

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 9} \\ \underline{-63} \\ 18 \\ \underline{-18} \\ 027 \\ \underline{-12} \\ 003 \\ \underline{-0} \\ 003 \\ \underline{-0} \\ 003 \\ \underline{-0} \\ 003 \end{array}$$

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$3 \cdot 3 \cdot 723 =$$

$$3 \cdot 2401$$

$$\ln 7 \cdot \frac{343}{7^3}$$

$$C_7^3 \cdot 8$$

$$C_8^2 \cdot 6 \cdot 5$$

$$X \cdot X \cdot X$$

$$X = 3 = e \cdot \ln 3$$

.....

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 7x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 7x = 0$$

$$2 \cos^2 2x - 1$$

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$T_x = T_1 - \frac{T_1}{4} + 2 \ln x$$

$$\left(-\frac{x^7}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(x y^2)}$$

$$\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$y = -3x$$

$$y = x - 4$$

$$y^2 + 3xy - xy - 3x^2 + 4(3x + y) =$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$2y^2 + 4xy - 6x^2 + 12x + 8y = 0$$

$$(y^2 + 4xy + 4x^2) + (y^2 + 8y + 16) - (3x^2 - 12x + 16) - x^2 = 0$$

$$(y + 2x)^2 + (y + 4)^2 = (3x - 4)^2 + x^2$$

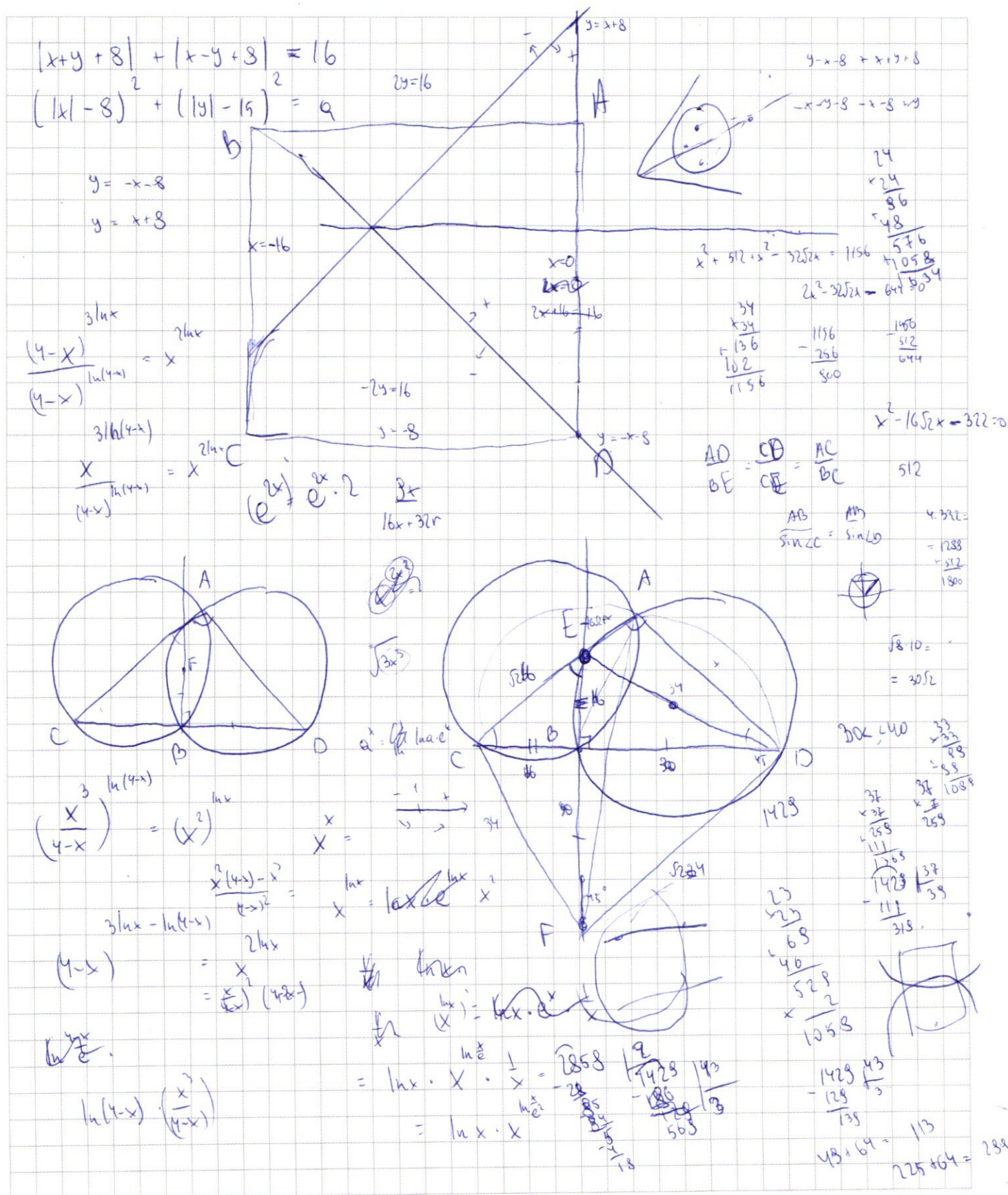
$$(3x - 4 - y - 2x)(3x - 4 + y + 2x) + (x - y - 4)(x + y + 4) =$$

$$(x - y - 4)(5x + y - 4) +$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{x}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln x} \uparrow \\
& \log_2 8 = 3 \quad 2 = e \quad \ln 2 \\
& 2^{\log_2 8} = 8 \quad \ln 2 = \\
& \frac{\ln a}{a} = a \\
& (x^{\ln x})' = \frac{1}{x} \cdot x^{\ln x} \cdot \ln x + x^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \\
& \ln 3x^3 = \ln 27x^3 - \ln 3 = 3\ln 3x - \ln 3 \\
& \frac{x}{\ln 3x} = x^{2\ln x} \quad \frac{6\ln 3x}{x} \\
& \frac{x}{\ln(4-x)} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln(4-x)} \\
& \frac{3\ln(4-x)}{x} = \frac{2\ln x}{x} \cdot (4-x)^{\ln(4-x)} \\
& 3\ln(4-x) - 2\ln x = \ln(4-x) \\
& x \ln \frac{(4-x)^3}{x^2} = (4-x)^{\ln(4-x)} \\
& \frac{3\ln(4-x)}{x} = \frac{2\ln x}{x} \\
& \left(\frac{x}{4-x}\right)^3 = x^{2\ln x} \\
& \frac{a}{b^{\ln b}} = a^{2\ln a} \\
& b^{3\ln a - \ln b} = a^{2\ln a} \\
& b^{\ln \frac{a^3}{b}} = a^{2\ln a}
\end{aligned}$$

$x = \frac{15}{17}$
 $\ln x = \ln \frac{15}{17}$
 $\frac{x}{\ln x} = \frac{15}{17} \cdot \frac{17}{\ln 15}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



3/12(4-2)

X

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$64827 = 9 \cdot 7203 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1401 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

Значит нужно найти все восьмизначные числа с таким произведением цифр. Если в таком числе нет ни одной 1, то заметим, что мы разложили 64827 на произведение 7 цифр, причем они все простые и не равны единице. Значит, очевидно, мы не сможем представить 64827 в виде произведения 8 не единицы.

Если в нашем числе 1 единица, то остальные 7 цифр не 1. Значит, цифры числа должны быть такими же как в нашем разложении, т.е. других разложений с 7 цифрами нет. $C_8^1 = 8$ - число способов выбрать "1"

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35 \text{ - число способов выбрать три "3"}$$

$$\text{Всего способов: } 8 \cdot 35 = 280$$

Если в нашем числе 2 единицы, то остальные 6 не единицы. Заметим, что в нашем разложении можно сгруппировать $3 \cdot 3 = 9$ и получить произведение 6 цифр: $9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$. Отсюда становится ясно, что больше чем 2 единицы в числе не может быть, т.е. также придется сгруппировывать еще цифры, но произведение любых двух оставшихся цифр больше 10, чем 9, что быть не должно. Значит, остальных восьмизначных чисел с

двух единиц. $C_8^2 = 28$ - число способов выбрать две "1". $C_6^1 = 6$ - число способов выбрать "3", $C_5^1 = 5$ - число способов выбрать "3",

значит всего способов $28 \cdot 6 \cdot 5 = 28 \cdot 30 = 840$ (т.к. все цифры выбираются независимо)

Полным образом, кол-во чисел равно $840 + 280 = 1120$

Ответ: 1120.

№2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\cos 5x \cdot \cos 2x + 2\cos 5x \cdot \sin 2x + \sqrt{2} \cdot (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2\cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin 2x = 0 & (1) \\ 2\cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x = -\sin 2x$$

$$\cos 2x = \sin(-2x) = \sin \frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$



$$2x = \pm\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + 2\pi k$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2x + 2\pi k \\ 2x = -\frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 4x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{— неверно при } \forall x$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} (\cos (2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$2 \cos 5x + 2 \cos (2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \quad | :2 \neq 0$$

$$\cos 5x + \cos (2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \cos (\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}) \cos (\frac{5x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2}) = 2 \cos (\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) \cos (\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\begin{cases} \cos (\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos (\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

3

$$\left(-\frac{x}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Заметим, что: $y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = y^2 + 3xy - (xy + 3x^2) + 12x + 4y = y(3x+y) - x(3x+y) + 4(3x+y) = (3x+y)(y+4-x) = 0$

Значит, $\begin{cases} 3x+y=0 \\ y+4-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x=y \\ y=x-4 \end{cases}$

Подставим эти значения в уравнение (1) и найдем корни.

$$1) \quad y = -3x, \text{ тогда}$$

$$\left(-\frac{x}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(x \cdot 3x^2)}$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(3x^2)}$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2(\ln 3x^2 + \ln x)} = x^{2\ln 3x^2} \cdot x^{2\ln x} = x^{2\ln 3x^2} \cdot e^2$$

Вернемся к начальному равенству и поймем, что т.к.

$3x$ стоит под $\ln$, то $x > 0$, значит $\ln 3x^2 = 2\ln|3x| = 2\ln(3x)$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{4\ln 3x} \cdot e^2$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{\ln 3} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{\ln x} = x^{4\ln 3} \cdot x^{4\ln x} \cdot e^2$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{\ln 3} \cdot \frac{e^6}{3^{\ln x}} = x^{4\ln 3} \cdot e^4 \cdot e^2 = x^{4\ln 3} \cdot e^6 \quad | : e^6 > 0$$

$$\frac{x^{6\ln 3}}{3^{\ln 3} \cdot 3^{\ln x}} = x^{4\ln 3}$$

$$x^{(6\ln 3 - 4\ln 3)} = e \cdot 3^{\ln x}$$

$$x^{2\ln 3} = e \cdot 3^{\ln x}$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}, \text{ в данном случае:}$$

$$x^{\ln 3} = 3^{\ln x}$$

$$x^{2\ln 3} = e \cdot x^{\ln 3}$$

$$x^{\ln 3} (x^{\ln 3} - e) = 0$$

$$x^{\ln 3} \neq 0, \text{ т.к. } x > 0, \text{ значит } x^{\ln 3} > 0 \text{ (т.к. } \ln 3 > 0)$$

Значит, $x^{\ln 3} = e = 3^{\ln 3}$ (функция $x^{\ln 3}$ строго возрастает, т.к. $\ln 3 > 1$, т.к. $3 > e$, поэтому существует только одно решение) $\Rightarrow x = 3$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $y = x - 4$

Заметим, сразу, что м.н. $(-y)$ стоит под $\ln$, но

$$-y > 0$$

$$y < 0$$

$$x - 4 < 0$$

$$x < 4$$

но м.н. xy^2 стоит под $\ln$, но $xy^2 > 0$, $y^2 > 0 \Rightarrow x > 0$

Значит, $0 < x < 4$

$$\left(-\frac{x}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x(x-4)^2)}$$

$$\left(\frac{x}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln x + 2\ln(x-4)^2} = x^{2\ln x} \cdot x^{2\ln(x-4)^2} = e^2 \cdot x^{4\ln(x-4)} = e^2 \cdot x^{4\ln(4-x)}$$

$$\frac{x^{7\ln(4-x)}}{(4-x)^{\ln(4-x)}} = e^2 \cdot x^{4\ln(4-x)}$$

$$\frac{x^{7\ln(4-x)}}{e}$$

1) $\left(-\frac{x}{-3x}\right)^{\ln 3x} = x^{2\ln(8x^3)}$

Заметим, что м.н. $3x$ стоит под $\ln$, но $3x > 0$, $x > 0$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{2 \cdot (\ln 27x^3 - \ln 3)} = x^{2 \cdot (3\ln 3x - \ln 3)}$$

$$\frac{x^{6\ln 3x}}{3^{\ln 3x}} = x^{6\ln 3x} \cdot \frac{1}{x^{2\ln 3}}$$

$$x^{6\ln 3x} \left(\frac{1}{3^{\ln 3x}} - \frac{1}{x^{2\ln 3}} \right) = 0$$

П.к. $x > 0$, но $x^{6\ln 3x} > 0$, значит:

$$\frac{1}{3^{\ln 3x}} = \frac{1}{x^{2\ln 3}}$$

$$x^{2\ln 3} = 3^{\ln 3x}$$

Воспользуемся свойствами логарифмов:

$${}_a \log_b c = c^{\log_b a}, \text{ а именно } x^{\ln 3} = 3^{\ln x}$$

$$3^{2\ln x} = 3^{\ln 3} \cdot 3^{\ln x}$$

$$3^{\ln x} (3^{\ln x} - 3^{\ln 3}) = 0$$

П.к. $x > 0$, но $3^{\ln x} > 0$, значит:

$$3^{\ln x} = 3^{\ln 3}$$

(функция $3^{\ln x}$ монотонная строго, поэтому существует только одно решение)

$$x = 3$$

$$2) y = x - 4$$

П.к. если $\ln(-y)$, то $-y > 0$, $y < 0$

$$x - 4 < 0 \Rightarrow x < 4$$

П.к. если $\ln(xy^2)$, то $xy^2 > 0$, $y^2 > 0 \Rightarrow x > 0$

Значит, $0 < x < 4$

$$\left(-\frac{x^7}{(x-4)} \right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x(4-x)^2)}$$

$$\left(\frac{x^7}{4-x} \right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln(4-x)}$$

$$x^{4\ln(4-x)} \left(\frac{x^{7\ln(4-x)}}{(4-x)^{\ln(4-x)}} - x^{2\ln x} \right) = 0$$

П.к. $4 > x > 0$, но $x^{4\ln 4-x} > 0$, значит:

$$\frac{x^{7\ln(4-x)}}{(4-x)^{\ln(4-x)}} = x^{2\ln x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^3}{y-x}\right)^{\ln(y-x)} = x^{2/\ln x}$$

$y-x \downarrow$ на $(0; 4)$

$\frac{1}{y-x} \uparrow$ на $(0; 4)$

$x^3 \uparrow$ на $(0; 4)$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{y-x} \uparrow \text{ на } (0; 4)$$

Очевидно, решений нет.

Ответ: $x=3$

№5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ [(x-8)^2 + (y-15)^2 = 9] \end{cases}$$

Прямые $y=x+8$

и $y=-x-8$ разбивают
плоскость на 4 части:

2) $x+8 \leq y$

$-x-8 \leq y$

$-x-y-8 - x+y-8 = 16$

$-2x = 32$

$x = -16$

1) $x+8 \leq y$

$-x-8 \geq y$

$x+y+8 - x+y-8 = 16$
 $2y = 16 \Rightarrow y = 8$

3) $-x-8 \leq y$

$x+8 \geq y$

$-x-y-8 + x-y+8 = 16$

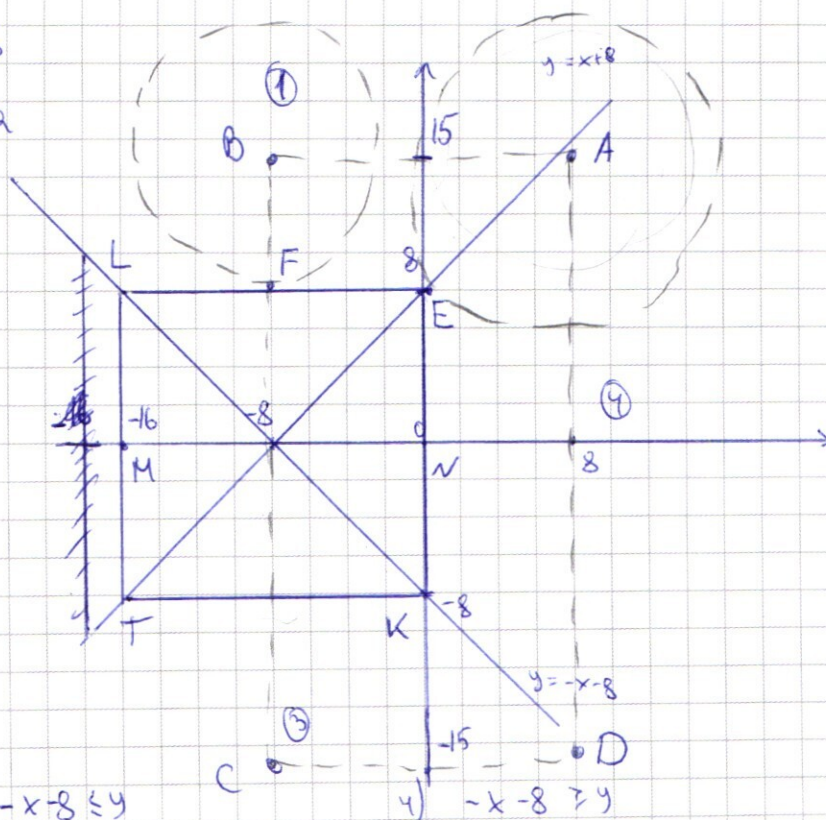
$-2y = 16 \Rightarrow y = -8$

4) $-x-8 \geq y$

$x+8 \geq y$

$x+y+8 + x-y+8 = 16$

$x = 0$



Решение первого уравнения - квадрат в вершинах $(0; 8)$, $(0; -8)$, $(-16; 8)$ и $(-16; -8)$.

Решением второго уравнения будут являться 4 окружности с центрами $A=(8; 15)$, $(8; -15)=D$, $(-8; 15)=B$, $(-8; -15)=C$ и радиусом $\sqrt{a}$.

Заметим, что окр. W_A пересекает столько же точек квадрата, сколько и W_D в силу симметрии всей картины относительно $y=0$. Окр. W_B пересекает столько же, сколько и W_C . Таким образом, у нас должно быть ровно 2 решения, значит, либо W_A и W_D касаются квадрата (пересечь его в двух одинаковых точках они, очевидно не могут), либо W_B и W_C касаются квадрата, либо W_B и W_C пересекают квадрат в двух одинаковых точках.

$$AE = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{113}$$

$$BF = 15 - 8 = 7 < \sqrt{113}$$

- это означает, что если $r = \sqrt{a} = \sqrt{113}$,

то и W_A и W_D ~~пересекут~~ каснутся

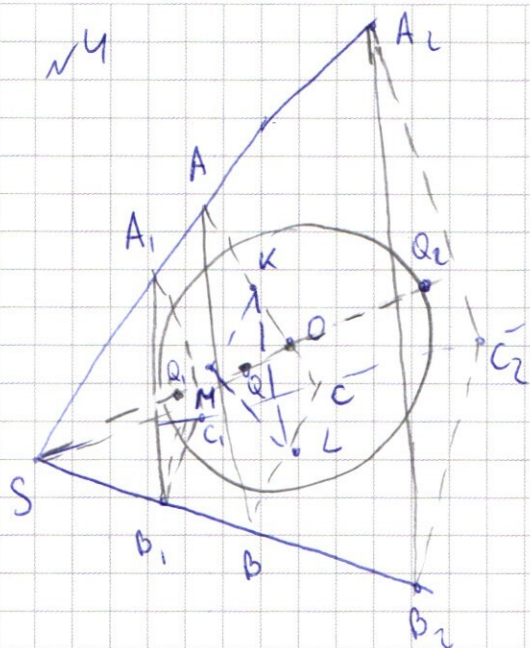
окружности, и W_B и W_C пересекут её, такую как не надо. Значит, $\sqrt{a} = 7$ подходит, $a = 49$.

Если W_B и W_C пересекутся в одинаковых точках, то только в M и N в силу симметрии. Тогда: $r = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$, но $\sqrt{113} < 17$, поэтому в этом случае W_A и W_D тоже пересекут квадрат и корней будет больше 2.

Таким образом, может быть случай, когда W_A пересекет в T , а W_D в L . Тогда $r = \sqrt{14^2 + 13^2} = \sqrt{1639}$. Заметим, что $BT = \sqrt{13^2 + 8^2} < \sqrt{1639}$, т.е. при таком r W_B и W_C не пересекут квадрат.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} a = 49 \\ a = 1639 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Для начала поймём задачу лучше.
Пусть (SO) пересекает сферу
в точках Q_1 и Q_2 , тогда Q_1Q_2 —
диаметр сферы. По условию,
у нас есть два сечения, касаю-
щиеся сферы и $\perp SO$. Поначалу,
что если плоскость касается

сферы, то она будет $\perp$ радиусу, проведённому в точку касания. Верно и обратное.
Таким образом, наши сечения $\perp SO$, значит, касаются
сферы в Q_1 и Q_2 . Также заметим, что эти
плоскости $\perp$ одной прямой, но они параллельны.

Сечение трёхгранного угла плоскостью — это треугольник.
Пусть первое сечение это $A_1B_1C_1$, второе — $A_2B_2C_2$.
Заметим, что точки K, M и L равноудалены от O , поэтому
 O лежит на прямой, $\perp (KML)$ и проходящей через центр
описанной окр. ΔKML (обозначим его Q)

Значит,

Пусть $(SO) \cap (KML)$ в точке Q . Т.к. SO — ГМТ
всех точек, равноудалённых от граней трёхгранного
угла, то $OQ = OK = OL$ (радиус сферы). Тогда заметим, что
 $\Delta OQK = \Delta OQM = \Delta OQL$ по

Заметим, что с одной стороны, O лежит на прямой, проходящей через центр описанной окр. ΔKLM и $\perp (KLM)$ (т.е. O равноудален от K, L и M). С другой стороны, все точки, лежащие на SO равноудалены от K, L и M , т.е. они являются точками касания сферы и граней угла. Таким образом, $SO \perp (KLM)$, значит $(KLM) \parallel (A_1B_1C_1)$ и $(A_2B_2C_2)$.

Обозначим сечение n -гранного угла (KLM) как ABC . Заметим, что в тетраэдрах $SA_1B_1C_1$, $SABC$, $SA_2B_2C_2$ точка S проектируется в точки Q_1 , Q и Q_2 соответственно, т.е. у них общая прямая, содержащая высоту.

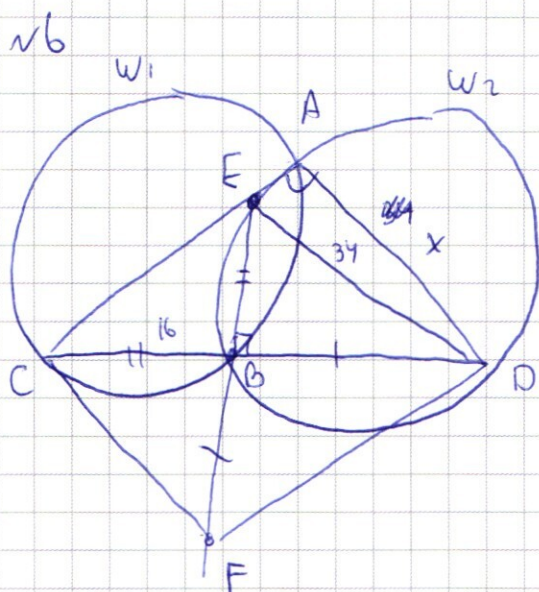
По условию: $S_{A_1B_1C_1} = 16$, $S_{A_2B_2C_2} = 16$, поэтому
$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SA_2B_2C_2}} = \frac{SQ_1 \cdot S_{A_1B_1C_1}}{SQ_2 \cdot S_{A_2B_2C_2}} = \frac{8 SQ_1}{16 SQ_2}$$

Обозначим $SQ_1 = x$, тогда $SQ_2 = SQ_1 + Q_1Q_2 = SQ_1 + 2r = x + 2r$, где r — радиус сферы. $SQ = SQ_1 + Q_1Q = x + r$

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA_1B_1C_1}} = \frac{S_{ABC} \cdot SQ}{S_{A_1B_1C_1} \cdot SQ_1} = \frac{S_{ABC} \cdot (x+r)}{16 \cdot x}$$

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA_2B_2C_2}} = \frac{S_{ABC} \cdot SQ}{S_{A_2B_2C_2} \cdot SQ_2} = \frac{S_{ABC} (x+r)}{16 (x+2r)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



а) 1) Докажем, что точка E (точка пересечения (BF) и AC) лежит на окружности w_2 .

$$\triangle ACD, \angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD + \angle ADC = 90^\circ$$

$$\triangle CEB, \angle CBE = 90^\circ \Rightarrow \angle ECB + \angle CEB = 90^\circ$$

Значит, $\angle CEB = \angle ADC$, значит $\angle ADB + \angle BEA = 180^\circ$, а это зна-

чит, что D, B, E, A на одной окружности, а т.к. D, A, B уже на одной окружности, то $E \in w_2$.

2) $\triangle ACB$, по Th sin:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACD} = 2R_1 = 34$$

$\triangle ABD$, по Th sin:

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = 2R_2 = 34$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin \angle ACD = \sin \angle ADB \\ \angle ACD = 90^\circ - \angle ADC \end{array} \right\} \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

$\triangle BED = \triangle CBF$, т.к.

$$\angle CBF = \angle EBD = 90^\circ$$

$BD = BF$ — по условию

$CE = BE$ (т.к. в $\triangle CEB$, $\angle CBE = 90^\circ$, $\angle ECB = 45^\circ$)

$$CF = ED$$

3) $\triangle AED$, $\angle EAD = 90^\circ \Rightarrow ED = 2R_2 = 34$

$$CF = ED = 34$$

Ответ: 34.

д)

$$BC = 16$$

$$\triangle BED: ED^2 = EB^2 + BD^2, EB = BC = 16$$

$$34^2 = 16^2 + BD^2$$

$$BD^2 = 50 \cdot 18 = 100 \cdot 8 \Rightarrow BD = 30$$

$$\triangle BFD, BD = BF = 30 \Rightarrow DF = 30\sqrt{2}$$

$$\angle FBD = 90^\circ$$

$$\angle ADC = \angle BDF = 45^\circ \Rightarrow \angle ADF = 90^\circ$$

$$\triangle ADF: AF^2 = AD^2 + DF^2 \quad (\triangle ACD, \angle ACD = 45^\circ, \angle CAD = 90^\circ \Rightarrow AC = AD)$$
~~$$AF^2 =$$~~

$$\triangle ECB: CE = \sqrt{2} \cdot CB = 16\sqrt{2}$$

$$AD = x, \text{ тогда } AE = AC - CE = x - 16\sqrt{2}$$

$$\triangle AEO, \angle EAO = 90^\circ \Rightarrow EO^2 = AE^2 + AO^2$$

$$34^2 = x^2 + (16\sqrt{2} - x)^2 = 2x^2 - 32\sqrt{2}x + 512$$

$$2x^2 - 32\sqrt{2}x + 512 - 1156 = 0$$

$$x^2 - 16\sqrt{2}x + 322 = 0$$

$$D = (16\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 322 = 512 + 1288 = 1800$$

$$\begin{cases} x = \frac{16\sqrt{2} \pm 30\sqrt{2}}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{46\sqrt{2}}{2} = 23\sqrt{2}$$

~~$$\triangle ADF: AF^2 = x^2 + (30\sqrt{2})^2$$~~
~~$$AF^2 = 1058 + 1800 = 2858$$~~
~~$$AF = \sqrt{2858}$$~~

$$\angle CAO = \angle AOF = 90^\circ \Rightarrow \triangle AOF - \text{прямоугольный}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} S_{AOF} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 1058 = 529$$

$$\text{Ответ: } S_{ACF} = 529$$