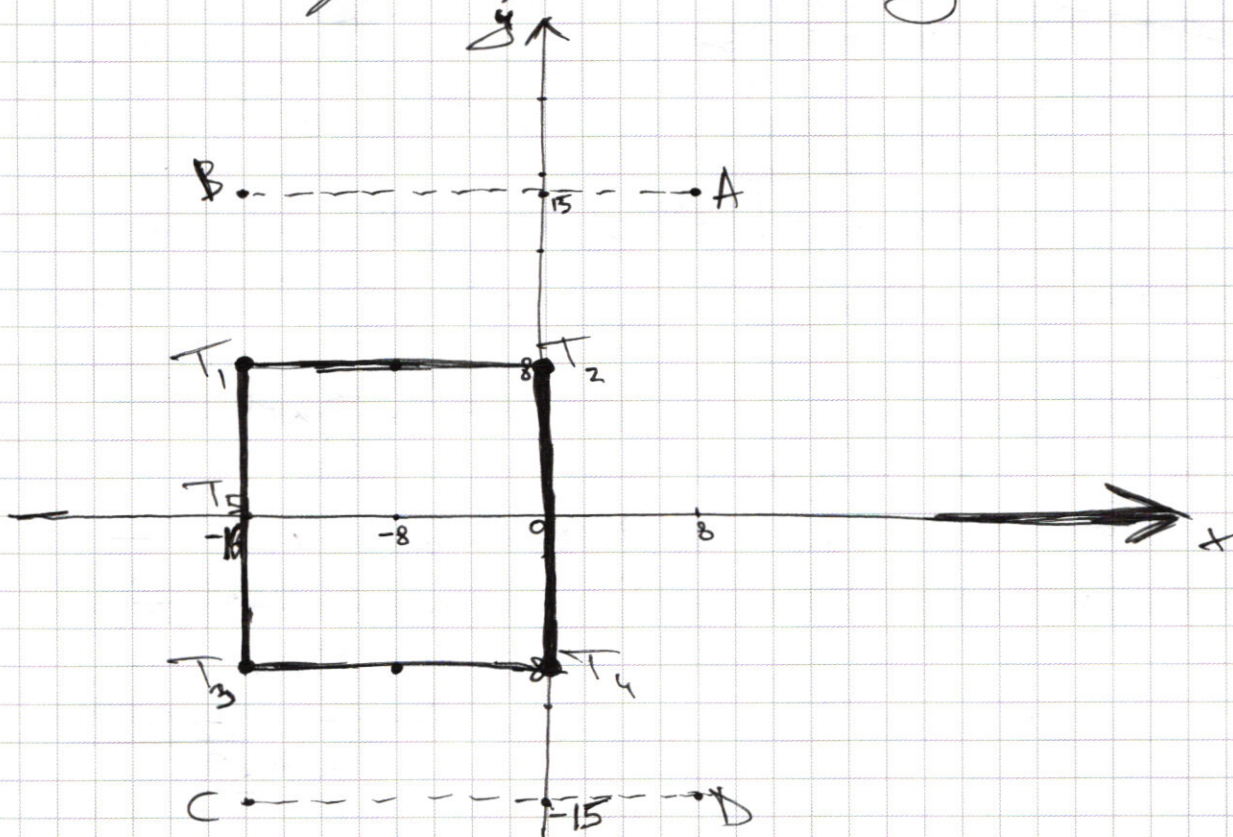
Или в реш. нет при $|2k| > 86$, т.к.
 $|2k| + \text{раств.} \dots \geq |2k| > 16$.

Итого. Итого

Итого. решения первого уравнения такие:



Геометрич. решения выглядят так:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Второе ур-е — окр-ты с центрами в A, B, C, D
радиуса $\sqrt{a}$ (если $a < 0$, решений
нет, т.к. нет реш. у 2-го ур-я — не
подходит), усечённые осьми x и y .

~~Окр-ты B и C пересек. симметрично
относительно оси $\sqrt{a} \in [BT_1; BT_2]$~~

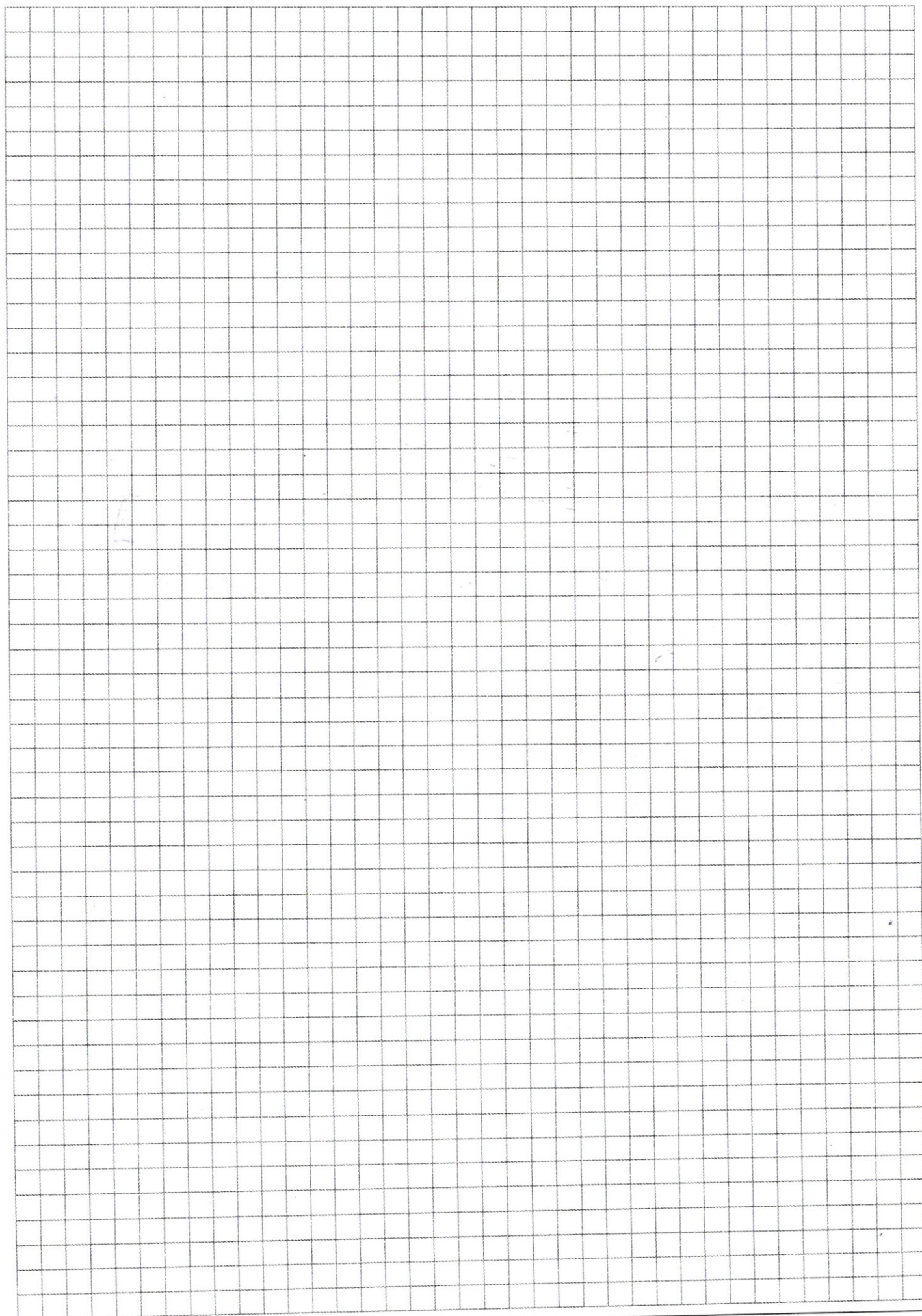
при $\sqrt{a} = BT_1 = 7 \Leftrightarrow a = 49$ решений
 T_1 и T_3

при $\sqrt{a} \in (BT_1; BT_2)$ решений
нет, т.к. окр-ты B и C перес.
по две стороны (прямые в
разн. четвертях).

$$\sqrt{a} = BT_5$$

$$\sqrt{a} = BT_2$$

при остальных
пересечений много.
2-е тоже подходит
 $a = 16^2 + 7^2 = 256 + 49 = 305$
Ответ: $a = 49$, $a = 305$.



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)