МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $64827 = 3\cdot 21609 = 3^2\cdot 7203 = 3^3\cdot 2401 = 3^3\cdot 7\cdot 343 = 3^3\cdot 7^4$

$\underline{1}\ \underline{7}\ \underline{7}\ \underline{7}\ \underline{7}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{3}$ • Пусть единица одна, тогда она может быть в одном из восьми разрядов, т.е.

$$\frac{8\cdot 7!}{3!\,4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 3} = 280$$

• Пусть единиц две, тогда $\underline{9}\cdot\underline{3}\cdot\underline{7}\cdot\underline{7}\cdot\underline{7}\cdot\underline{7}\cdot\underline{1}\cdot\underline{1}$, т.е.

$$\frac{8!}{2!\,4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2} = 840$$

Всего: $280 + 840 = 1120$

Ответ: 1120

② $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x\cos 2x + 2\sin 2x\cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x + \sin 2x)(2\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)) = 0.$

1) $\cos 2x + \sin 2x = 0$

$\sin 2x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$2\sin\left(\frac{8x+\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$2\sin\left(\frac{8x+\pi}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\frac{8x+\pi}{4} = \pi k$

$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

2) $2\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$-\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$

$-\cos 5x = \cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x$

$-\cos 5x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos(+5x) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$+2\cos\left(\frac{-12x+\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{+28x+\pi}{8}\right) = 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{-12x+\pi}{8}\right)=0\\ \cos\left(\frac{28x+\pi}{8}\right)=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{-12x+\pi}{8}=\pi k+\frac{\pi}{2}\\ \frac{28x+\pi}{8}=\pi k+\frac{\pi}{2}\end{array}\right., k\in Z$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\\ x=\frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7}\end{array}\right., k\in Z$$

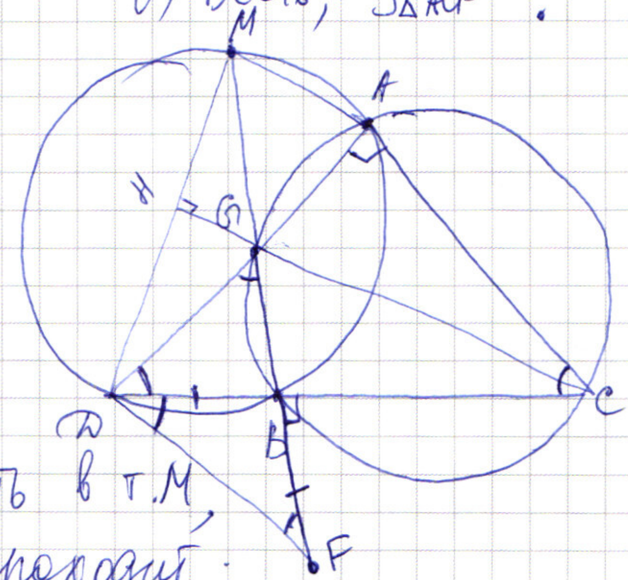
$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\\ x=\frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7}\end{array}\right., k\in Z$$

Ответ: $\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}$; $\frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7}$; $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

(6) Дано: $R=17$, $\angle CAD=90^\circ$, $BF=BD$

Найти: а) CF б) $BC=16$, $S_{\triangle ACF}$ – ?

Решение:



BF проходит г/з т.G, тк AGBC вписан в окр-ть и пересекает окр-ть в т.M, AC также проходит г/з т.M, тк она должна быть диаметрально противоположна т.D. Дуги AB у обеих окр-ей равны $\Rightarrow$ $\angle ACB=\angle ADC=45^\circ$, тогда $\angle DBG$ тоже равен 45° и $\triangle DBG$ – равнобедр. $\Rightarrow DB=GB$, значит $CF=CG$ $GC=2R=34$ $CF=34$

(тк из $\triangle MDC$: расстояние от вершины до ~~ортоцентра, равно удвоенному~~ GH)

б) из $\triangle CGB$ по т.Пифагора $DB=\sqrt{34^2-16^2}=30$

$\triangle DBF$ – равнобедр; $\angle BDF=\angle BFD=45^\circ$

Значит $DF\parallel AC$ ($\angle BDF$ и $\angle ACD$ – внутр. накр. леж)

Следовательно, чтобы найти $S_{\triangle ACF}$ мы можем взять

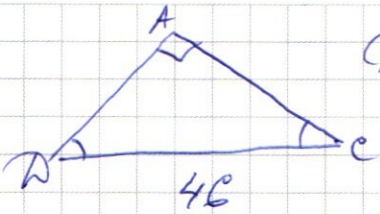
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ΔDAC ; $S_{\Delta ACF} = S_{\Delta DAC}$



$DC = DB + BC = 46$

по т. Пифагора $46^2 = 2AD^2$

$AD = 23\sqrt{2}$

$$S = \frac{AD \cdot AD}{2} = \frac{23\cdot\sqrt{2}\cdot 23\cdot\sqrt{2}}{2} = 529$$

Ответ: а) 34 б) 529

(5) $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \quad (2) \end{cases}$ $a \geq 0$

Раскрываем модули 4 способами:

1) $x+y+8+x-y+8=16$
$2x=0$; $x=0$

2) $x+y+8-x+y-8=16$
$2y=16$; $y=8$

3) $-x-y-8+x-y+8=16$
$-2y=16$; $y=-8$

4) $-x-y-8-x+y-8=16$
$-2x=32$; $x=-16$

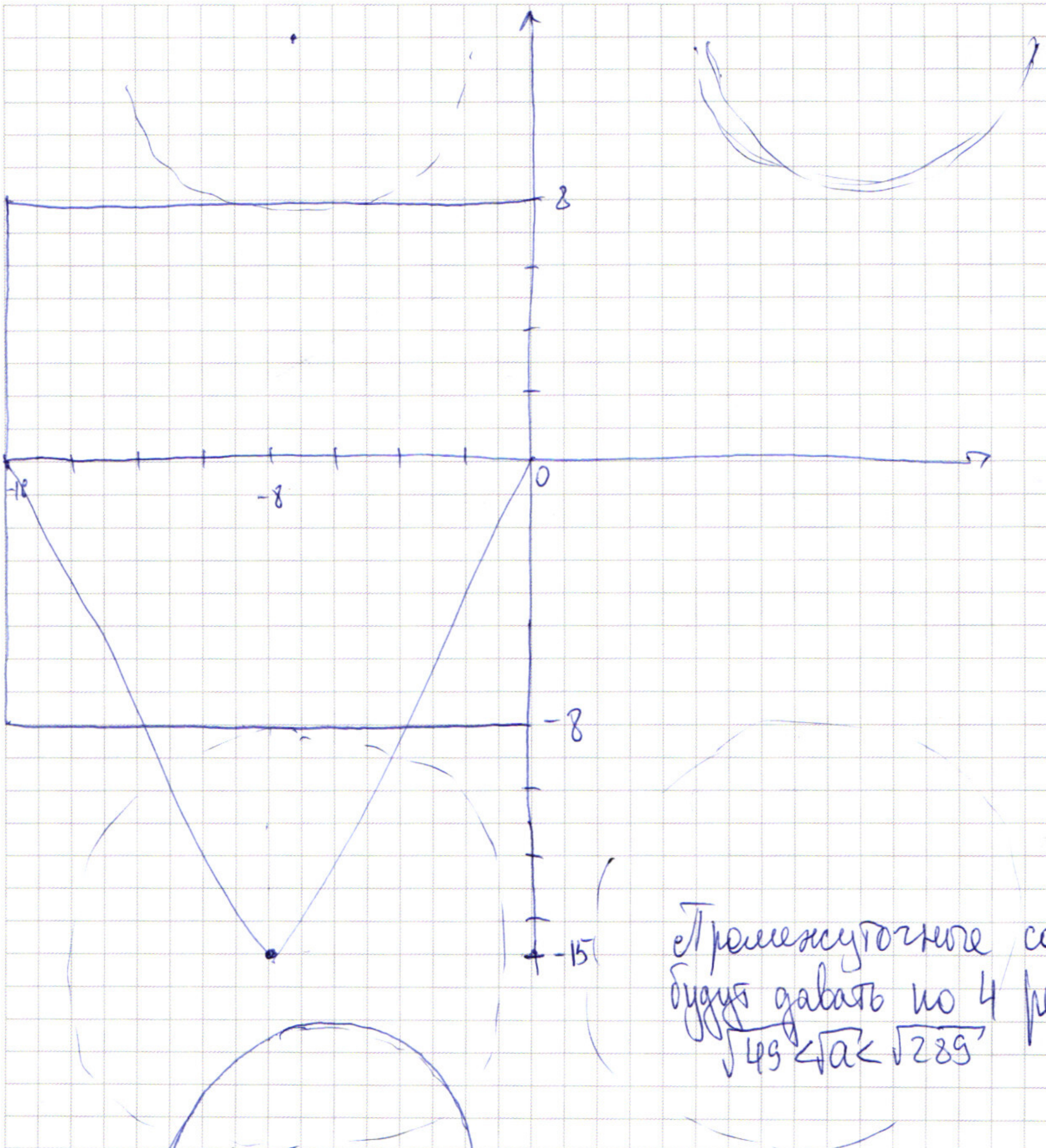
Фигура, ограниченная этими прямыми – квадрат

(2): это части окружностей с $R=\sqrt{a}$

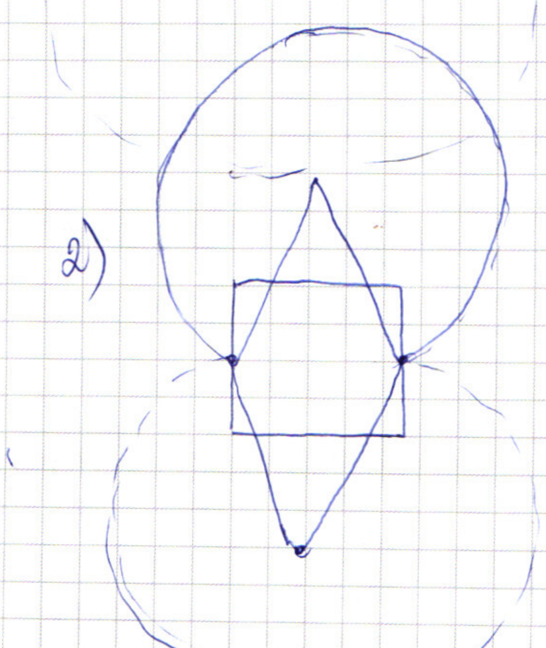
Если $a<0$ то $\varnothing$, если $a=0$ то $\begin{cases} x=\pm 8 \\ y=\pm 15 \end{cases}$ не подх. т.к. 4 реш-я

Подходят два случая: 1)

при $\sqrt{a}=7$, т.е. $a=49$



Промежуточное состояние будут давать по 4 решения
$\sqrt{49} < \sqrt{a} < \sqrt{289}$



когда расширим окр-ть до совпадения этих точек.

$15^2 + 8^2 = R^2$; $R = \sqrt{289} = 17$

т.е. $a = 289$

Ответ: $a = 49$ или $a = 289$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 \quad (2) \end{cases}$

Пусть $-y=t$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ t>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$

$\left(\frac{x^7}{t}\right)^{\ln t} = x^{2\ln(xt^2)}$

$x^{7\ln t} = t^{\ln t}\cdot x^{2(\ln x+\ln t^2)}$

$x^{7\ln t} = t^{\ln t}\cdot x^{2\ln x}\cdot x^{4\ln t}$

$x^{3\ln t} = t^{\ln t}\cdot x^{2\ln x}$

Пусть $\ln t = a$, $\ln x = b$, тогда $e^a=t$, $e^b=x$

$e^{3ab} = e^{a^2}\cdot e^{2b^2}$, $e^{3ab} = e^{a^2+2b^2}$, $a^2+2b^2-3ab=0$

$\left[\begin{array}{l} a=b \\ a=2b \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \ln t=2\ln x \\ \ln t=\ln x \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t=x^2 \\ t=x \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} y=-x^2 \\ y=-x \end{array}\right.$ (*)

(2): $y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0$

$y^2+(2x+4)y-3x^2+12x=0.$

$\frac{D}{4} = (x+2)^2+3x^2-12x = (2x+2)^2$

$\left[\begin{array}{l} y=-x+4 \\ y=-3x \end{array}\right.$ (v)

(*) и (v): $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=-x^2 \\ y=-x \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=4-x \\ y=-3x \end{array}\right. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-x^2 \\ y=-4+x \end{cases} \\ \begin{cases} y=-x^2 \\ y=-3x \end{cases} \\ \begin{cases} y=-x \\ y=-3x \end{cases} \\ \begin{cases} y=-x \\ y=-4+x \end{cases} \end{array}\right.$

(1): $x^2+x-4=0$
$x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$
$x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ не подх.

(1) ~~нет решений~~

$x_1=0$ – не подх
$x_2=3 \Rightarrow y=-9$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ – не подх.

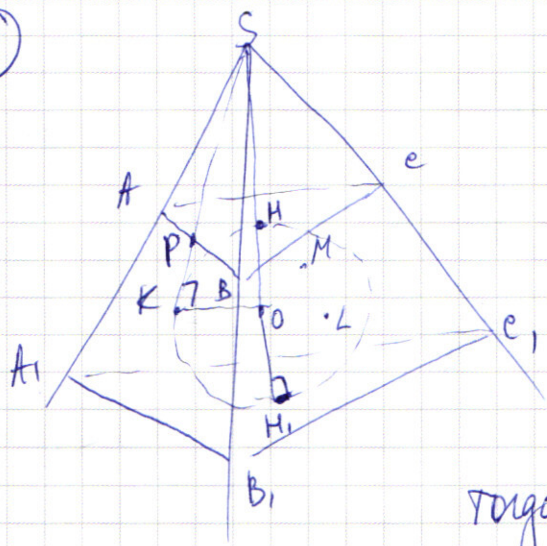
$x=2$; $y=-2$

~~нет решений~~

Ответ: $(3;-9)$; $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; -\frac{9+\sqrt{17}}{2}\right)$; $(2;-2)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

④



Дано: $S_{ABC}=9$; $S_{A_1B_1C_1}=16$

а) $\angle KSO$ - ? б) S - ?

$SO \perp ABC$, $SO \perp A_1B_1C_1$

т.е. $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$

$AC \parallel A_1C_1$

тогда $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\dfrac{9}{16}$, $K^2=\dfrac{9}{16}$, т.е.

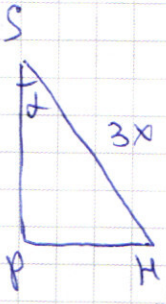
$K=\dfrac{3}{4}$, т.е $AB=3x$ $A_1B_1=4x$; $\Delta SAB \sim \Delta SA_1B_1$

$\Delta SHA \sim \Delta SH_1A_1$ с $K=\dfrac{3}{4}$, т.е $SH=3x$, $SH_1=4x \Rightarrow$

$HH_1=x$, т.е. $R=\dfrac{x}{2}=KO$; $SO=SH+HO=\dfrac{7x}{2}$

$\sin(SKO)=\dfrac{x/2}{7x/2}=\dfrac{1}{7}$; $\angle SKO=\arcsin\dfrac{1}{7}$

б) $(KLM) \parallel (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ т.к. O - равноудалена от K, L, M, то K, L, M - точки касания впис. окр-ти, а проекция O на (KLM) совпадает с центром впис. окр-ти, т.е. $SO \cap (KLM)=F$ и F равноудал. от K, L, M.



$SK^2=SH \cdot SH_1$; $SK^2=3x \cdot 4x=12x^2$; $SK=2\sqrt{3}x$

$\sin\alpha=\dfrac{1}{7}$, т.е $PH=\dfrac{3}{7}x$

$SP=\sqrt{9x^2-\dfrac{9x^2}{49}}=\dfrac{\sqrt{432}}{7}x=\dfrac{12\sqrt{3}}{7}x$

т.е. $\Delta KLM \sim \Delta ABC$ и $K=\dfrac{SK}{SP}=\dfrac{2\sqrt{3}x \cdot 7}{12 \cdot \sqrt{3}x}=\dfrac{7}{6}$

т.е. $S_{KLM}=\left(\dfrac{7}{6}\right)^2 \cdot S_{ABC}=\dfrac{49}{36} \cdot 9=\dfrac{49}{4}$ Ответ: след стр

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $\angle SKO = \arcsin\frac{1}{7}$; $S = \frac{449}{40}$

7) $\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3\cdot(3^{27}-1)x \end{cases}$ $\quad 93 + 3(3^{27}-1)x \ge y > 3^x + 4\cdot 3^{28}$

1сл): Если $x \le 0$, то левая часть ≤ 93 права $> 4\cdot 3^{28}$ не подходит

2сл) $x = 5$ подходит $\quad 93 + 3(3^{27}-1)\cdot 5 \ge y > 3^5 + 4\cdot 3^{28}$

$93 + 5\cdot 3^{28} - 3\cdot 5 \ge y > 3^5 + 4\cdot 3^{28}$

Если $x = 28$, то $93 + (3^{28}-3)\cdot 28 > 3^{28} + 4\cdot 3^{28}$

$93 + 28\cdot 3^{28} - 3\cdot 28 > 3\cdot 3^{28} + 4\cdot 3^{28} = 5\cdot 3^{28}$ – верно

При $x = 29$ $\quad 93 + 29\cdot 3^{28} - 28 > 29\cdot 3^{28} + 4\cdot 3^{28} = 33\cdot 3^{28}$ неверно

Т.е $5 \le x \le 28$, таким образом получим:

$\sum\limits_{x=5}^{28} = \left(93 + (3^{28}-3)x - (3^x + 4\cdot 3^{28})\right) = 93\cdot 24 + (3^{28}-3)(5+6+\ldots+28) -$

$- (3^5 + 3^6 + \ldots + 3^{28}) - 24\cdot 4\cdot 3^{28} = 93\cdot 24\cdot 3^{28}\cdot 33\cdot 12 + \frac{3^5}{2}(3^{24}-1) -$

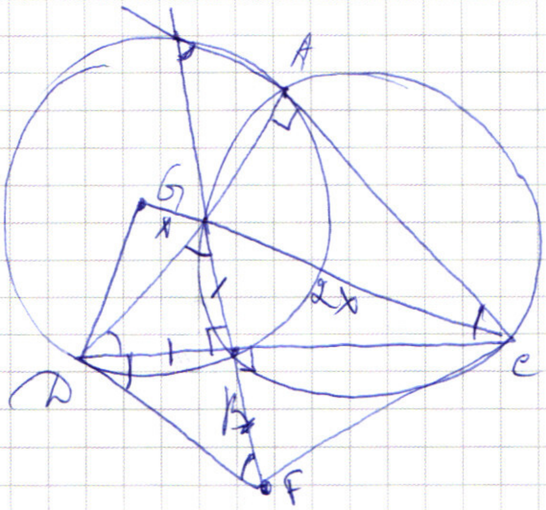
$- 96\cdot 3^{28} = 93\cdot 24 + 396\cdot 3^{28} - 96\cdot 3^{28} + \frac{3^{29}-1}{2} = 300\cdot 3^{28} + 93\cdot 24 +$

$+ \frac{3\cdot 3^{28}-1}{2} = \frac{603\cdot 3^{28} - 1}{2} - 93\cdot 24 = \frac{603\cdot 3^{28} - 4465}{2}$

3сл) $1 \le x \le 4$ $\quad 93 + 3(3^{27}-1) < 3 + 4\cdot 3^{28}$; $\quad 93 + 9(3^{27}-1) < 27 + 4\cdot 3^{28}$

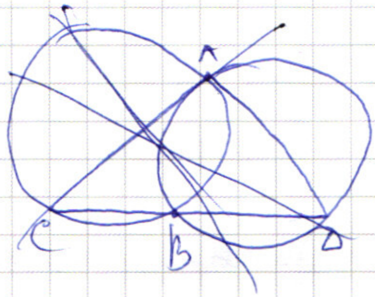
$93 + 6(3^{27}-1) < 9 + 4\cdot 3^{28}$; $\quad 93 + 12(3^{27}-1) < 81 + 4\cdot 3^{28}$

Ответ: $\frac{603\cdot 3^{28} - 4465}{2}$



$AC \parallel FD$

$CG = FC$



III сл: 1) $x < 0$

2) $1 \leq x \leq 4$

3) $\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 28 \end{cases}$

$93 + 3(3^{27} - 1) \cdot 4 \leq 3^4 + 4 \cdot 3^{28}$

$93 + 12(3^{27} - 1) \leq 81 + 4 \cdot 3^{28}$

$93 + 12 \cdot 3^{27} - 12 < 81 + 4 \cdot 3^{28}$

$12 \cdot 3^{27} \leq 4 \cdot 3^{28}$

1 • 1777733}

• 11777739

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0.$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0.$

1) $\cos 2x + \sin 2x = 0$

2) $2\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x) = 0.$

$-\cos 5x = \sin\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin 2x \cos\frac{\pi}{4}$

~~$\cos 5x = \cos 2x \sin\frac{\pi}{4} - \sin 2x \cos\frac{\pi}{4}$~~

$-\cos 5x = \cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin 2x \sin\frac{\pi}{4}$

$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 5x = 0.$

3. $\begin{cases} \left(\frac{x^2}{-y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad (*) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -y > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$(*)$: $y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$

$\frac{D}{4} = (x+2)^2 - (-3x^2 + 12x) = (2x+2)^2$

$\left[\begin{array}{l} y = 4 - x \\ y = -3x \end{array}\right.$

$-y = t$

$\left(\frac{x^2}{t}\right)^{\ln t} = x^{2\ln(xt^2)}$

$x^{2\ln t} = t^{\ln t} \cdot x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln t}$

$x^{3\ln t} = t^{\ln t} \cdot x^{2\ln t}$

$\ln t = a \quad \ln x = b$

$e^a = t \quad e^b = x$

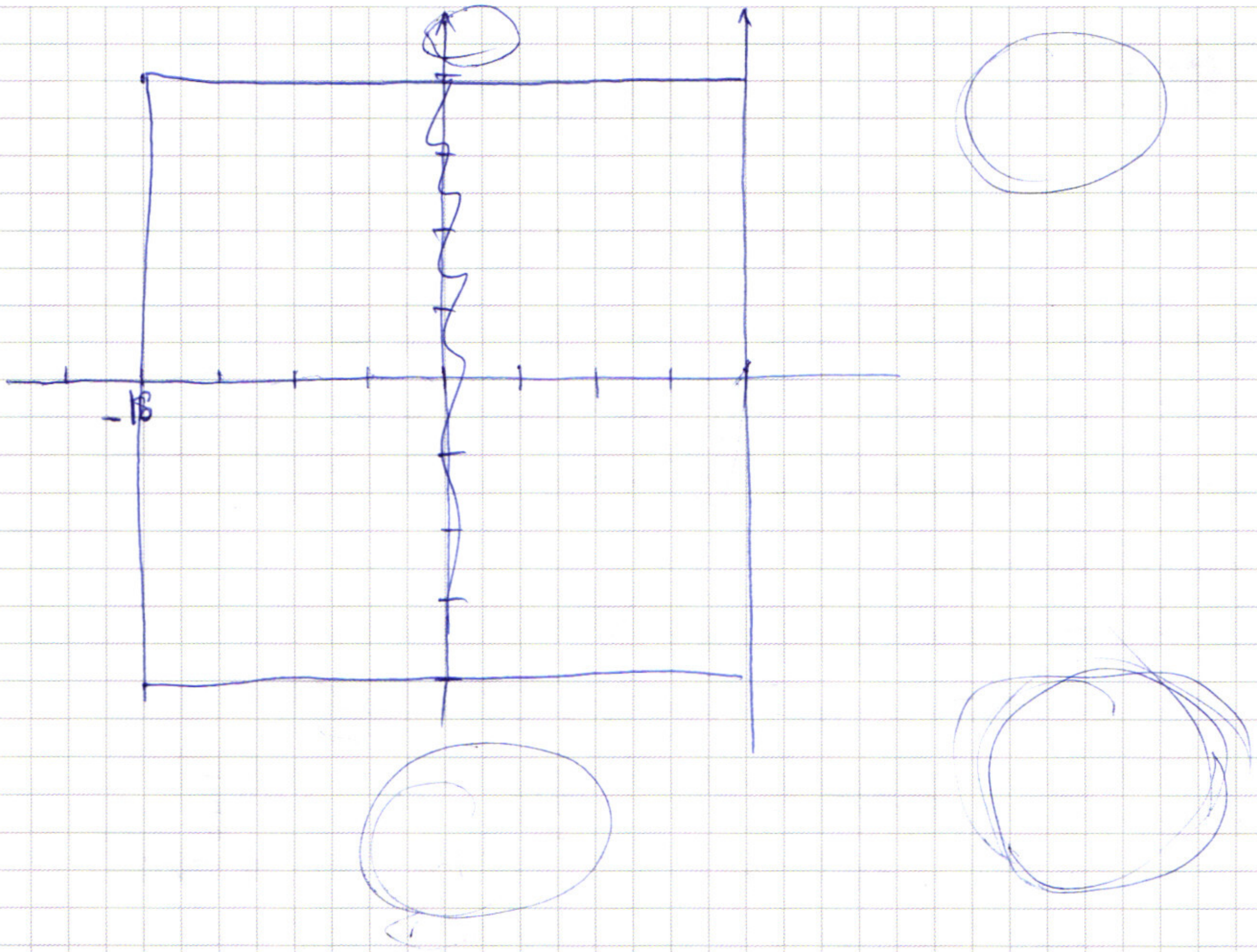
$e^{3ab} = e^{a^2} \cdot e^{b^2}; \; e^{3ab} = e^{a^2 + 2b^2}$

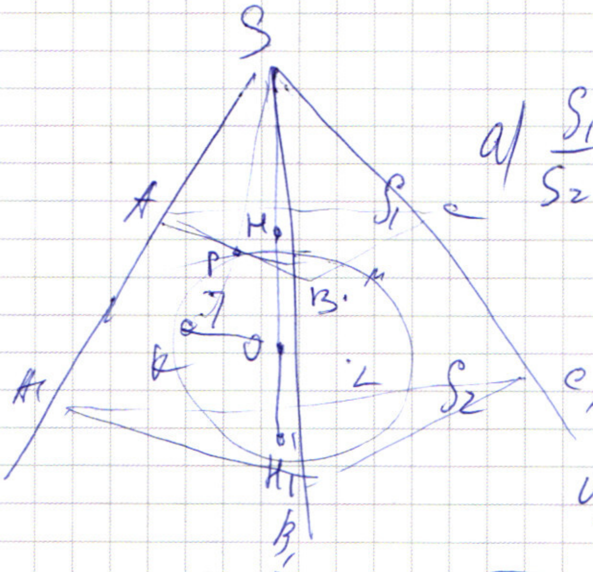
$3ab = a^2 + 2b^2$

$a^2 - 3ab + b^2 = 0$

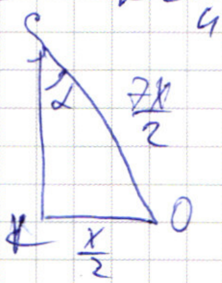
$\left[\begin{array}{l} a = b \\ a = 2b \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \ln t = \ln x \\ \ln t = 2\ln x \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} t = x \\ t = x^2 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} y = -x \\ y = -x^2 \end{array}\right.$





a) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{16}$ $k = \frac{3}{4}$ $AB = 3x$ $A_1B_1 = 4x$



$\sin\alpha = \frac{1}{7}$

$\alpha = \arcsin\frac{1}{7}$

б) $SK^2 = SH \cdot SH_1$; $SK^2 = 12x^2$

$SK = 2x\sqrt{3}$; $PH = \frac{3}{7}x$ (из △ SPH)

$SP = \sqrt{(3x)^2 - \left(\frac{3}{7}x\right)^2} = \frac{\sqrt{432}}{7}x = \frac{12\sqrt{3}}{7}x$

△KLM ∼ △ABC с $k = \frac{SK}{SP} = \frac{2\sqrt{3}x}{\frac{12\cdot\sqrt{3}}{7}x} = \frac{7}{6}$

$S = k^2 \cdot S_{ABC} = \frac{49}{36} 9 = \frac{49}{4}$