

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИД

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

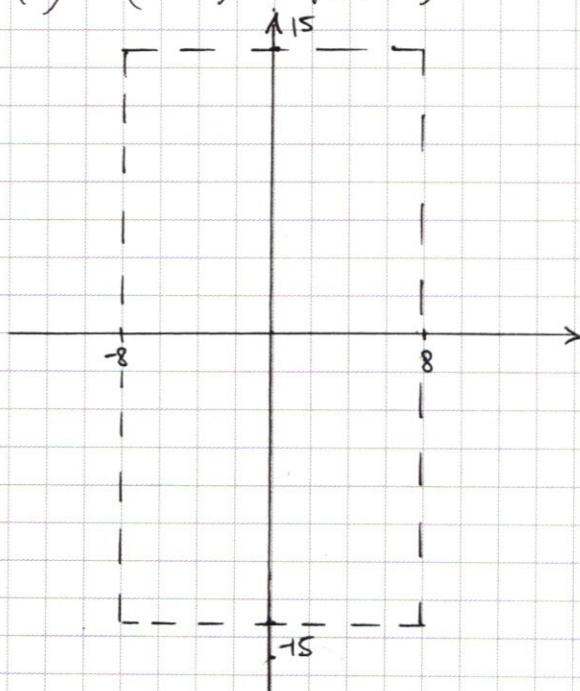
Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases} ; a \geq 0$$

Найти a , при которых система имеет 2 решения.

(2) $(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \quad || \Rightarrow$

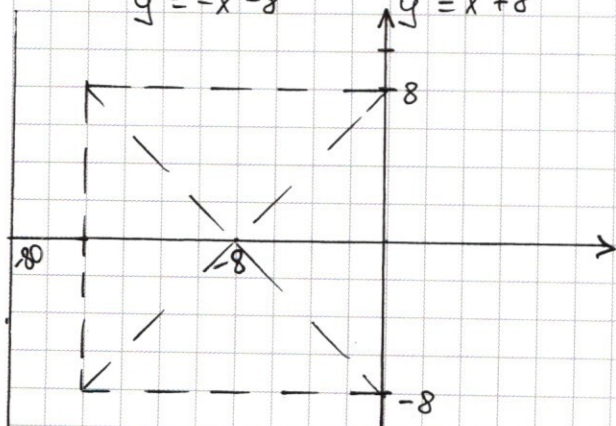


$$\begin{cases} (x-8)^2 + (y-15)^2 = a \\ (-x-8)^2 + (y-15)^2 = a \\ (x-8)^2 + (-y-15)^2 = a \\ (-x-8)^2 + (-y-15)^2 = a \end{cases}$$

(1) $|x+y+8| + |x-y+8| = 16 \quad || \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x+y+8 &= 0 \\ y &= -x-8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y+8 &= 0 \\ y &= x+8 \end{aligned}$$

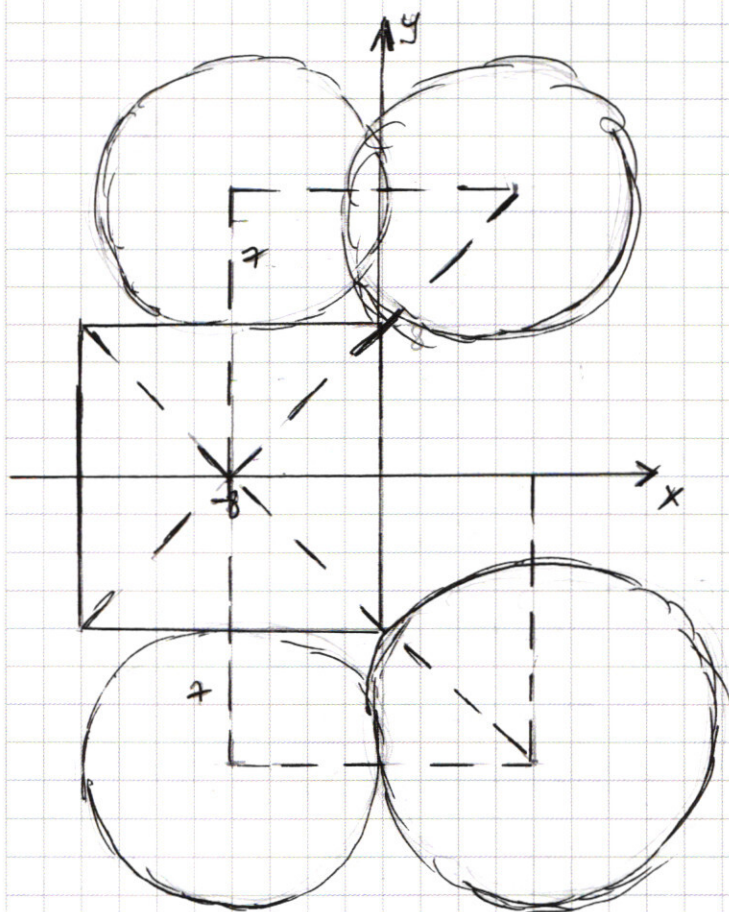


$$\begin{cases} x+y+8+x-y+8=16 \\ -x-y-8+x-y+8=16 \\ x+y+8-x+y-8=16 \\ -x-y-8-x+y-8=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x=0 \\ 2y=16 \\ -2y=16 \\ -2x=32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=8 \\ y=-8 \\ x=-16 \end{cases}$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ СТРАНИЦА 2

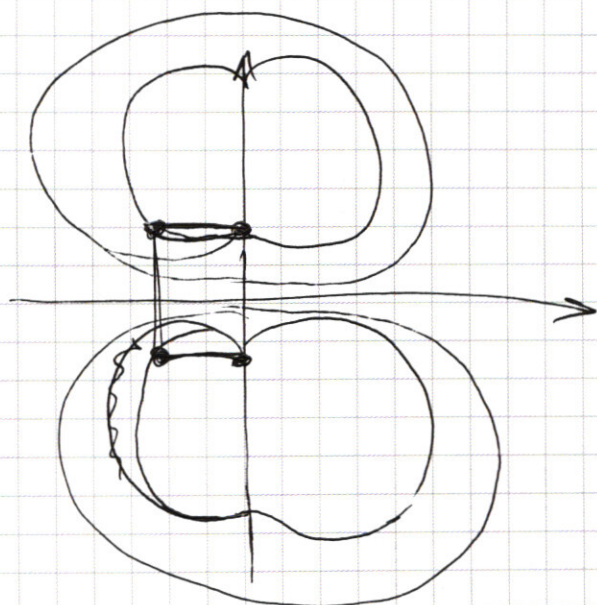


Два решения
возможно только в слу-
чае касания окружно-
стями квадрата 2-х
точек.

Но если касаются левые
окружности $\parallel \Rightarrow r=7$ ~~или~~
если касаются правые
угла квадрата $\parallel \Rightarrow$

$$r = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{64 + 49} = \sqrt{113}$$

$$\sqrt{113} > 7 \parallel \Rightarrow \\ \parallel \Rightarrow r = 7 = \sqrt{a} \parallel \Rightarrow a = 49$$



$$\text{при } \sqrt{a} = \sqrt{7^2 + 8^2} = r$$

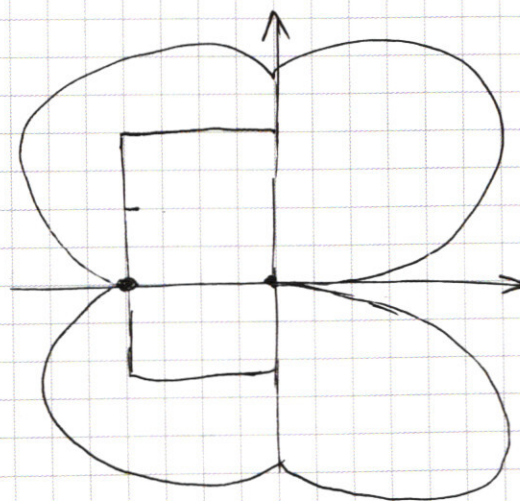
имеет 4 решения

извините, за некрасивый рисунок

тут 2 решения
при $r=17! \Rightarrow$
 $a = 289$

$$a = 49$$

ОТВЕТ: $a = 49$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. 64827 однозначные делители: 1, 3, 7, 9

Заметим, что число 64827 можно представить как:

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1}_4 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}_4$$

8 цифр

факторизация числа

или

$$\underbrace{3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1}_4 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}_4$$

8 цифр

тогда всего возможных чисел:

$$\frac{8!}{3!4!1!} + \frac{8!}{4!2!1!1!} = 1120$$

ОТВЕТ: 1120

2. $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x + \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = y \quad || \Rightarrow \quad 2x = y + \frac{\pi}{4} \quad || \Rightarrow \quad 4x = 2y + \frac{\pi}{2}$$

$$2 \cos 5x \cos y + \cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$2 \cos 5x \cos y - \sin 2y = 0$$

$$2 \cos 5x \cos y - 2 \sin y \cos y = 0$$

продолжение на 4 стр.

$$2 \cos y (\cos 5x - \sin y) = 0$$

$$2 \cos y = 0$$

$$\cos 5x = \sin y$$

$$\cos y = 0$$

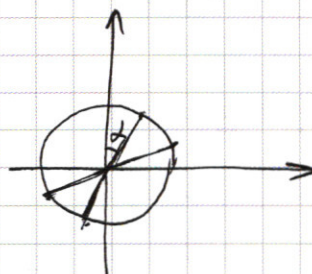
$$y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x - \frac{3\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 5x = \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$



$$5x + 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi h, h \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi h}{7}, h \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ОТВЕТ: } x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi h}{7}, h \in \mathbb{Z}$$

$$3. \int \left(-\frac{x^7}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)}$$

$$\text{ОДЗ: } y < 0; x > 0$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

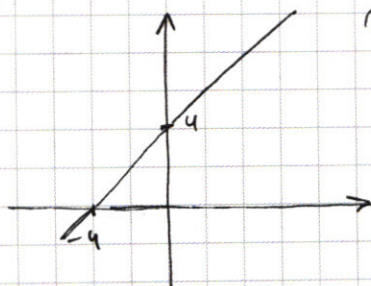
$$(2) \quad y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + 3xy - xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y(y+3x) - x(y+3x) + 4(3x+y) = 0$$

$$(y+3x)(y-x+4) = 0$$

$$\begin{cases} y = -3x \\ y = x - 4 \end{cases}$$



$$y < 0; x > 0$$

и подходит в ОДЗ $\Rightarrow y = -3x$; получается:

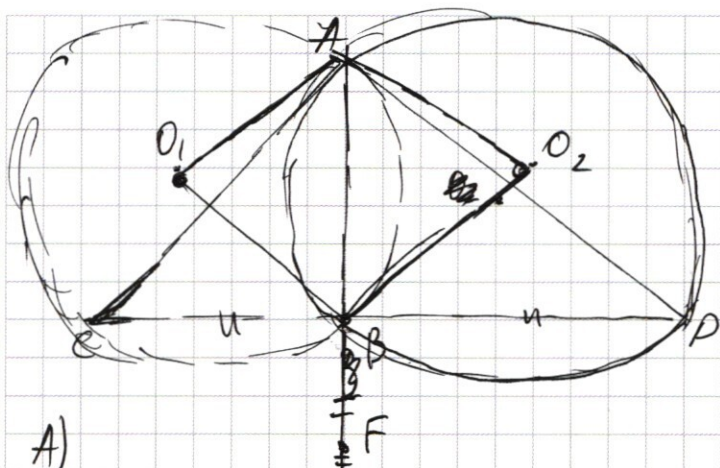
$$\left(\frac{x^7}{3x} \right)^{\ln 3x} = x^{2 \ln(9x^3)}$$

$$\left(\frac{x^6}{3} \right)^{\ln 3x} = x^{2 \ln(9x^3)}$$

$$\ln(3x) \cdot \log_3 \left(\frac{x^6}{3} \right) = 2 \ln(9x^3) \cdot \log_3 x$$

продолжение на с. 46

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



A) 1. $\triangle ABC$ $\angle C = \alpha$ и $\Rightarrow \angle D = 90 - \alpha$ ($\triangle ACD$)

2. $\cup AB$ - правая = $2x$
 $\cup AB$ - левая = $180 - 2x$ $\parallel \Rightarrow O_1AO_2B$ - вписанный. Но ра-
 dius равен $\parallel \Rightarrow AO_2B$ - ромб!

3. $\parallel \Rightarrow 2x = 180 - 2x \parallel \Rightarrow x = 45^\circ \parallel \Rightarrow CB = BD$

4. $\Rightarrow \angle O_1 = \angle O_2 = 90^\circ \parallel \Rightarrow AB = 17\sqrt{2}$

Но $\triangle AOC$ - равнобедренный $\parallel \Rightarrow AB \perp CO \parallel \Rightarrow BF = BD \parallel \Rightarrow$
 $BF = BA = 17\sqrt{2} \parallel \Rightarrow CF = 17\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 34$

3. продолжение:

$$(\ln_3 + \ln x)(6 \log_3 x - 1) = 2(\ln_9 + 3 \ln x) \log_3 x$$

$$(\ln 3 + \ln 3) (6 \log_3 x - 1) = 4 \ln 3 \log_3 x + 6 \ln x \cdot \log_3 x$$

$$6 \log_3 x \cdot \ln 3 - \ln 3 + \ln 3 \cdot 6 \log_3 x - \ln 3 = 4 \ln 3 \log_3 x + 6 \ln x \cdot \log_3 x$$

$$2 \ln x \cdot \log_3 x - \ln_3 - \ln_x = 0$$

$$2\ln_3 \cdot \frac{\ln x}{\ln 3} - \ln_3 - \ln x = 0$$

$$2 \ln x - \ln_3 - \ln x = 0$$

$$\ln x = \ln 3 \quad || \Rightarrow x = 3, \text{ a } y = -9$$

$$y = x - 4 \quad \rightarrow \text{подставим}$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \quad \left| \ln \square \right.$$

$$\left(-\frac{x^7}{x-4}\right)^{\ln(-x+4)} = x^{2\ln(x(x+4)^2)}$$

$$\ln(4-x) (7\ln x - \ln(4-x)) = 2(\ln x + 2(\ln(4-x))) \ln x$$

$$a(7b-a) = 2(b+2a)b$$

$$7ab - a^2 = 2b^2 + 4ab$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$a = b$$

$$a = 2b$$

$$\ln(4-x) = \ln x$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\ln(4-x) = 2\ln x$$

$$4-x = x^2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = (\sqrt{17})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} ; y = \dots \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} ; y = \dots \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Два решения
возможно только в слу-
чае касания окружно-
стей квадрата 2-х
точек

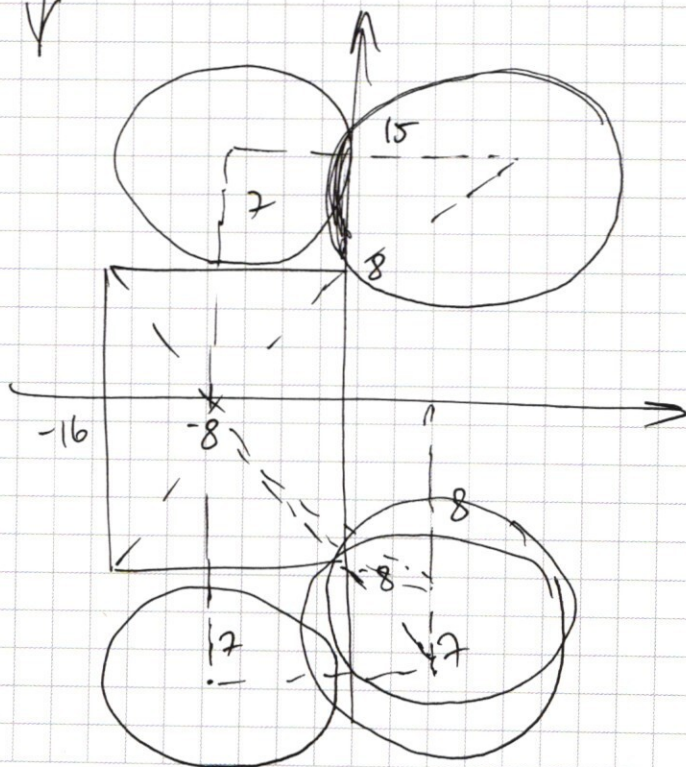
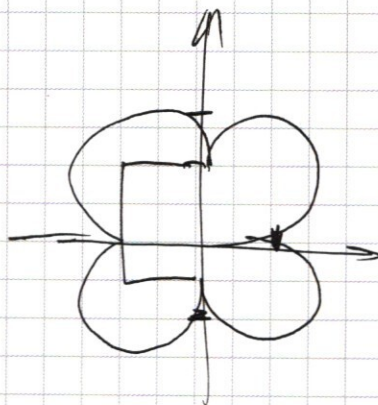
но если касаются левые окружности $\Rightarrow r = 7$

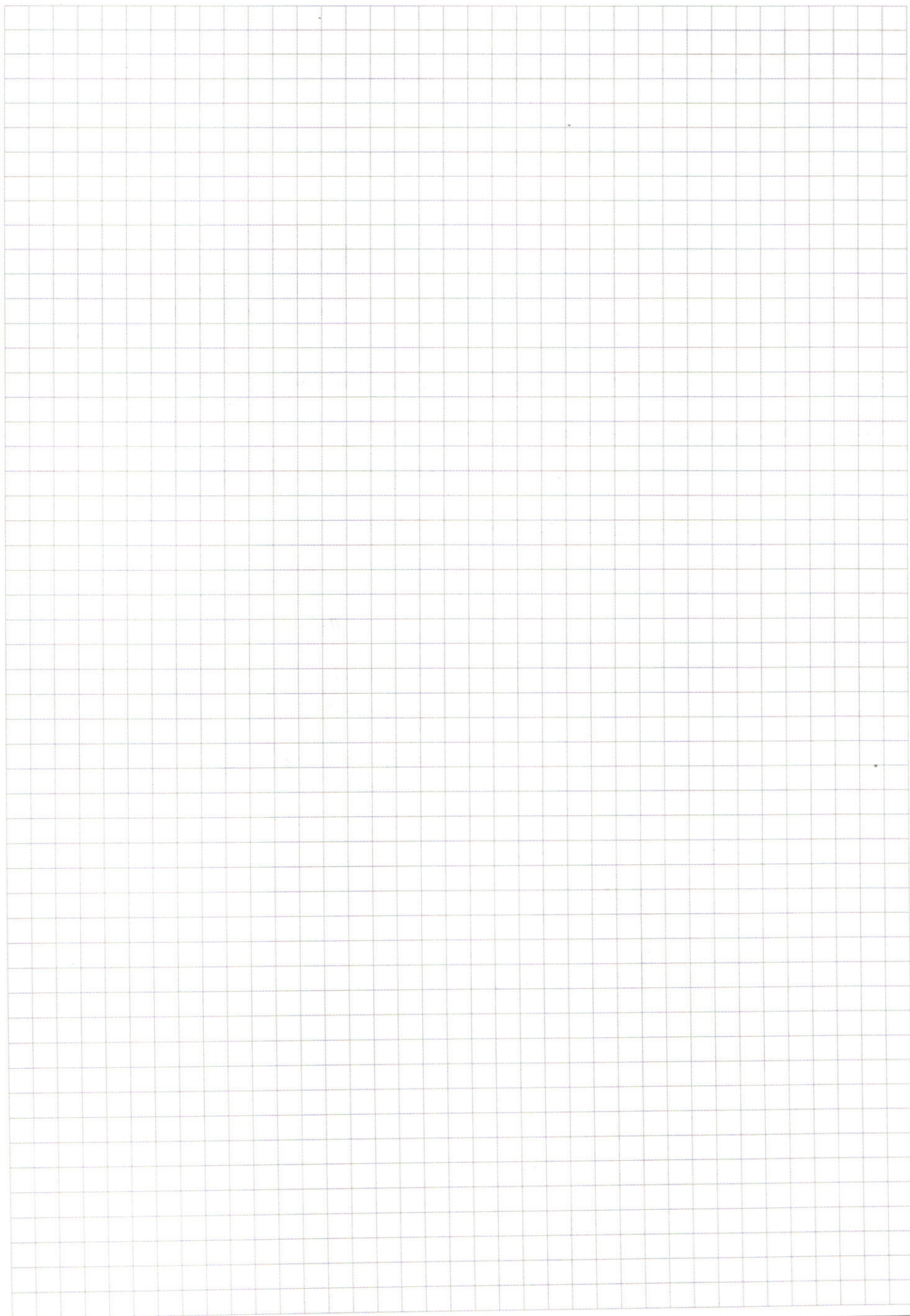
Если касаются правые угла квадрата $\Rightarrow$

$$r = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{64 + 49} = \sqrt{113} > 7$$

$$1 \Rightarrow r = 7 \Rightarrow \sqrt{a} \Rightarrow a = 49$$

или $r = \sqrt{275}$



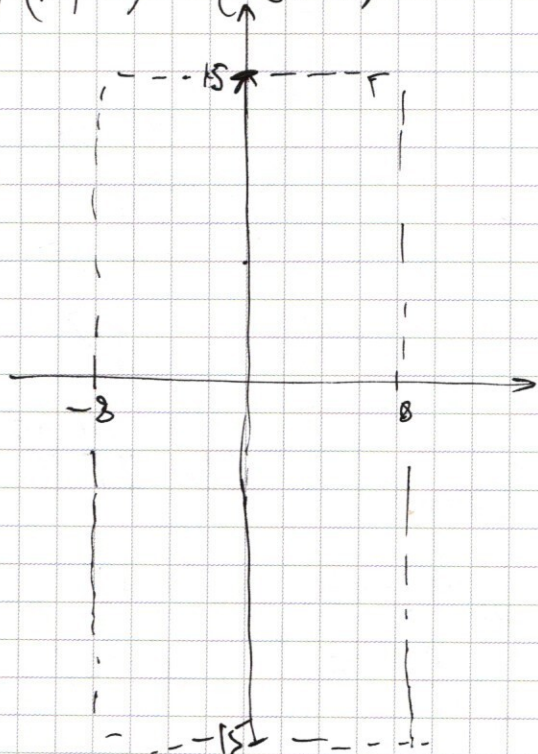


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}; \quad a \geq 0$$

Найти a , при которых система имеет 2 решения

$$(2) (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \parallel \Rightarrow$$



$$\begin{cases} (x-8)^2 + (y-15)^2 = a \\ (-x-8)^2 + (y-15)^2 = a \\ (x-8)^2 + (-y-15)^2 = a \\ (-x-8)^2 + (-y-15)^2 = a \end{cases}$$

$$(1) |x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$2x = 0 \quad x = 0$$

$$2y = 16 \\ y = 8$$

$$-2y = 16 \\ y = -8$$

$$-2x = 32 \\ x = -16$$

$\Rightarrow$

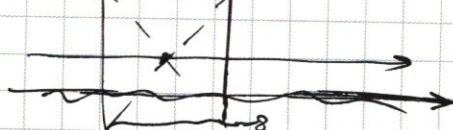
$$\begin{cases} x+y+8+x-y+8=16 \\ x+y+8-x+y-8=16 \\ -x-y-8+x-y+8=16 \\ -x-y-8-x+y-8=16 \end{cases}$$

$$x+y+8=0$$

$$x-y+8=0$$

$$y = x+8$$

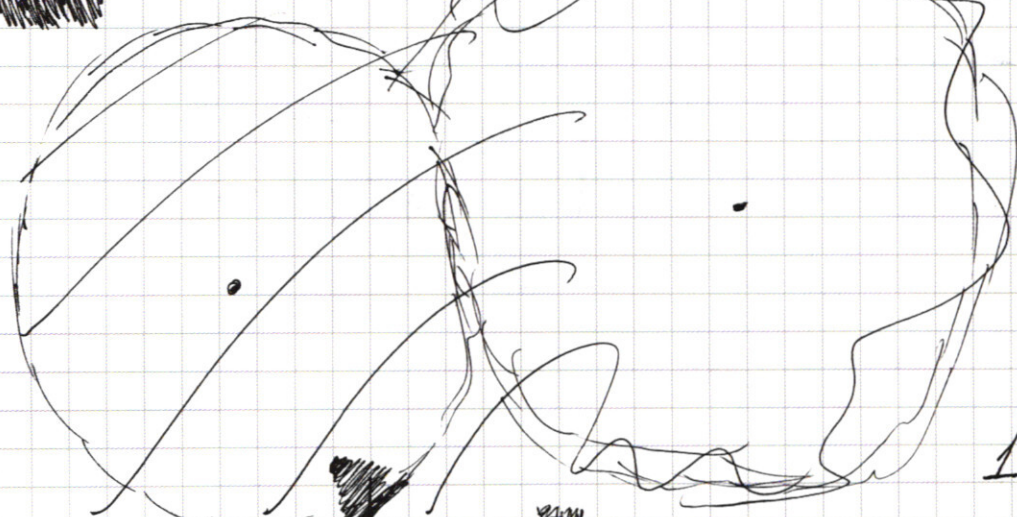
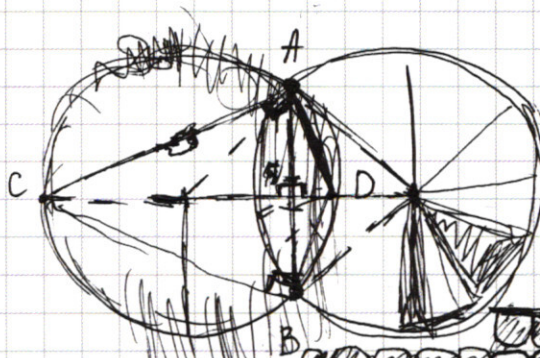
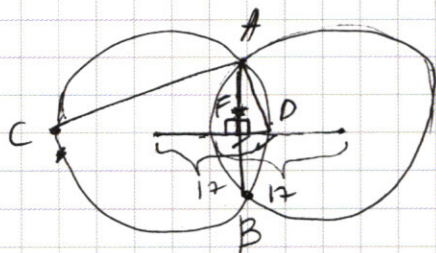
$$y = -x-8$$



$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 16 \\ -2y = 16 \\ -2x = 32 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \\ y = -8 \\ x = -16 \end{cases}$$

2. $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

6.



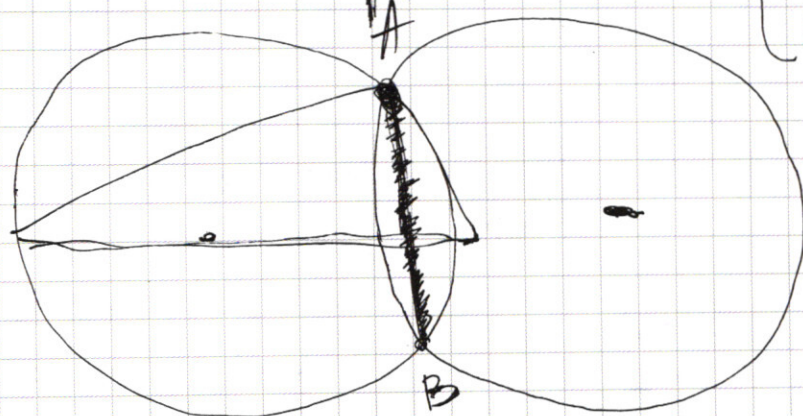
20 21

22 23.

19

16 17 18

2



$$\begin{cases} |x+y-8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 0 \end{cases}$$

$$|x+y-8| + |x-y+8| = 16$$

$$|x+y-8| + |x-y+8| = 16$$



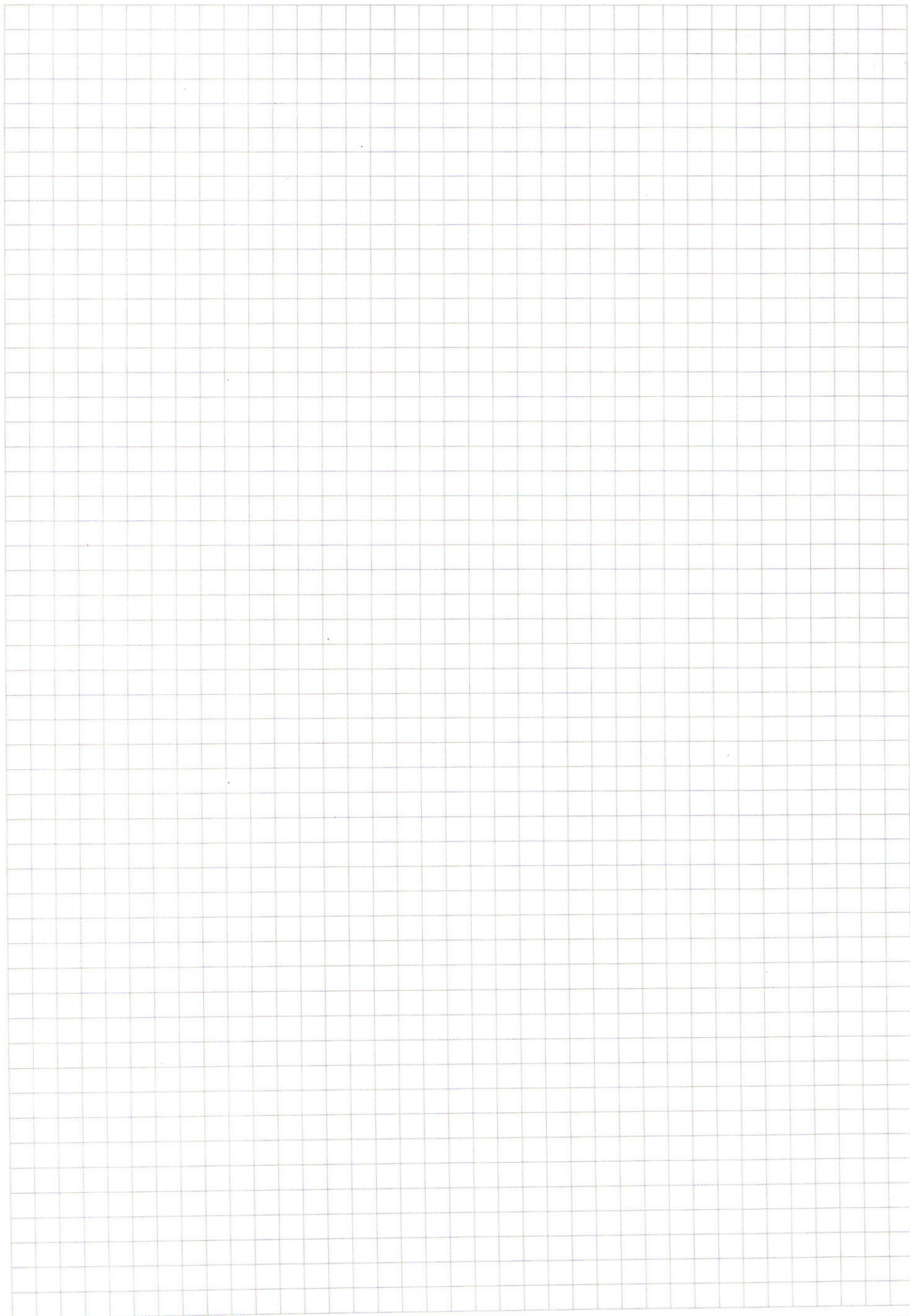
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)