

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

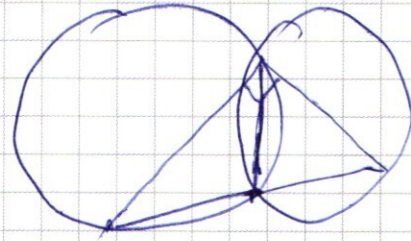
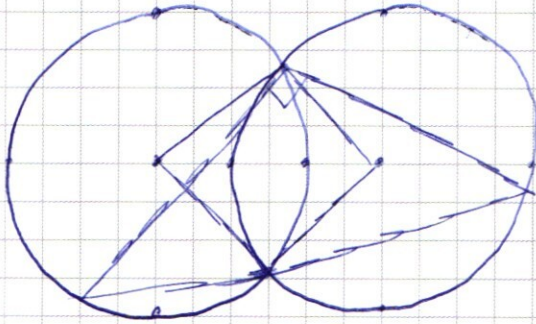
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

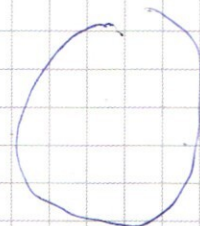
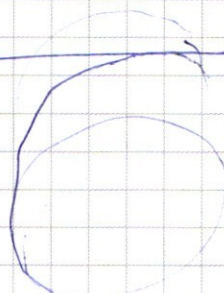
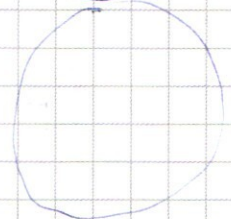
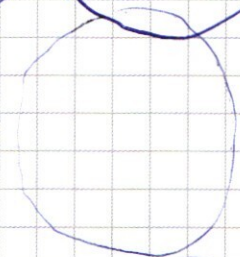
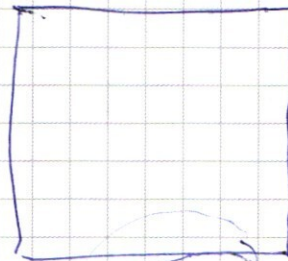
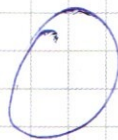
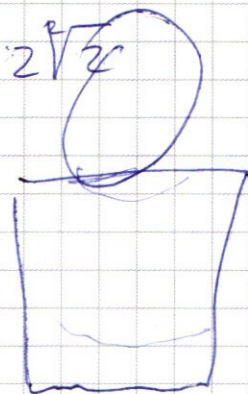
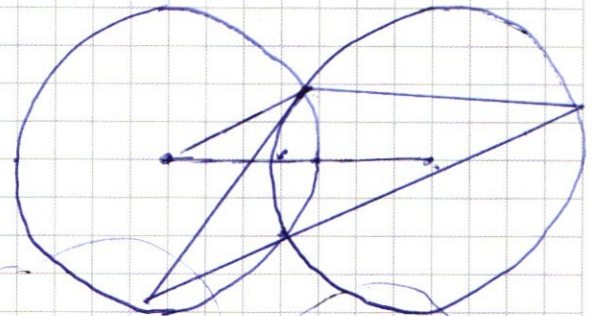
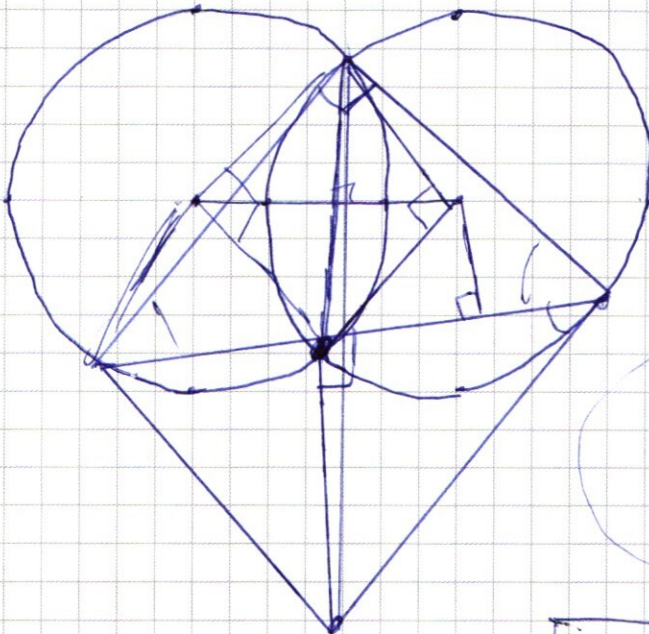
Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{17\sqrt{2}}{2} \quad a = 17 \cdot 17$$

$$\frac{17\sqrt{2}}{2}$$



нч

$$64827 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

Пл. к. нам пред. 8-значное число, то
в нем может присут. цифра 9 или
нет.

1) „9“ - есть

2) „9“ - нет

1) Рассмотрим 7 это можно считать

$$C_8^4 = 70, \text{ раскладок } C_4^2 = 6$$

$$E_4 K_1 = 70 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 = 840$$

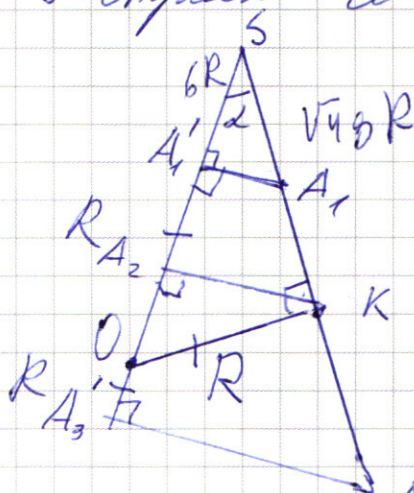
2) Рассмотрим 7, раскладом 3-„3“

$$K_2 = 70 \cdot 20 \cdot 1 = 1400$$

$$\text{Отв } K_1 + K_2 = \underline{2240}$$

нч

Рассмотрим сеч. ^{перпендикулярного углу} плоскости (OSK)



R - радиус сферы

A'1 - пусть A'1 - точка

пересечения сечения (с S=9)

с SK

A'2 - пересеч. искомого сеч.

с SO. A'3 - пересечение

сечения (с S=16) с SK

$$\Delta SA_1A'_1 \sim \Delta SA_3A'_3 \text{ по 2 углам}$$

$$K = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} \quad OA'_1 = OA'_3 = K$$

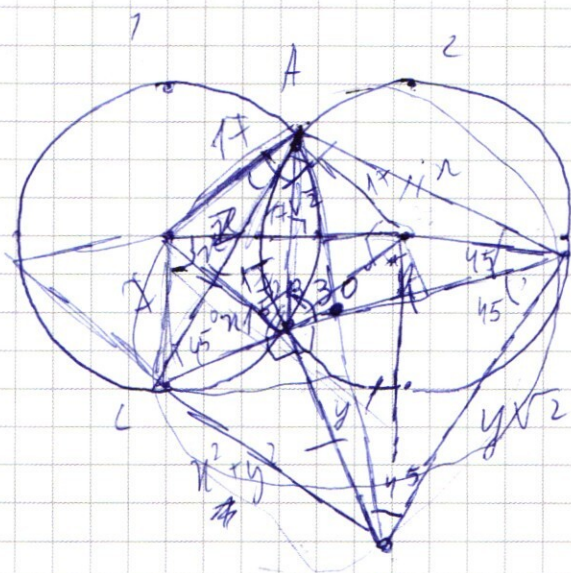
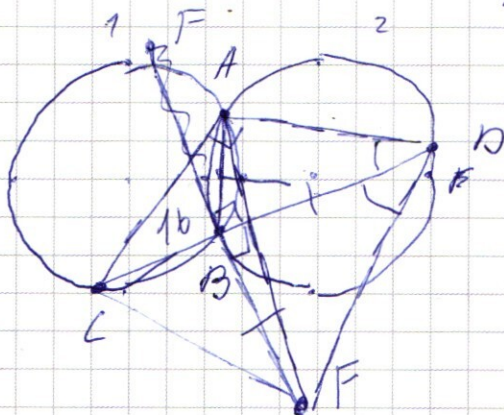
$$\Rightarrow \frac{SA_1}{SA_1 + 2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow SA_1 = 6R \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{7}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{48}}{7}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6

$$\cos 4\pi = \cos^2 2\pi - \sin^2 2\pi$$

$$\cos 2\pi (2\cos 2\pi + \sqrt{2}\cos 2\pi) = \sqrt{2}$$



$$x = 17 \quad \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 11$$

$$\cos \frac{x+y}{2} + \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = y$$

$$\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) = \sin \frac{x+y}{2}$$

$$CF^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{x-y}{2}$$

$$CD^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

$$(x+y) \cdot y = (x+y) y \sqrt{2}/2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x(x+y) = 801 \cdot 81$$

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 801$$

$$9 \cdot 89$$

$$64827 \div 3 = 21609$$

$$21609 \div 3 = 7203$$

$$\cos 7\pi + \cos 3\pi + \sin 7\pi - \sin 3\pi \neq \sqrt{89} \pi$$

$$2 \cos 5\pi \sin 4\pi + 2 \sin 4\pi \cos 5\pi \neq 89$$

$$4 \cos 5\pi \sin 4\pi + \sqrt{2} \cos 4\pi = 0$$

$$4 \cos 5\pi \sin 4\pi = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

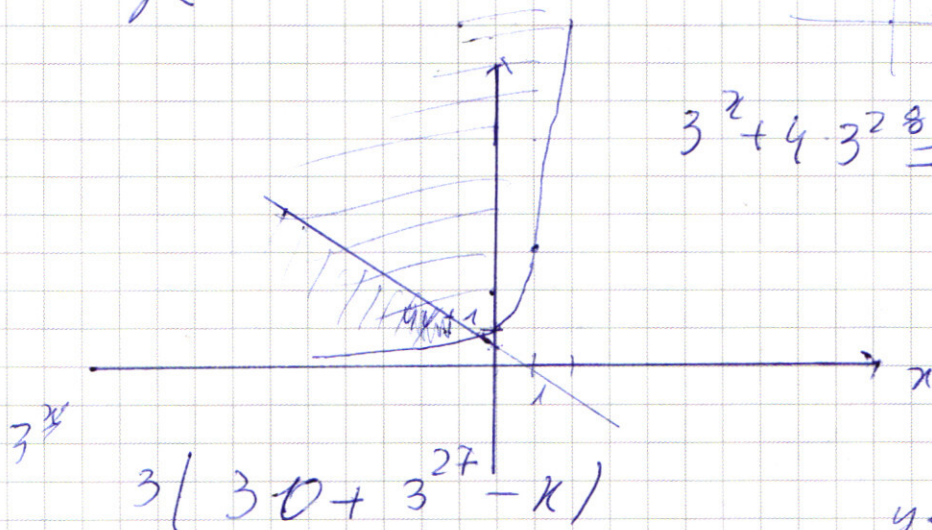
$$\sqrt{2} \cos 2\pi - \sqrt{2} \sin 2\pi = 0$$

$$2 \cos 5\pi \cos 2\pi + 2 \sin 2\pi \cos 5\pi + \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

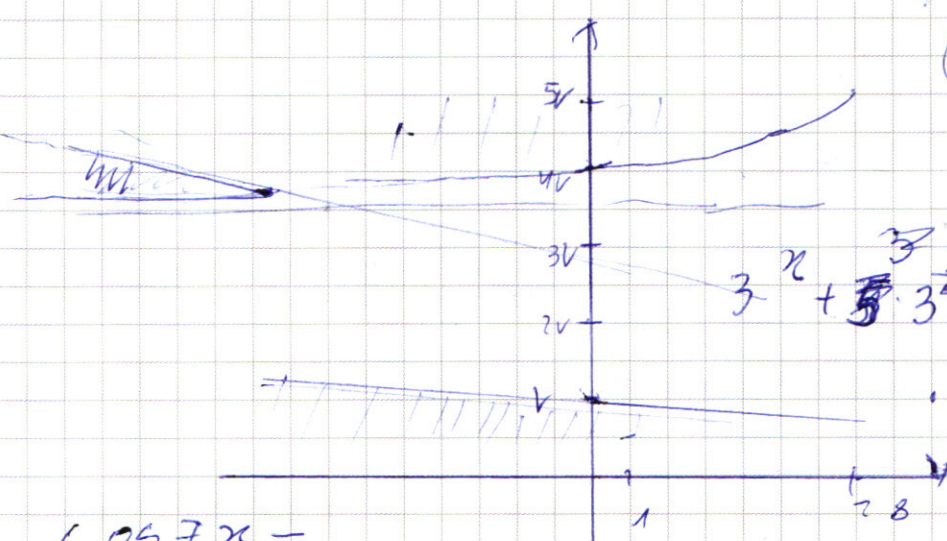
$$15\sqrt{2}$$

$$y > 3^x + 4$$

$$y \leq 93 + 1 - 3x$$



$$3^x + 4 \cdot 3^{2.8} = 93 + 1 - 3 \cdot 2.8$$



$$y > x + 8$$

$$y \leq x + 8$$

$$(43 + 3^{2.8}) - 3x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{2.8}$$

$$3^x + 3 \cdot 3^{2.8} = 93 - 3x$$

$$3^x + 3x = 93$$

$$3 \cdot 3^x$$

$$9 \cdot 13$$

$$(|x| - 2)^2 + (|y| + 3)^2 = 10^2$$

$$\cos 3x - \operatorname{tg} 4x$$

$$\cos 7x =$$

$$(\cos 4x + 3x) =$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x$$

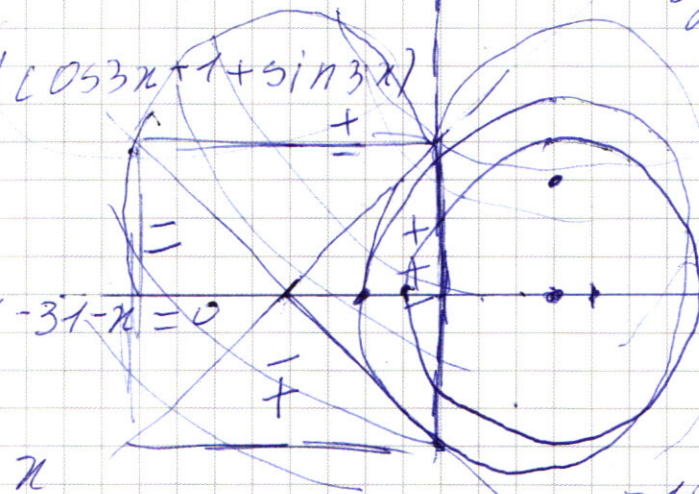
$$\sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x$$

$$\cos 4x (\cos 3x + 1 + \sin 3x)$$

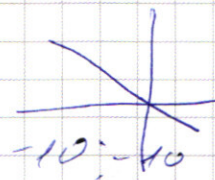
$$(|x| + 3)^2 + y^2 = 4^2$$

$$4^2 - 5^2$$

$$3^{x-1} + 3^x - 3^x - x = 0$$



$$-10 > -30$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N^2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2}\cos^2 2x - \sqrt{2}\sin^2 2x = 0$$

$$\cos 2x (2\cos 5x + \sqrt{2}\cos 2x) - \sin 2x (2\cos 5x - \sqrt{2}\sin 2x) = 0$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$y < 0$$

$$x > 0$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2$$

$$(y+x)^2 -$$

$$y^2 - 3x^2 + 3xy - xy$$

$$y^2 - 12y(2x+4) - 3x(x-4) = 0$$

$$= 3x |x-4|$$

$$y = x-4$$

$$-2x-4$$

$$y = -3x$$

$$2\ln 3 + 2\ln x^3$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(3x^3)}$$

$$\ln 3 + \ln x$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3 + \ln x} = 3x$$

$$3\ln 3 + 5\ln x$$

$$3x^{3\ln 3 + 5\ln x - 6} = 1$$

$$3\ln 3 + 5\ln x - 6 = \log_x \frac{3}{3}$$

$$4\frac{\ln 3}{\ln x} = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$225 + 64 = 289 \quad 64 + 49 + 26 = 65$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x = -\sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = \cos^2 4x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \sin^2 2x = 0$$

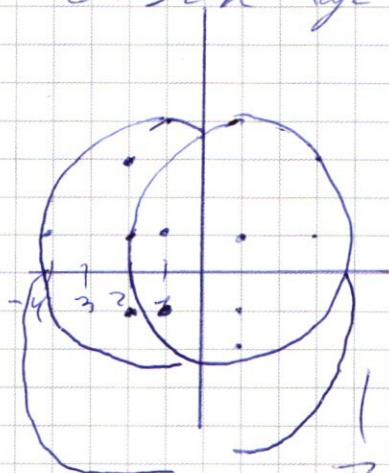
$$2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x + 2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}$$

$$(|x|+1)^2 + (|y|+1)^2 = 3^2$$

$$(2-1)^2 = 3^2$$

$$(|x|-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2$$

$$1^2 = y = 1$$



$$x = 2$$

$$-2^2 y =$$

$$|-2| - 1$$

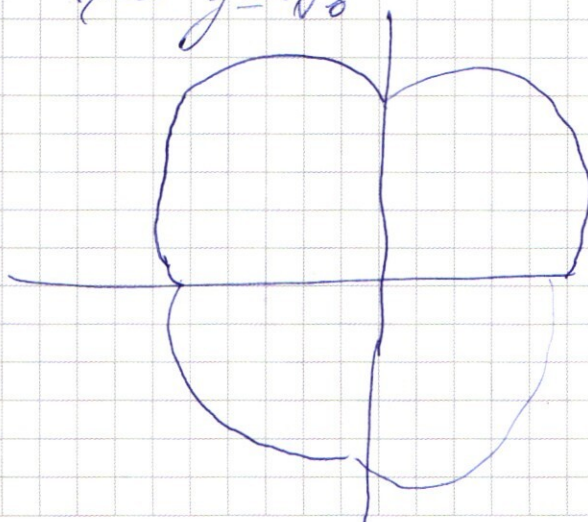
$$2 - 1$$

$$|1|$$

$$x^2 y = \sqrt{8}$$

$$|34 - 16| 50$$

$$18 \cdot 50$$



$$64827 \div 7203 = 9$$

$$256 \div 4 = 64$$

$$2^8$$

51

$$\cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y$$

$$\sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 5x \cos 5x + 2\sqrt{2}\cos^2 x + \sqrt{2}$$

$$2\cos 5x + 2\sin 5x$$

$$\cos 5x \sin 2x + \cos 5x \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

$$\cos 7x + \cos x$$

$$-\sin 8x \quad \cos \frac{\pi}{4} \cos 4x$$

$$\frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 4x - 8x - \frac{\pi}{2})$$

$$\cos 5x \neq \cos 4x \cos x + \sin 4x \sin x$$

$$4x + 4x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$4\cos$$

$$\cos(4x + 3x) = \cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x$$

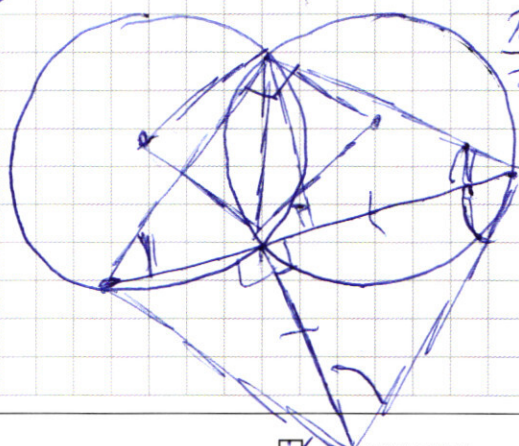
$$+ \cos 3x$$

$$\cos 4x$$

$$\sin(4x + 3x) = \sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x$$

$$- \sin 3x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 17\sqrt{}}$$

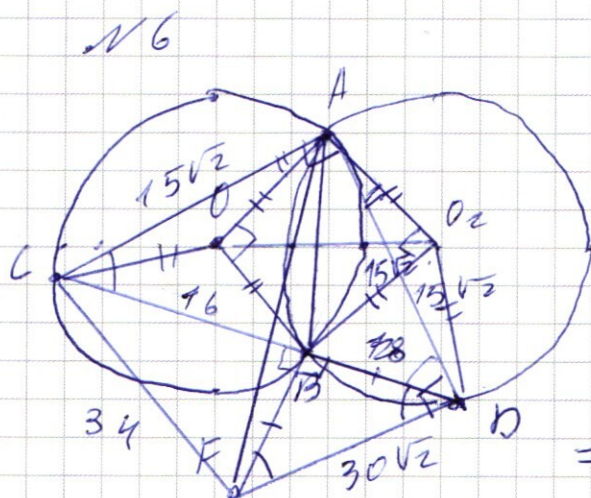


$$\frac{x+y}{2} = 5x$$

$$3x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x \quad 4x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\angle ADB = \angle ACB \text{ т.к.}$$

$\sqrt{AB}$ равна для двух
окружностей

$$\Rightarrow \angle AO_2B = 2\angle ADB =$$

$$= \angle ADB + \angle ACB = 90^\circ$$

$\Rightarrow OAO_2B$ - квадрат

$$\angle CAO = \angle DAO_2 \Rightarrow \angle AO_2D = \angle AOC$$

$$\Rightarrow \angle BO_2D = \alpha \quad \angle AOC = 90 + \alpha \Rightarrow \angle COB = 360 - 180 - \alpha = 180 - \alpha$$

т.к. для $\triangle BO_2D$ ~~т.к.~~

$$BD^2 = 17^2 \cdot 2 - 2 \cdot 17^2 \cos \alpha$$

$$CD^2 = 17^2 \cdot 2 - 2 \cdot 17^2 \cos(\pi - \alpha)$$

$$BD^2 + CD^2 = 4 \cdot 17^2 = CF^2$$

$$CF = 17 \cdot 2 = 34$$

$$256 - 289 \cdot 2 = 2 \cdot 17^2 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{161}{17^2} = -\frac{161}{289}$$

$$FB = BD = \sqrt{50 \cdot 18} = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$$

$$CA = 15\sqrt{2} \quad AF = \sqrt{1800 + 450} = \sqrt{2250} = 15\sqrt{10}$$

$$S_{ACF} = \frac{\sqrt{15\sqrt{10} + 15\sqrt{2} + 34} \left(\frac{15\sqrt{10} + 15\sqrt{2}}{2} - 17 \right) \left(\frac{15\sqrt{10} + 34}{2} - \frac{15\sqrt{2}}{2} \right)}{2 \cdot \left(\frac{15\sqrt{2} + 34}{2} - 15\sqrt{10} \right)}$$

N 2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 2x \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x + \cos \frac{\pi}{4} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \cos \frac{\pi}{4} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos \frac{\pi}{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos \frac{\pi}{3} \cos 4x = 0$$

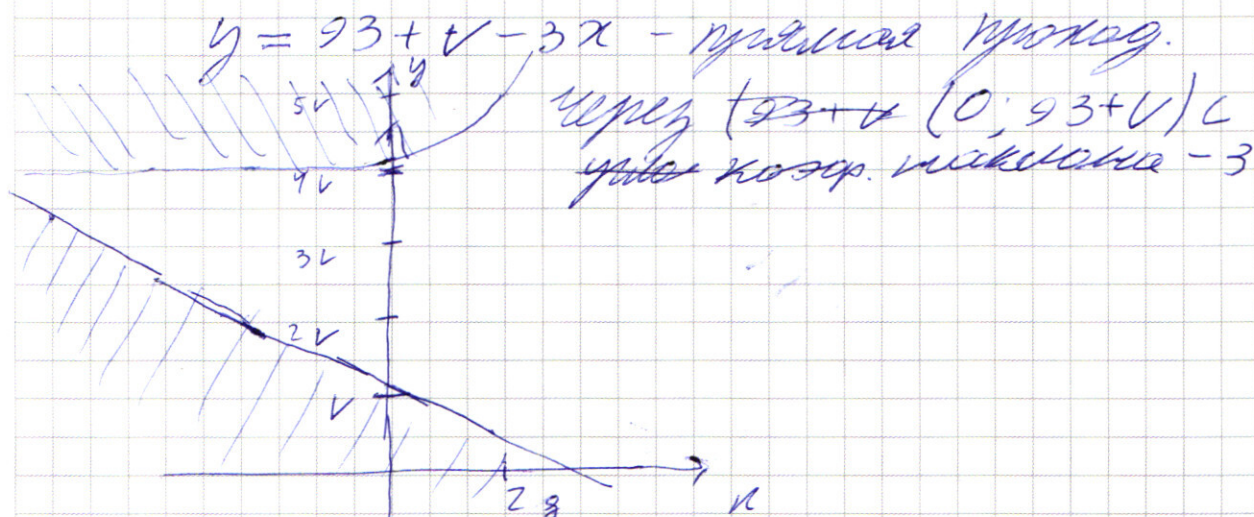
N 7

Пусть $3^{2x} = V$

$$y > 3^x + 4V$$

$$y \leq 93 + V - 3x$$

$y = 3^x + 4V$ - график
 $y = 3^x$ поднимит.
 или $4V$



системе удовлетвор. пересечение дв. линий.
 удовлетв. условию
 задачи достаточно

$$3^x + 4V = 93 + V - 3x$$

$$3^{x-1} + V - 31 + x = 0 - \text{т.к. } x - \text{удовлетворяет}$$

Этому уравнению - 1 б. точный ответ.

Графики $3^x + 4V$ и $93 + V - 3x$, очевидно

по рисунку $3^x + 4V$ - монотонно возр. ф., а график
 $93 + V - 3x$ - мон. убыв. $\Rightarrow$ они пересекут. один раз $\Rightarrow$ 1 корень

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3 + \ln x} = x^{2\ln 3 + 6\ln x}$$

$$\frac{x^{6\ln 3 + 6\ln x}}{x^{4\ln 3 + 6\ln x}} = 3^{\ln 3 + \ln x}$$

$$x^{2\ln 3} =$$

$$(x^2 - 4x)^{\ln(x^2 - 4x)} = x^{2\ln(x^2 - 4x)}$$

$$-x^{4\ln(-y)^7} = x^{2\ln(x^2 y^4)} \cdot y^{\ln(-y)}$$

$$-x^{-y} = -\frac{x^7}{y^2} \cdot x^7$$

$$-x^{4\ln(-y)^7 - 2\ln(x^2 y^4)} = y^{\ln(-y)}$$

$$\frac{\log_a e}{\log_a - a}$$

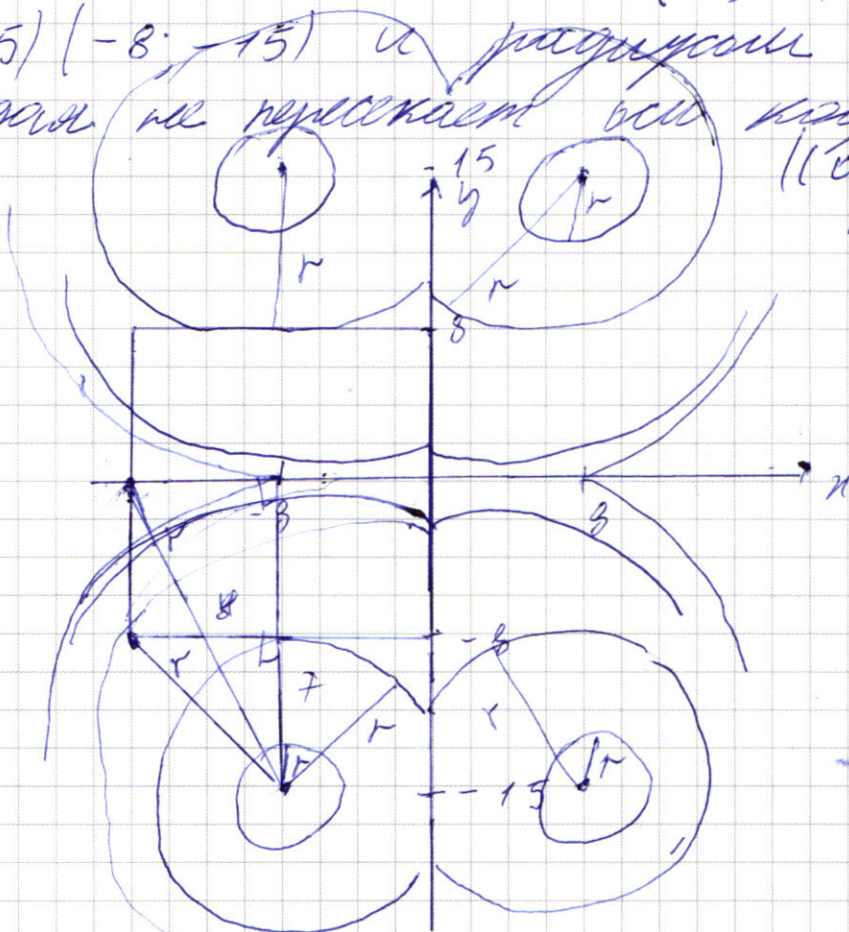
$$\frac{\log_a a}{\log_a a}$$

N 5

I уравнение системы задает квадрат со стороной 16 и центром $(-8; 0)$

II уравнение задает окружности

с центрами в точках $(8; 15)$ $(-8; 15)$ $(8; -15)$ $(-8; -15)$ и радиусом $\sqrt{a}$, причем каждая не пересекает ось координат ($a > 0$), иначе пересечет)



при $r = 7$ будет два решения $\Rightarrow a = 49$

при $r = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{113}}$ будет ~~одно~~ ^{два} решения до

$\pm$ при $r = 15$ будет два решения

до $r = 17 \Rightarrow a \in [225; 289]$

при других a система не будет иметь 2 решения (на рисунке)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64827 | 9 \\ 63 \quad \quad \quad | 7203 | 3 \\ 18 \quad \quad \quad 6 \quad \quad \quad | 2401 | 7 \\ 18 \quad \quad \quad 12 \quad \quad \quad | 343 | \\ 027 \quad 120 \quad 21 \quad \quad \quad 30 \\ 27 \quad \quad \quad 28 \\ 0 \quad \quad \quad 71 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 | 7 \\ 28 \quad 49 \\ 63 \end{array}$$

$$7 \quad 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$
$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 1 & 2 & 4 \\ & & & 9 & 3 & 1 & 7 \end{array}$$

$$9 \cdot 3 \cdot 7$$
$$\frac{\quad}{4}$$

$$\frac{21}{41}$$

$$C^4 = \frac{8!}{4!3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$
$$70$$

$$93171$$

$$24 \cdot 2$$

$$\frac{21!}{2 \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$\begin{array}{l} 1100 \\ 1010 \\ 1001 \\ 0110 \\ 0101 \\ 0011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 140 \\ 6 \\ 840 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 = 6! \\ 6 = \end{array}$$

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 2}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{7}$$

$$SK = \sqrt{48} R \Rightarrow KA_2 \cdot 7R = \sqrt{48} R \cdot R$$

$$KA_2 = \frac{\sqrt{48} R}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{KA_2}{7} SA_2^* = SA_2 = \frac{\sqrt{48} R \cdot \sqrt{48}}{7} = \frac{48}{7} R$$

$$\frac{SA_1'}{SA_2} = \frac{6R \cdot 7}{48R} = \frac{7}{8}$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{9 \cdot 8^2}{49} = \frac{576}{49}$$

Отмб $\arcsin \frac{1}{7}; \frac{576}{49}$

№3

Второе уравнение системы представим как $(y + 3x)(y - x + 4) = 0$, откуда

$$\begin{cases} y = -3x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$y < 0$ т.к. число $\log x > 0$

1) $y = -3x$

$$\left(\frac{x^7}{3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{\ln 8 + x^6}$$

$$x^{\ln 9} = 3^{\ln 3x} \Rightarrow x = 3 \text{ и } y = -9$$

2) $y = x - 4$