# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром $O$ вписана в трёхгранный угол с вершиной $S$ и касается его граней в точках $K$, $L$, $M$ (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол $KSO$ и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью $KLM$, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой $SO$, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках $A$ и $B$. На первой окружности выбрана точка $C$, а на второй – точка $D$. Оказалось, что точка $B$ лежит на отрезке $CD$, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к $CD$, проходящем через точку $B$, выбрана точка $F$ так, что $BF = BD$ (точки $A$ и $F$ расположены по разные стороны от прямой $CD$). Найдите длину отрезка $CF$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника $ACF$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x, y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

Преобразуем равенство:

$2\cos 5x\cdot\cos 2x+2\sin 2x\cdot\cos 5x+\sqrt{2}(\cos^2 2x-\sin^2 2x)=0$

$(\cos 2x+\sin 2x)(2\cos 5x+\sqrt{2}(\cos 2x-\sin 2x)=0$

(использовали формулы косинуса двойного угла, сложение косинусов, вычитание синусов и разность квадратов).

В первом случае: $\cos 2x+\sin 2x=0 \quad |:\cos 2x\neq 0$

$\operatorname{tg} 2x=-1$

$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

Во втором случае: $2\cos 5x+\sqrt{2}(\cos 2x-\sin 2x)=0$

Представим $\cos 2x-\sin 2x$ в виде: $\sin(\frac{\pi}{2}-2x)-\sin 2x=2\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=$
$=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$

Тогда получим: $\cos 5x+\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0$

$\cos 5x+\cos(\frac{\pi}{4}+2x)=0$

$2\cos(\frac{\pi}{8}+\frac{7x}{2})\cdot\cos(\frac{\pi}{8}-\frac{3x}{2})=0$

I. $\cos(\frac{\pi}{8}+\frac{7x}{2})=0$

$\cancel{x=}\ \frac{\pi}{8}+\frac{7x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{3\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7},\ k\in\mathbb{Z}$

II. $\cos(\frac{\pi}{8}-\frac{3x}{2})=0$

$\frac{\pi}{8}-\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ $\quad x_2=\frac{3\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7},\ k\in\mathbb{Z}$ $\quad x_3=-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

3

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$

. Рассмотрим второе равенство и решим его как квадратное относительно переменной $y$:

$D=(2x+4)^2-4(12x-3x^2)=4x^2+16x+16+12x^2-48x=16(x^2-2x+1)=16(x-1)^2$

$y_{1,2}=-x-2\pm2(x-1)=\left[\begin{array}{l} x-4 \\ -3x \end{array}\right.$

I) $y=-3x$

Т.к. $y<0$, то и $-3x<0 \Rightarrow x>0$, тогда $\left(-\frac{x^2}{y}\right)$ будет иметь положит. значения. Подставляем $y=-3x$:

$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$ $\Leftrightarrow$ $\cancel{\left(\frac{x}{3}\right)^{6\ln(3x)} = x^{4\ln(3x)}}$ $(x>0)$

Прологарифмируем по основанию $e$: $\ln(3x)\cdot\ln\left(\frac{x^6}{3}\right)=2\ln(9x^3)\cdot\ln x$

~~$\ln(3x)(3\ln x-3\ln3-2\ln x)=0$~~ $(\ln3+\ln x)(6\ln x-\ln3)=2\ln x(2\ln3+3\ln x)$ Преобразуем;

$\ln x=\ln 3 \Rightarrow x=3,\ y=-9$

~~$\ln(3x)(\ln x-3\ln3)=0$~~ $\Rightarrow$ ~~$x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=3^3=27$; $y_1=-1$; $y_2=-81$~~

II) $y=x-4$

Т.к. $y<0$, то и $x-4<0 \Rightarrow x\in(0;4)$, тогда $\left(-\frac{x^2}{y}\right)$ примет положит. знач.

Подставляем $y=x-4$ и логарифмируем по основанию $e$:

$\ln(4-x)\cdot\ln\left(\frac{x^7}{4-x}\right)=2\ln(x(x-4)^2)\cdot\ln x$

$\ln(4-x)\cdot(\ln x^7-\ln(4-x))=2\ln x\cdot(\ln x+2\ln(4-x))$ $(4-x>0)$

$7\ln(4-x)\cdot\ln x-\ln^2(4-x)=2\ln^2x+4\ln x\cdot\ln(4-x)$

$(2\ln x-\ln(4-x))(\ln x-\ln(4-x))=0$

I. $2\ln x=\ln(4-x)$

$x^2=4-x$ $(x>0$ и $x<4)$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$ – подходит $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ (по ОДЗ) $\Rightarrow y=\frac{-9+\sqrt{17}}{2}$

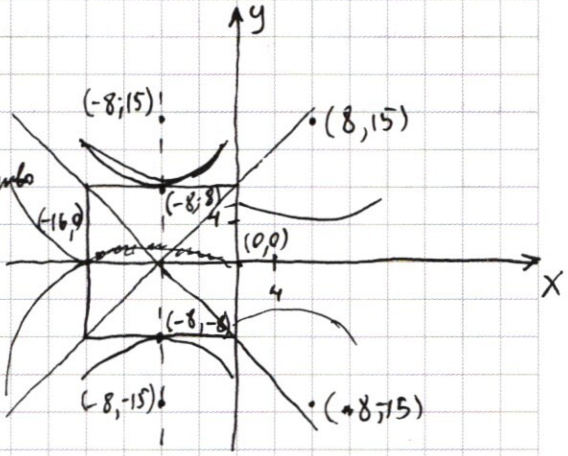
II. $\ln x=\ln(4-x)$

$x=2 \Rightarrow y=-2$

Ответ: ~~$\left(\frac{1}{3}, -1\right)$~~; ~~$(27; -81)$~~ $(3;-9)$; $(2,-2)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{-9+\sqrt{17}}{2}\right)$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5



Первое множество задаёт квадрат со стороной 8 с центром в (-8, 0). Второе множество задаёт четыре окружности с центрами в (8,15); (-8,15); (-8;-15), (8,-15). Причём каждая существует только на своей четверти (не может заходить на другие).

Заметим, что при первом касании окружности с центром (-8,15) и (-8,-15) касаются квадрата в точках (-8,-8) и (-8,8) (этому способствует тот факт, что центр квадрата и двух левых окружностей лежит на одной прямой и между ~~[illegible] равные~~ центром одной из левых окр. и центром квадрата одно и то же расстояние), но две правые не касаются (т.к. правые окр. и левые симметричны относит. OY). => имеется два решения при котором

$(8-8)^2+(|8|-15)^2=49 \Rightarrow a=49$

Затем левые окр. ~~касаются~~ проходят через квадрат 4 раза (по две с двух сторон), потом добавляются правые окр., затем места пересеч. с квадратом стягиваются в две точки (0,0) и (-16;0) (левые окр. и правые окр. совмещаются в них в силу симметрии) => $(0-8)^2+(0-15)^2=289$, т.е. второе решение $a=289$

После этих точек окружности никогда не пересекутся с квадратом.

Ответ: 49 и 289.

1

Заметим, что $64827 = 3^3 \cdot 7^4 \cdot 1$, т.е. восьмизначное число может состоять лишь из ~~этих~~ трёх троек, четырёх семёрок и единицы. Рассмотрим возможные комбинации троек и семёрок. Это будут сочетания, по формуле $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$. Теперь подставляя единицу на все возможные места получим ответ: $35 \cdot 8 = 280$

Ответ: 280

6

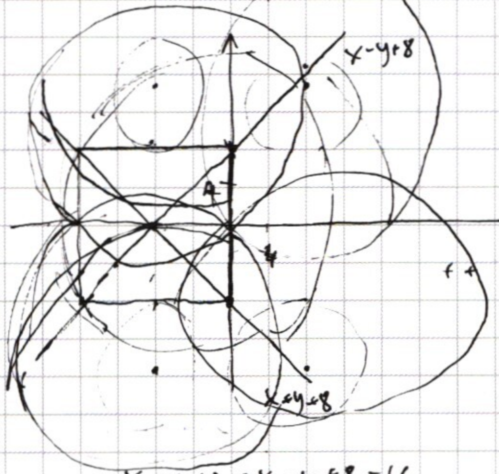
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{x^{6}}{3\cancel{x}}$

$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{2\ln 9x^3}$

$x^{6\ln 3x} = x^{2\ln 9x^3}\cdot 3^{\ln 3x}$



$\ln 3x \ln \frac{x^6}{3} = \ln 9x^3\cdot\ln x^2$

$(\overset{a}{\ln 3}+\overset{b}{\ln x})(6\ln x-\ln 3) = (2\ln 3+3\ln x)\cdot 2\ln x$

$(a+b)(6b-a)-2b(2a+3b)=0$

$\cancel{6b^2}-a^2+5ab-4ba-\cancel{6b^2}=0$

$a^2=ab$

$a(a-b)=0$

$a=0 \qquad \ln 3=\ln x$

$y\in[0;-8]$

$x=0$

$x+y+8+x-y+8=16$

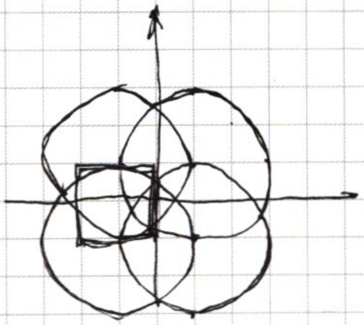
$\cancel{x+y+8}\ -x+y-\cancel{8}=16 \qquad y=8$

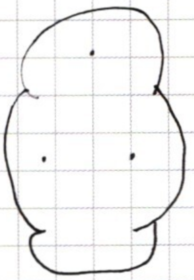
$-2x=32 \Rightarrow x=-16$

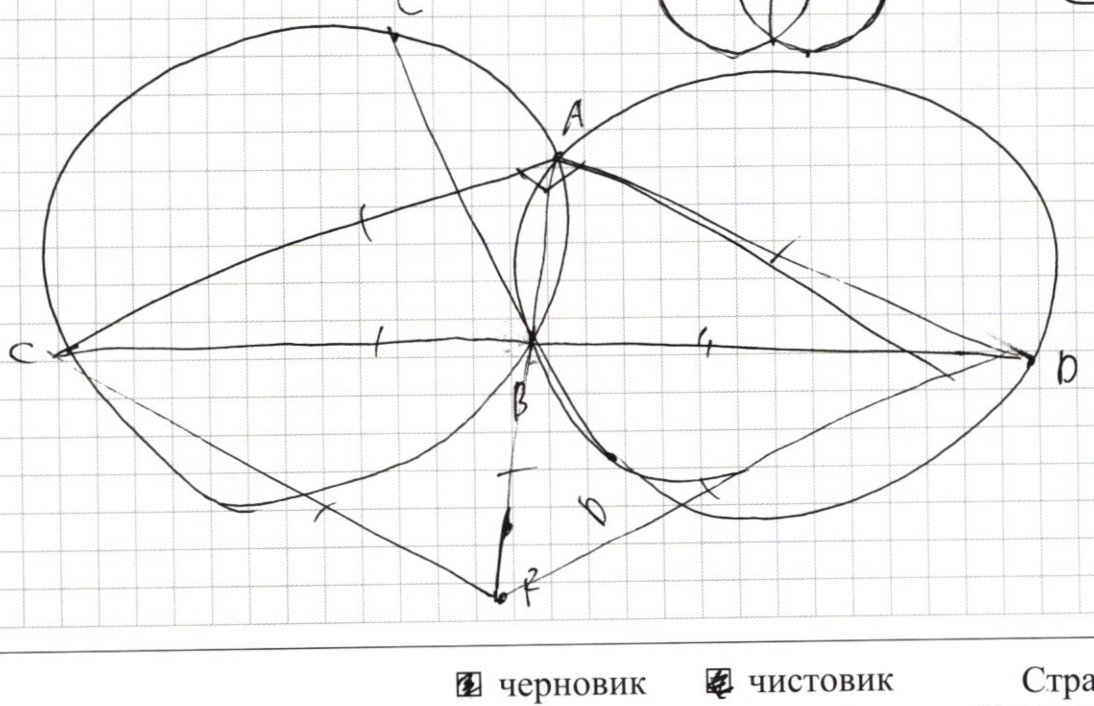
$64+225=a$

$289=a$

$8^2+15^2=$







☒ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $64827 \,|\, \cancel{37}$ $\quad 97000 \quad \overset{2}{\check{}}03$ $\quad 301 = \overset{4}{280} + \overset{3}{21}$

$63000 + 1827 = 9 \cdot 7203 \,|\, 3 \quad 2401$

$3^3 \cdot 2401 \,|\, 7 \quad 343 \,|\, 7 \quad 49$ $\quad 343 = 7 \cdot 49$

$64827 = 3^3 \cdot 7^4 \cdot 1$ $\quad 71333777$

$\frac{4!}{}$ $\quad \frac{7!}{3!\,4!}$ $\quad \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35 \cdot 8 =$

71333777 $\quad$ 12 $\quad$ 7773337

7777 3331 $\quad$ 7

1777 3337

8.

$\cos 2x - \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) - \sin 2x =$

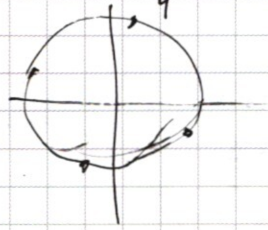
$= 2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) =$

$2\cos 5x \cdot \cos 2x + 2\sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}\cos\overset{\text{“}(\cos}{4}x = 0$

$\frac{\pi}{8} + \frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$



$x - 4 < 0$

$\frac{7x}{2} = \frac{3\pi}{8} + k\pi$

$x \in (0;4)$

$\left(-\frac{x^2}{x-4}\right)^{\ln(\overset{4-x}{\cancel{x-4}})} =$

$x = -\frac{8}{4}$

$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2k\pi}{7}$

$= x^{2\ln(x(16 + x^2 - 8x)}$

$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\frac{3x}{2} = \frac{5\pi}{8} + k\pi \quad -\frac{3x}{2} = \frac{3\pi}{8} + k\pi$

$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \quad x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$

$6\ln 3x \ln\frac{x}{3} = 4\ln(3x) \cdot \ln x$

$\ln 3x(3\ln\frac{x}{3} - 2\ln x) = 0$

$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{-3+8}{12} = \frac{5}{12} \quad -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = -3 + 8$

$3\ln x - 3\ln 3 - 2\ln x = 0 \quad x = 1$

$\frac{3}{28} - \frac{2}{7} = \frac{5}{28}$

$\ln x = \ln 3^{-3}$

$x^2 + x - 4 = 0$

$x = \frac{1}{27}$

$\ln(4-x) \cdot \left(-\frac{x^7}{x-4}\right) = 2\ln(x(x-4)^2) \cdot \ln x$

$(2b - a)(b - a)$

$\ln(4-x)(7\ln x - \ln(4-x)) = 2\ln x(\ln x + 2\ln 4 - x)$

$3ab - a^2 = 2b^2$

$7\ln(\overset{a}{4}-x) \cdot \overset{b}{\ln x} - \ln^2(4-x) = 2\ln^2 x + 4\ln x \cdot \ln(4-x)$

$(2\ln x$

$O^3$

$D^2 = \cancel{4x^2}$ $D = (2x+4)^2 + 4(3x^2 - 12x) = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x = 16(x^2 - 2x + 1)$

$D = 16(x-1)^2$ $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$

$-\frac{x^7}{y} \geq 0$ $y_{1,2} = -2x - 4 \pm$

$y_{1,2} = -x - 2 \pm 2(x-1) = \left[\begin{array}{l} x-4 \\ -3x \end{array}\right.$

~~$x<4$~~

$x > 0$

$y < 0$

$(y - x + 4)(y + 3x) = 0$

$\cancel{y^2} + \cancel{3xy} - \cancel{3x^2} - \cancel{xy} + \cancel{4y} + \cancel{12x} = 0$

$y = -3x$ $-\frac{x^7}{-3x} = \frac{x^6}{3}$

$y = x - 4$

$x - 4 < 0$ $x < 4$

$6\ln(3x) \cdot \ln\left(\frac{x}{3}\right) = 2\ln(9x^3) \cdot \ln x$

$\log_e \frac{x}{3}^{6\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^2)}$

$3\ln(3x) = \ln(9x^2)$

$\cdot \ln x$

$3\ln(3x)(\ln x - \ln 3) = (\ln 9 + 3\ln x) \cdot$ ~~$2\ln x$~~ $x^3 - 9x^2 =$

$3\ln^2 x -$ $3x^3 - x^2 = x^2(3x - 1) \Rightarrow x = 0$

$x = \frac{1}{3}$

$3(\ln 3 + \ln x)(\ln x - \ln 3) =$ $\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{4\ln(3x)}$

$= 2\ln 3 \ln x + 3\ln^2 x$ $x^6 - 3x^4 = 0$

$\overset{a}{3\ln^2 x} - \overset{b}{3\ln^2 3} = 2\ln 3 \ln x + 3\ln^2 x$ $x^4(x^2 - 3) = 0$

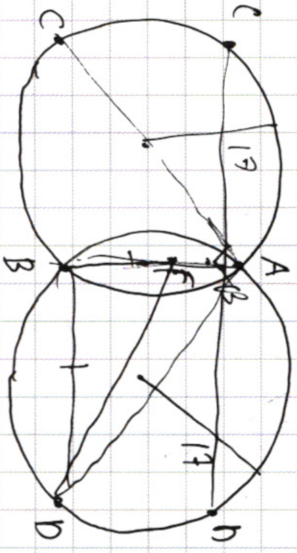
$6\ln(3x)\log_x \frac{x}{3}^{(1 - \log_x 3)} = 4\ln(3x)$

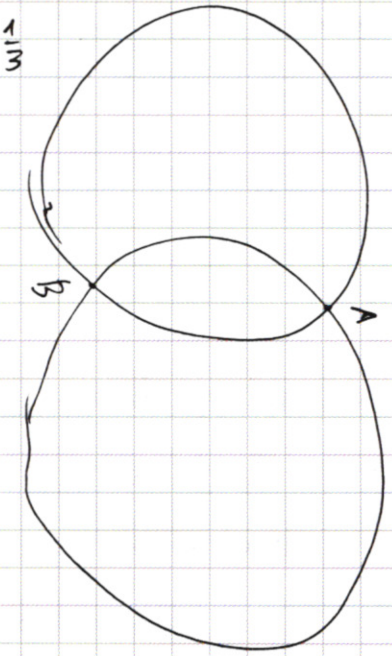
$3a^2 - 3b^2 = 2ab +$

$x^6$

$2\ln 3 \ln x + 3\ln^3 3 = 0$

$2\ln x^2 =$





$\frac{x^{6\ln 3x}}{3^{\ln 3x}} = x^{2\ln(9x^3)}$