

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$① \quad 64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1$$

Понятно, что в ~~на~~ числах могут будут содеркт. 4 семерки, т.к. больше цифр : 7 нет. Но в наших числах могут содеркт. и 9, и 3, и 1. Других чисел быть не может.

Посчитаем ка-во чисел без 9: 1 будет единств. и её можно поставить на любую поз. из 8. Тогда нужно выбрать для 3-х троек 3 позиции из 7, на ост. пойдут 7. Это можно сделать C_7^3 спос.

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35 \Rightarrow \text{т.к. единицу можно пост. в лоб.}$$

$$\text{из 8 позиций} \Rightarrow S_1 (\text{число сл. без 9}) = 35 \cdot 8 = 280$$

С 9: Нужно выбрать 9 Единств. 9 и 3 можно поставить обратно для них позиции 8. 7 раз = 56. В ост. 6 позиций надо выбрать 2 позиции для 2-х единиц, в ост. пойдут 7.

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

$$S_2 (\text{число сл. с 9}) = 15 \cdot 56 = 840$$

$$S = S_1 + S_2 = 280 + 840 = 1120$$

Ответ: 1120

$$(2) \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad (: \sqrt{2})$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{2} \sin 7x \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x \right) + \cos 4x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \cos 4x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) \cdot \cos(10x) + \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x (2 \cos(10x) + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 4x = 0 \\ \cos(10x) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 10x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$(3) \begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \quad (2) \\ (y+x+2)^2 = 4(x-1)^2 \quad (1) \\ y < 0, x > 0 \text{ (из лог. выражений)} \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow x \geq 1 \Rightarrow y = x - 4$$

$$\begin{matrix} x < 1 \\ x > 0 \end{matrix} \Rightarrow y = -3x$$

$$(2) \text{ Пролог. по } \ln \Rightarrow \ln(-y) \ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) = 2 \ln(xy^2) \ln x$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right) > 0 \quad \ln(-y) (7 \ln x - \ln(-y)) = 2 \ln x (\ln x + 2 \ln(-y))$$

$$7 \ln x \cdot \ln(-y) - \ln^2(-y) = 2 \ln^2 x + 4 \ln(-y) \ln x =$$

$$3 \ln x \ln(-y) - \ln^2(-y) - 2 \ln^2 x = 0$$

$$(\ln x - \ln(-y)) (\ln(-y) - 2 \ln(x)) = 0$$

$$\begin{cases} \ln x = \ln(-y) \\ \ln(-y) = \ln(x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y < 0 \\ x - y = y \quad (\Rightarrow) \\ \begin{cases} x = -y^{(1)} \\ x^2 = -y^{(2)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x &= 4 - x \\ x &= 2 \Rightarrow y = -2 \rightarrow \text{подход.} \\ (2) \quad x^2 &= 4 - x \\ x^2 + x - 4 &= 0 \\ D &= 1 + 16 = 17 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \\ &\text{не подходит} \\ x &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 0 \\ y &= \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \\ y < 0 \\ -3x = y \\ \begin{cases} x = -y^{(1)} \\ x^2 = -y^{(2)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x &= 3x \\ x &= 0 \quad x > 0 \\ &\text{не подходит.} \\ (2) \quad x^2 &= 3x \\ x &= 0, 3, \text{ 0 не подходит} \\ x &= 3 \Rightarrow y = -3 \end{aligned}$$

Ответ: $x = 2, y = -2$

$x = 3, y = -3$

$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, y = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16 \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 9 \end{cases}$$

Нарисуем графики $x + 8 = y$ и $-x - 8 = y$, пересек. в точке $(-8; 0)$ и делит плоскость на 4 части.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Раскроем модули в ~~каждом~~ $(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$ по
четв. (станд.)

I $(x \geq 0, y \geq 0) \rightarrow (x-8)^2 + (y-15)^2 = a$, ^{окружности} центр окр

II $(x < 0, y \geq 0) \rightarrow (x+8)^2 + (y-15)^2 = a$, ~~центр окр.~~

III $(x < 0, y < 0) \rightarrow (x+8)^2 + (y+15)^2 = a$, ~~центр окр.~~

IV $(x \geq 0, y < 0) \rightarrow (x-8)^2 + (y+15)^2 = a$, ~~центр окр.~~

Окружности O_1 и O_4 (на рис.) никогда
не пересекаются первого ур.

~~В~~ А окр. с центром O_2 и O_3 должны
пересекаться по 1 разу, т.к. они симметричны.

Касание обеих окр.: $a = 49$

Попарное в точки А и В: $a = 49 + 64 = 113$

После попар. будет 1 пересечение у каждой пока
не попадет в т. О: $a = 289$, но в этом

~~После того как А, пока не попадет в О, В~~
случае также окр. попадет в т. С (симметрично)

Будет 2 решения, а после О

$$a \in [49, 289]$$

Ответ: $a \in [49, 289]$

$$\textcircled{7} \begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3^{28}x - 3x \end{cases}$$

Если $x \leq 4 \Rightarrow x=4 \rightarrow y > 3^4 + 4 \cdot 3^{28}$
 $y \leq 81 + 4 \cdot 3^{28}$

$x \leq 4 \rightarrow$ ещё меньше чем $81 + 4 \cdot 3^{28}$, и всегда
 точно меньше $4 \cdot 3^{28} \Rightarrow$ ~~нет решений~~ $\leftarrow$ нет реш.

2) при $x=31$

$$\begin{cases} y > 3^{31} + 4 \cdot 3^{28} = 3^{28} \cdot 31 \\ y \leq 3^{28} \cdot 31 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений}$$

$\Downarrow$
 при $x \geq 31 \rightarrow$ ответ не будет реш.

(анал. $x \leq 4$)

3) Знаем все решения макс. на $x \in [5; 30]$

т.к. y и $x \in \mathbb{Z}$

~~при каком-то x~~ $\rightarrow$ при каком x

число соотв. y будет равно $93 - 3x + 3^{28}x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}$
 $= 3^{28}(x-4) - 3^x - 3x + 93$

Тогда, если записать сумму всех $x \in [5; 30]$

$$\begin{aligned} & 3^{28} + 3^{28} \cdot 2 + 3^{28} \cdot 3 + \dots + 3^{28} \cdot 26 - 3^5(1+3+9+\dots+25) - 15+18+21+\dots+90 + 93 \cdot 26 = \\ & 3^{28} \cdot \frac{26 \cdot 27}{2} - 3^5 \frac{(3^6-1)}{3-1} + 93 \cdot 26 - 13 \cdot 105 = \\ & = \frac{3^{31} \cdot 25 + 3^6}{2} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3^{31} \cdot 25 + 3^6}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x-4)3^{28} \cdot (93 \cdot 3^x - (93 - 3x)) + (x-4)3^{28}$$

$$\int_5^{30} x \cdot 3^{28} - 4 \cdot 3^{28} - 3^x + 93 - 3x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot 3^{28} - 4 \cdot 3^{28} \cdot x - 3^x$$

$$3^{28} + 2 \cdot 3^{28} + \dots + 26 \cdot 3^{28} - 3^5 - 3^6 - 3^7 - \dots - 3^{30} + 93 \cdot 26 - (15 + 18 + 21 + \dots + 90)$$

$$3^{28} \cdot (2 \cdot 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 26)$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \end{matrix}$$

$$- 3^5 (1 + 3 + 9 + \dots + 3^{26}) + 93 \cdot 26 - (15 + 18 + 21 + \dots + 90)$$

$$3^{28} \frac{26 \cdot 27}{2} - 3^5 \frac{(3^{26} - 1)}{3 - 1} + 93 \cdot 26 - 13 \cdot 105$$

$$\begin{matrix} 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 & 33 & 36 & 39 & 42 & 45 \\ 48 & 51 & 54 & 57 & 60 & 63 & 66 & 69 & 72 & 75 & 78 \\ 81 & 84 & 87 & 90 & & & & & & & \end{matrix}$$

13

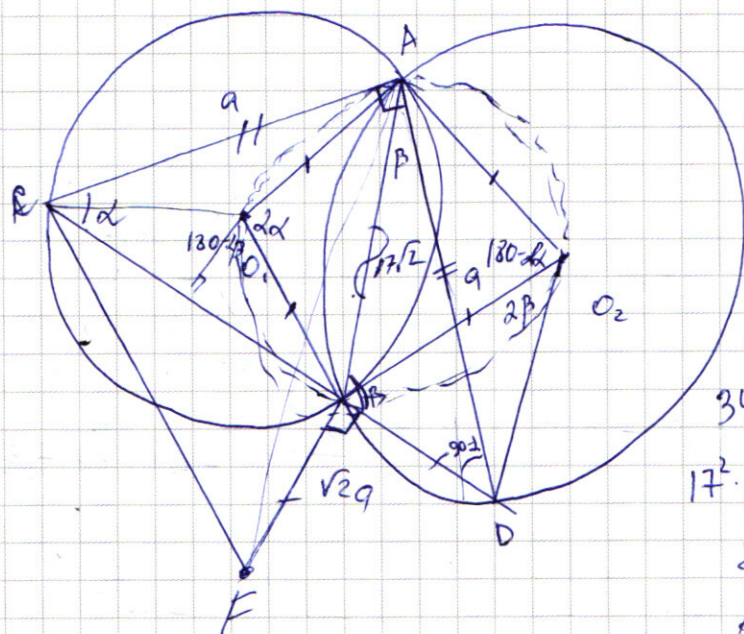
$$13 \cdot 3^{31} - \frac{3^{31} + 81 \cdot 3}{2} + 93 \cdot 26 - 13 \cdot 105$$

$$3^{31} \left(\frac{26-1}{2} \right) + \frac{81 \cdot 3 \cdot 3}{2} (93 \cdot 2 - 105) \cdot 13 = (186 - 105) \cdot 13$$

$$= 3^{31} \left(\frac{25}{2} \right) + \frac{3^6}{2} = \frac{3^{31} \cdot 25 + 3^6}{2} = 81 \cdot 13$$

$$180 - 2x = 2x$$

$$\alpha = 45$$



$$\frac{BD}{\sin \beta} = \frac{17\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 34$$

$$BD = 34 \cdot \sin \beta$$

$$34^2 \cdot \sin^2 \beta = 17^2 + 17^2 - 2 \cos 2\beta$$

$$17^2 \cdot 2^2 \cdot \sin^2 \beta = 2 \cdot 17^2 - 2 \cdot 17^2 \cdot \cos \beta$$

~~$$\frac{2\beta \sin^2 \beta}{2\sin} = 1 - \cos 2\beta$$~~

$$2 \cdot 17 \cdot \sin(90^\circ - \beta) + 17 \cdot \sin(\beta) \cdot 2 = \sqrt{2} a$$

$$34 \cdot \cos \beta + 34 \cdot \sin \beta = \sqrt{2} a$$

$$34(\cos \beta + \sin \beta) = \sqrt{2}.$$

$$180 - 45 - \beta$$

12

$$34 = \frac{9}{\sin(45^\circ + \beta)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \\ (y^2 + 4y + 4) - 4 - 3(x^2 - 4x + 4) + 12 + 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (y^2 + 2xy + x^2) - 4x^2 + 12x + 4y \\ (y^2 + x^2 + 4 + 2xy + 4y + 4x) - 4x^2 + 8x - 4 = 0 \\ (y + x + 2)^2 = 4(x - 1)^2 \Rightarrow |y + x + 2| = 2|x - 1| \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y + x + 2 = 2x - 2 \\ y + x + 2 = -2x + 2 \end{cases} \Rightarrow y =$$

$$\begin{aligned} x \geq 1 \quad y + x + 2 = 2x - 2 \Rightarrow y = x - 4 \quad x \in [1, 4) \\ x^7 \ln(-y) \end{aligned}$$

$$x < 1 \Rightarrow x \in (0, 1) \quad y + x + 2 = -2x + 2 \Rightarrow y = -3x \quad y \in [-3, 0)$$

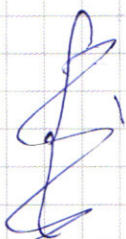
$$\frac{(x^7)^{\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = (x^2)^{\ln x + \ln y^2}$$

Р

$$\begin{cases} \ln x = \ln -y \\ \ln(-y) = \ln(x^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \end{cases}$$

$$x \geq 1$$

$$\begin{cases} x - y = y \\ \begin{cases} x = -y \quad (1) \\ x^2 = -y \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \end{cases}$$



$$(1) \quad x = y - x$$

$$2x = y$$

$$(x = -2) \Rightarrow y = -2$$

$$(2) \quad x^2 = 4 - x$$

$$x^2 - x + 4 = 0$$

$$D = 1 - 16 < 0$$

$$x < 1$$

$$\begin{cases} y = -3x \\ \begin{cases} x = -y \quad (1) \\ x^2 = -y \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \end{cases}$$

$$(1) \quad x = 3x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ но } x > 0, y > 0$$

$$(2) \quad x^2 = 3x$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow y = -3$$

5

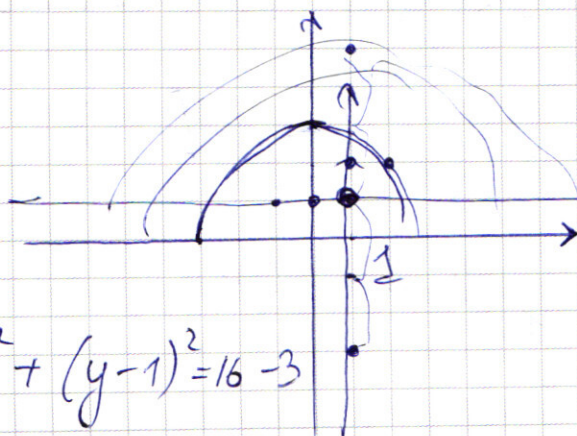
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 9 \end{cases}$$

$$x+y+8 \geq 0$$

$$y \geq -x-8$$

$$x+8 \geq y$$

$$(|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = 16$$



$$I \rightarrow x-1$$

$$II \rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16 - 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = -3x$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln x} \cdot x^{2\ln y^2}$$

$$\frac{x^{7\ln(-y)}}{(-y)^{\ln y}} \Leftrightarrow \frac{x^{7\ln(y)}}{x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln(y)}} = (-y)^{\ln(-y)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{3\ln(-y)}}{x^{2\ln x}} = (-y)^{\ln(-y)}$$

$$y = -3x \quad \frac{x^{3\ln 3x}}{x^{2\ln x}} = (3x)^{\ln 3x} \Leftrightarrow \frac{x^{3\ln 3} \cdot x^{3\ln x}}{x^{2\ln x}} = (3x)^{\ln 3x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{3\ln 3} \cdot x^{\ln x}}{x^{2\ln 3}} = 3^{\ln 3} \cdot x^{\ln 3} \cdot x^{\ln x} \cdot 3^{-\ln x}$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln y} = x^{2\ln(x \cdot y^2)}$$

$$\ln(-y) \cdot \ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) = 2\ln(x \cdot y^2) \cdot \ln x$$

$$\ln(-y) \cdot (7\ln x - \ln(-y)) = 2(\ln x + 2\ln(-y)) \cdot \ln x$$

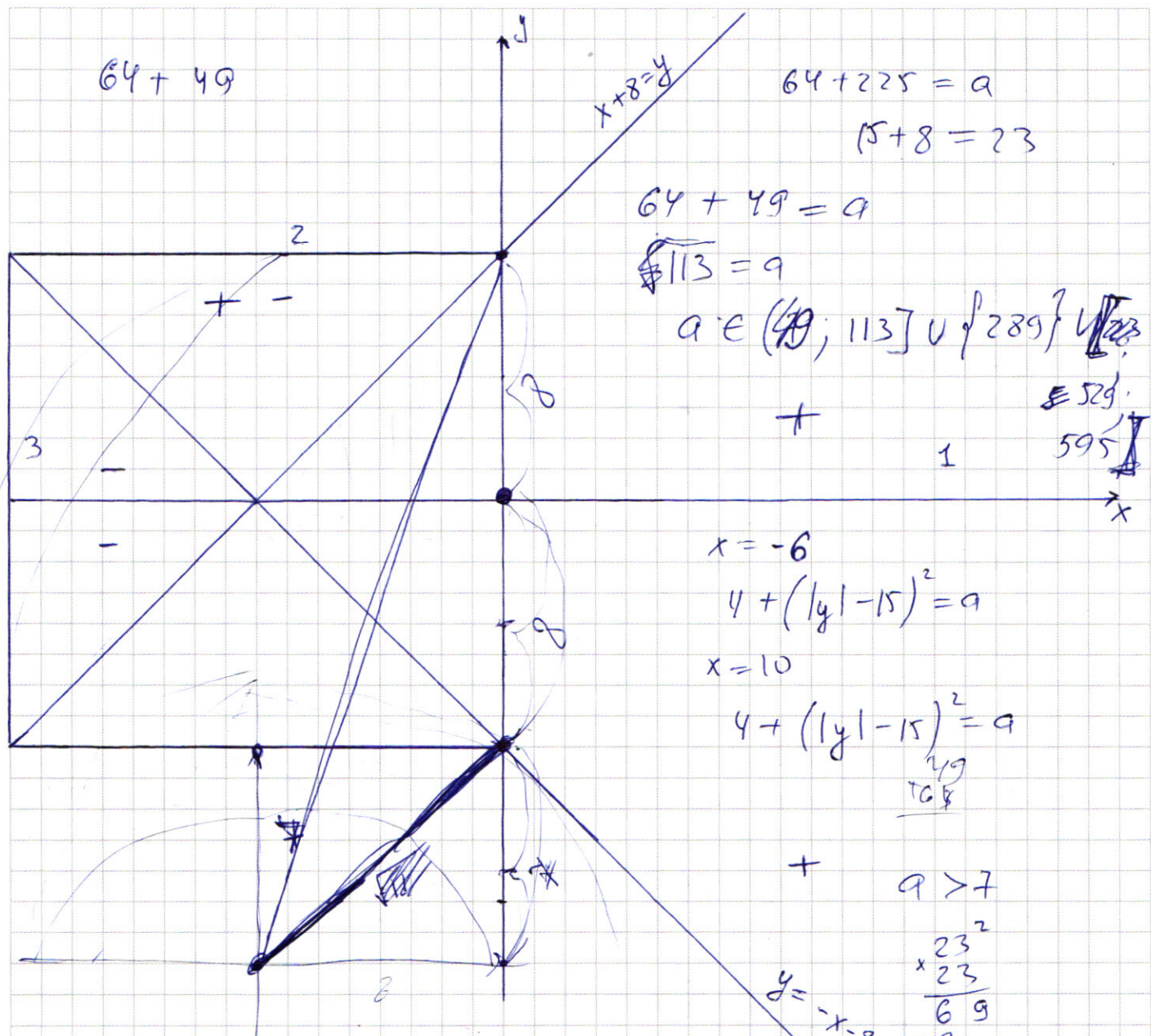
$$7\ln x \cdot \ln(-y) - \ln^2(-y) = 2\ln^2 x + 4\ln(-y) \cdot \ln x$$

$$3\ln x \cdot \ln(-y) - \ln^2(-y) - 2\ln^2 x = 0$$

$$-\ln^2(-y) + 2\ln x \cdot \ln(-y) - 2\ln^2 x + \ln x \ln(-y) = 0$$

$$-\ln(-y) + \ln(-y) - 2\ln x + \ln x (\ln(-y) - 2\ln(x)) = 0$$

$$(\ln x - \ln(-y))(\ln(-y) - 2\ln(x)) = 0$$



① - $x+8 \geq y$
 $y \leq -x-8$

оба с плюсом

$\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

② $x+8 \leq y$ | $|x-y+8| - c \ominus$
 $y \leq -x-8$ | $|x+y+8| - c \oplus \Rightarrow x+y+8-x+y-8=16$
 $2y = 16$
 $y = 8$

③ $x+8 \leq y$ | $|x-y+8| - c \ominus$
 $y \geq -x-8$ | $|x+y+8| - c \oplus \Rightarrow -x-y+8-x+y-8=16$
 $-2x-16=16 \Rightarrow x=-16$

④ $x+8 \geq y$ | $|x-y+8| - c \oplus$
 $y \geq -x-8$ | $|x+y+8| - c \ominus \Rightarrow x-y+8-x-y-8=16$
 $y = -8$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

$$\begin{array}{r} 64827 \div 9 \\ \underline{63} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 72043 \div 7 \\ \underline{7} \\ 0 \\ 30 \\ \underline{28} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \div 3 \\ \underline{6} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2401 \div 7 \\ \underline{21} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 343 \div 7 \\ \underline{28} \\ 63 \\ \underline{63} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 49 \div 7 \\ \underline{49} \\ 0 \end{array}$$

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

Очевидно, что в наших числах
будут 4 семёрки, т.к. $3 \cdot 7 > 10$, где
 $x \geq 1 \Rightarrow$ не получится ~~нет~~ таких
цифр, что ≥ 3 и ≥ 7 (искл. 0)

$$\begin{array}{r} \times 343 \\ 27 \\ \hline 2401 \\ 686 \\ \hline \times 9261 \\ 7 \\ \hline 64827 \end{array}$$

То есть, наше число состоит из 4-х семёрок,
3-х троек и одной единицы.

$$\begin{array}{c} 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \\ \times \times \times \times \times \times \times \\ \hline 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \\ \hline 3 \times 3 \times \times \times \times \times \\ \hline 3 \times \times 3 \times \times \times \\ \hline 3 \times \times \times 3 \times \times \end{array}$$

$$3 \times \times \times \times \times \times$$

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$$

$$= (15) + 20$$

$$\times 33 \times \times \times \times$$

$$\begin{array}{r} 10080 \\ + 280 \\ \hline 10360 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \end{array}$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$3 \ 3 \times \times \times \times \times \times$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 180 \\ \hline 448 \\ 56 \\ \hline 1008 \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 10x \cdot \cos 4x + 2 \sin 4x \cdot \cos 10x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 10x \cdot \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 10x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x = 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x \right) + \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

~~$$2 \cos 10x \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos 4x = 0$$~~

~~$$2 \cos 10x \cdot (-\sin 4x) + \cos 4x = 0$$~~

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) \cdot \cos(10x) + \cos 4x = 0$$

~~$$\cos 4x (2 \cos(10x) + 1) = 0$$~~

$$\cos 4x = 0$$

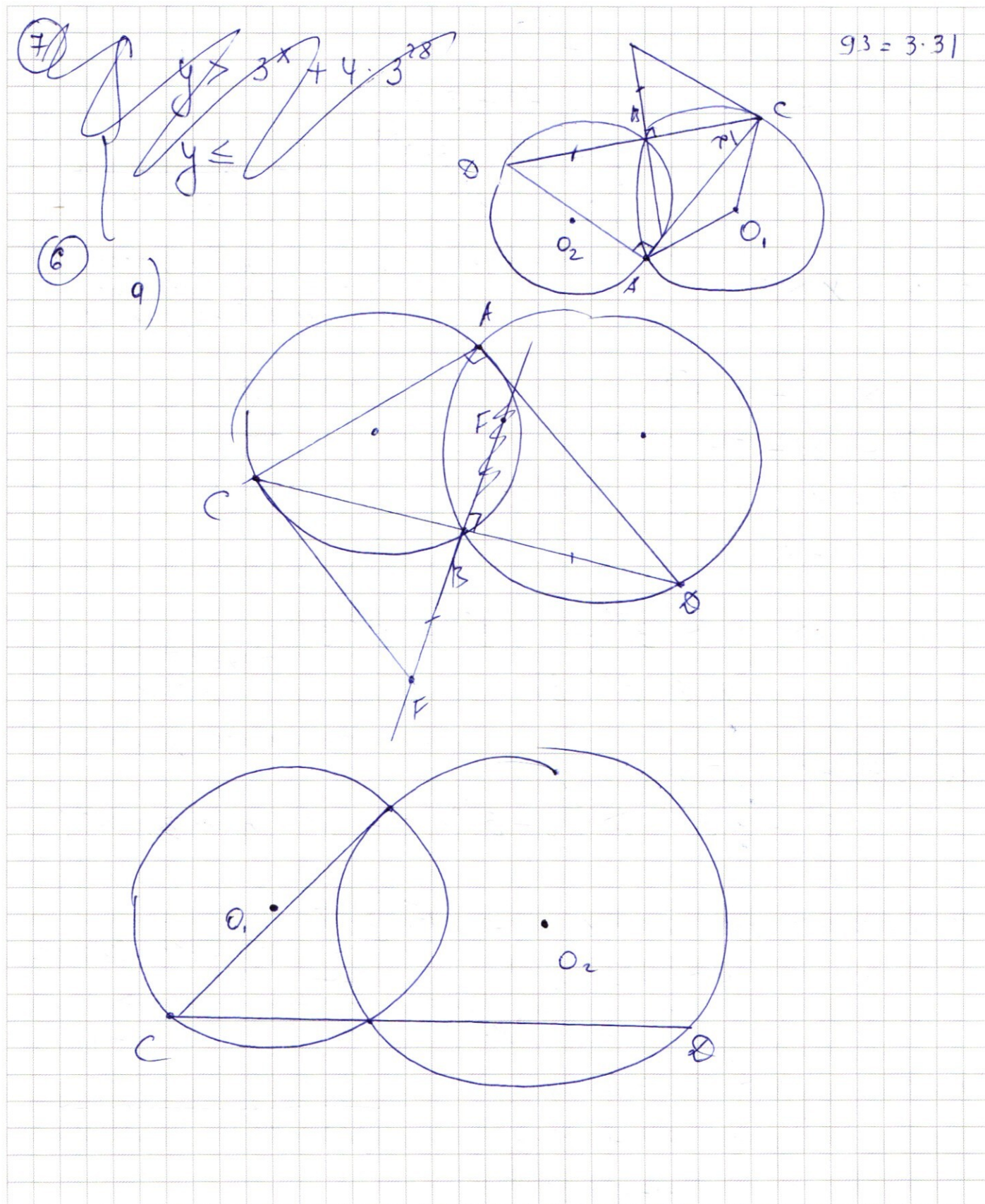
$$2 \cos(10x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$10x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{5}k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \Rightarrow y > 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3^{28}x - 3x \end{cases}$$

Если $x \leq 3$ $y \leq 81 + 4 \cdot 3^{28}$
 $\Rightarrow y \leq 93 - 9 + 3 \cdot 3^{28}$

$$y \leq 84 + 3 \cdot 3^{28}$$

$$y > 4 \cdot 3^{28}$$

$$84 + 3 \cdot 3^{28} \quad 4 \cdot 3^{28} + 9$$

$\Downarrow$

нет реш.

еще меньше и
точно меньше даже 3^{28}

Если $x \geq 5$
 $\Downarrow$

$$y > 3^5 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 - 15 + 5 \cdot 3^{28}$$

$$3^5 + 4 \cdot 3^{28} < 78 + 5 \cdot 3^{28}$$

$$81 \cdot 3 - 78 < 3^{28}$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 3 \end{array}$$

$$(31)$$

$$x = 31 \Rightarrow y > 3^{31} + 4 \cdot 3^{28} = 3^{28} \cdot 31$$

$$y \leq 3^{28} \cdot 31$$

— нет
реш.

и дальше тоже
не будет, т.к.

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} > 93 + 3^{28} \cdot x - 3x \quad \text{при } x > 31$$

$\Downarrow$

x может быть $x \in [5; 30]$

$$x = 4$$

$$y > 3^4 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 81 + 3^{28} \cdot 4$$

одноч. числ.

$$3^{28} \cdot 4 + 81$$

$$x = 5$$

$$y > 81 \cdot 3 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 78 + 5 \cdot 3^{28}$$

$$-(81 \cdot 3 - 78) \quad 3^{28}$$

$$81 \cdot 3 + 4 \cdot 3^{28} \quad 3^{28} \cdot 5 + 78$$