

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. разложим 64827 на прот. множители:
 $64827 = 3^3 \cdot 7^4 \Rightarrow$ возможные цифры, которые мы
 можем использовать: 3, 9, 7, 1, причём если мы исп. 9,
 то мы можем брать её 1 раз

1) если не использовать 9 $\Rightarrow$ число должно состоять из
 трёх 3, четырёх 7 и одной 1.

1 мы можем поставить в число 8 способами
 расставить 3 тройки на 7 мест можно $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$
 способами, тогда расставить 7ки на ост. 4 места можно
 будет только одним способом

итого: $8 \cdot 35 = 280$ способов

2) если вместо всех троек исп. 9 и ~~одну~~ 3:
 придётся использовать две 1

их можно расставить $C_8^2 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$ способами

расставить 9 на 6 мест можно 6 спое.

и расставить 3 на 5 мест можно 5 спое.

оставшиеся 7ки расставл. единств. спое.

$\Rightarrow$ всего $28 \cdot 6 \cdot 5 = 840$ сп.

итого: $840 + 280 = 1120$ чисел

Ответ: 1120 чисел.

$$\sqrt{2} \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cos 2x + \sqrt{2} (\cos 5x \cdot \sin 2x + \sin 5x \cos 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x)(\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = -\sin 2x \quad | : -\cos 2x \\ \sqrt{2} \cos 5x = -(\cos 2x - \sin 2x) \end{cases} \quad \begin{cases} \tan 2x = -1 \\ \sqrt{2} \cos 5x = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + 2x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 5x = \frac{\pi}{4} + 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

N4 Dano
SABC = 9

SDEF = 16

O - w. op. w

OK ⊥ SD

OM ⊥ SF

OL ⊥ SE

∠KSO = ?

S_ΔKLM = ?

Решение:

$$\begin{cases} (ABC) \perp SO = H_2 \\ (DEF) \perp SO = H_1 \end{cases} \Leftrightarrow (ABC) \parallel (DEF) \Leftrightarrow$$

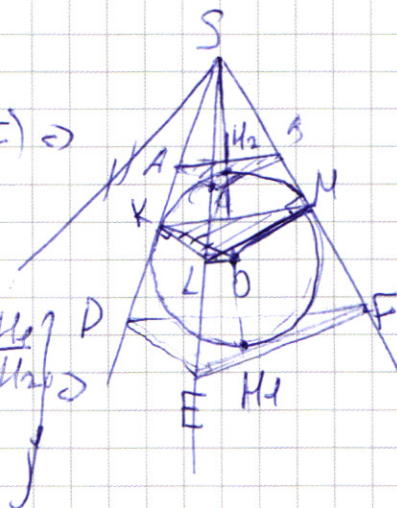
$$\Rightarrow S_{ABC} \sim S_{DEF} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = k^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow k = \frac{4}{3} = \frac{SH_1}{SH_2}$$

$$H_1 H_2 = 2R$$

$$SH_1 = SH_2 + H_1 H_2$$

$$1 + \frac{2R}{SH_2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{R}{SH_2} = \frac{1}{6} \Rightarrow SH_2 = 6R \Rightarrow SO = 7R$$



$$2) OH_2 = R$$

$$OK = R, OK \perp SK \Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7} \Rightarrow$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$3) \Delta KSO \sim \Delta MSO \sim \Delta LSO \text{ (по кат. и гипотен.)} \Rightarrow \angle KSO = \angle MSO = \angle LSO,$$

$$SK = SL = SM = \sqrt{49R^2 - R^2} = \sqrt{48}R = 4\sqrt{3}R \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$4) \cos \angle KSO = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) п/ш $\triangle KML$: $SH = KS \cdot \cos KSO = \frac{4\sqrt{3}R \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{48R}{2} = 24R$

$SKML \sim \triangle ABL \Rightarrow \frac{SKML}{\triangle ABL} = \frac{SH^2}{SL^2} = \frac{48^2 R^2}{49 \cdot 36 R^2} = \frac{38 \cdot 64}{49 \cdot 36} = \frac{64}{49}$

$\Rightarrow SKML = \frac{64}{49} \cdot 9 = 11 \frac{37}{49}$

Ответ: $\angle KSO = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
 $SKML = 11 \frac{37}{49}$

15. $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$ - квадрат со ст. 16, центр. кот. лежит в $(-8; 0)$

$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$ - окружн. с $R=5a$ и ц. в т. $(8; 15)$, отражённая отн. Ox и Oy (4 окр-ти с $R=5a$)

~~так как~~ исходя из графиков видно, что сист. имеет 2 реш-я в двух случаях:

1) окр-ти с ц. O_1 и O_2 касаются квадрата
в этом случае их радиусы равны: $15-8=7 \Rightarrow a=49$
первое касание окр-ой O_2 и квадрата произойдёт в центре
 $a = (15-8)^2 + 8^2 = 113 > 49$

2) окр-ти O_2 и O_4 касаются дальних углов квадрата с коорд. $(-16; 8)$ и $(-16; -8) \Rightarrow$
 $a = R^2 = (15+8)^2 + (16+8)^2 = 1105$
т.к. последний р-з окр-ой O_4 и O_2 пересек. с квад.

при $a = 8^2 + (8+15)^2 = 64 + 23^2 < 1105$, то при $a \leq 1105$ сист. имеет 2 решения

Ответ: $\begin{cases} a=49 \\ a=1105 \end{cases}$

N7. $\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{23} \\ y \leq 93 + 3(3^{27}-1)x \end{cases}$ чтобы сист. имела решение для x должно выполнят.:

$$3^x + 4 \cdot 3^{23} < 93 + 3(3^{27}-1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{23} < 3^4 + 4 \cdot 3 + \cancel{3^{23}} \cdot (3^{27}-3)x$$

$$4(3^{27}-3) + 3^x < 3^4 + (3^{27}-3)x$$

$$(3^{27}-3)(x-4) > 3^4(3^{x-4}-1)$$

$$\cancel{3}(3^{27}-1)(x-4) > 3^4(3^{x-4}-1) \quad x-4 = t$$

$$(3^{27}-1) \cdot t > 27(3^t-1)$$

пер-во выполн. для $t < 27 \Rightarrow x-4 < 27$

$$x < 31$$

для каждого x мы получаем $93 + 3(3^{27}-1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{23}$ значений $y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{всего пар: } 93 \cdot 3 + 3(3^{27}-1)(30+\dots+1) - 3^{30}-3^{29}-\dots-3 - 4 \cdot 3^{23} \cdot 30 =$$

$$= 93 \cdot 3 + (3^{28}-3) \cdot 31 \cdot 15 - \frac{15(3^{29}+3)}{2} - 4 \cdot 3^{23} \cdot 30 =$$

$$= \cancel{31 \cdot 3(3+5)} 31 \cdot 3(3+5 \cdot 3^{28}-15) - 15 \cdot 3^{28}(\frac{3}{2} - \cancel{1608}) -$$

$$- \frac{45}{2} = 31 \cdot 9(5 \cdot 3^{27}-4) - 15(\frac{3^{29}-16 \cdot 3^{28}-3}{2}) =$$

$$= 279(5 \cdot 3^{27}-4) - 7,5 \cdot 3(3^{28}-16 \cdot 3^{27}-1)$$

Ответ: $279(5 \cdot 3^{27}-4) - 7,5 \cdot 3(3^{28}-16 \cdot 3^{27}-1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 + 4 \cdot 3^{28} < y < 93 +$$

$$3^{30} + 4 \cdot 3^{28} \vee 93 + 3^{28} \cdot 30 - 90$$

$$3^{28} (3^3 + 4) \vee 3^{28} \cdot 31$$

$$931 = 31$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ \times 3 \\ \hline 279 \\ 2 \\ \hline 29 \\ \hline 87 \end{array}$$

$$3^{30} + 4 \cdot 3^{28} \vee 90 + 3^{28} \cdot 30 \quad 3^{30} - 90 \vee 3^{28} \cdot 26$$

$$3^{28} (13) \vee 90 + 30 (3^{28} + 3) \quad 3^{28} (9 - 26) \vee 90$$

$$3 + 3^{28} \cdot 30 - 90 - 3^{30} - 4 \cdot 3^{28} = 3^{28} (30 - 9 - 4) + 3 =$$

$$= 3^{28} \cdot 17 + 3 \quad x < 30$$

$$93 + 3^{28} \cdot 29 - 87 - 3^{28} - 4 \cdot 3^{28} = 3^{28} (29 - 3 - 4) + 6$$

$$3^{28} \cdot 22 + 6 \quad x < 29$$

$$93 \cdot 30 + 3 (3^{27} - 1) (30 + 29 + \dots + 1) - 3^{30} - 3^{29} - \dots - 4 \cdot 3^{28} \cdot 30 -$$

$$b_1 = 3$$

$$q = 3$$

$$b_1 \quad b_1 (1 - q^{29})$$

$$b_2 = b_1 q$$

$$b_3 = b_1 \cdot q^2$$

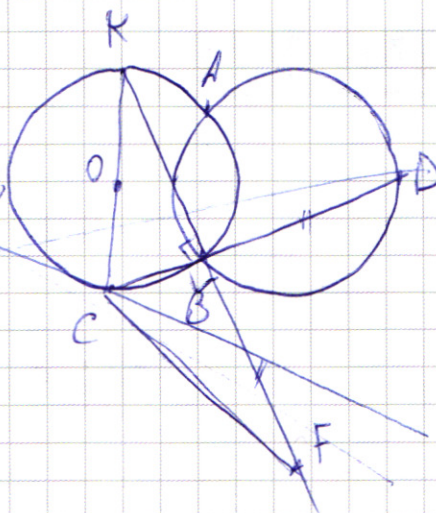
$$\begin{array}{r} 3^{30} + 3^{28} \cdot 26 \\ \hline 15 \end{array}$$

N6. A-17 Period:

Penet:

CF-?

$\angle KBE = 90^\circ \Rightarrow KC$ - диаметр

$$KC = 34$$


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$682 \quad 64827 \mid 9$
 -63
 18
 $205 \times 2052x = \frac{18}{02} - \frac{12}{12}$
 $= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$
 $64827 = 3^3 \cdot 7^4$
 $\cos 30^\circ + \cos 90^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{0}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos 2x + \cos 2x = 2$
 $\cos 5x + \cos 3x = 2 \cos 4x$
 $\cos(5x+2x) = \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x$
 $\cos(5x-2x) = \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x$
 $2 \cos 5x \cos 2x$
 $\sqrt{2} \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$
 $2 \sin 5x \cdot \sin 2x =$
 $\sin 7x = \sin(5x+2x) = \sin 5x \cos 2x + \cos 5x \sin 2x$
 $\sin 3x = \sin(5x-2x) = \sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x$
 $2 \sin 5x \cos 2x$
 $2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \cos^2 2x - \sqrt{2} \sin^2 2x = 0$
 $2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x + \sin^2 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$
 $(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$
 $\cos 2x + \sin 2x = 0$
 $\sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$
 $\sqrt{2} \cos 5x = \sqrt{2} (\sin 2x - \cos 2x)$
 $\cos 5x = \sin 2x - \cos 2x$
 $\cos 5x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$
 $5x = \frac{\pi}{2} - 2x$
 $7x = \frac{\pi}{2}$
 $x = \frac{\pi}{14}$

$$\begin{aligned} xy^2 > 0 \\ x > 0 \\ y < 0 \end{aligned} \quad \left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} = (x^{\frac{1}{y}} \cdot (-y)^{\frac{1}{y}})^{\ln(-y)} = x^{\frac{1}{y} \ln(-y)} \cdot (-y)^{\frac{1}{y} \ln(-y)} = \frac{x^{\frac{1}{y} \ln(-y)}}{-y^{\frac{1}{y} \ln(-y)}}$$

$$\begin{aligned} x^{2 \ln(xy^2)} &= x^{2 \ln x + 4 \ln y} = x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln y} \\ \frac{x^{2 \ln y}}{-y^{\ln y}} &= x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln y} \end{aligned}$$

$$y^2 + 2xy - 4x^2 + x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(x+y)^2 - 4(x^2 - 3x + y) = 0$$

$$(x+y)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{SO}{OM} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{SO}{KO} = \frac{7}{1} = 7$$

$$\frac{KO}{JO} = \frac{1}{7} = \tan \angle KSO \Rightarrow$$

$$\angle KSO = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) \Rightarrow 6R = \frac{SH_2}{8} \Rightarrow$$

$$KS = LS = SM = \sqrt{49R^2 - R^2} = 4\sqrt{3}R$$

$$\cos \angle KSO = \cos \angle KSL = \frac{SH}{KS} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\cos \angle KSO = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

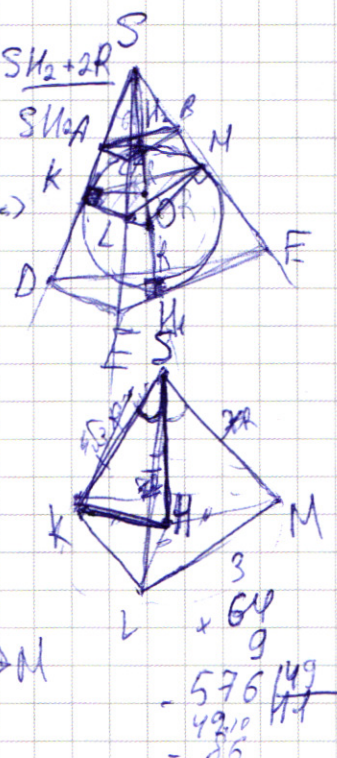
$$\begin{aligned} SH &= \frac{4\sqrt{3}R \cdot 4\sqrt{3}}{7} = K \\ &= \frac{48}{7}R = 6\frac{6}{7}R \end{aligned}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle KLM}} = \frac{36 \cdot 7^2}{48^2} = \frac{36 \cdot 7^2}{36 \cdot 64} = \frac{49}{64} \Rightarrow S_{\triangle KLM} = \frac{64 \cdot 9}{49} = 11\frac{37}{49}$$

$$3^{26} + 4 \cdot 3^{28}$$

$$\leq y \leq 3^3 + 3^{26} + 4 \cdot 3^{28} \Rightarrow 3 + 3(3^{27} - 1) \cdot 26$$

$$y =$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5. $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$
 $(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 0$
 $|x|=8 \Rightarrow x=\pm 8$
 $|y|=15 \Rightarrow y=\pm 15$
 $|x+8+y| + |x-8-y| = 16$
 $|8+y| + |-8-y| = 16$
 $|y+8| + |y-8| = 16$
 $y \geq 8 \Rightarrow y+8+y-8=16 \Rightarrow 2y=16 \Rightarrow y=8$
 $y \leq -8 \Rightarrow -y-8-y+8=16 \Rightarrow -2y=16 \Rightarrow y=-8$
 $-8 < y < 8 \Rightarrow y+8-y-8=16 \Rightarrow 0=16$ (no solution)
 $x=\pm 4$
 $16 + (|y|-15)^2 = 20$
 $(|y|-15)^2 = 4 \Rightarrow |y|-15 = \pm 2 \Rightarrow |y| = 17$
 $y = \pm 17$
 $\sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17 = R$
 $\sqrt{24^2+23^2} = \sqrt{1105} = R$
 $R_2 = 1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$

N6.
 $\angle CFB = 30^\circ = \angle CKB$
 $\angle CBM = 90 - x + y$
 $\angle KCB = 90 - \angle CKB = 90 - \angle CAB$
 $\angle ADB = \angle ABB = 90 - \angle ACB$
 $\angle BKD \sim \angle CAD \Rightarrow \frac{KB}{CA} = \frac{KD}{CD} = \frac{BD}{AD}$
 $\angle ABD = \angle CKA$
 $\angle KCD \sim \angle BAD \Rightarrow \frac{KD}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{CA}{AD} = \frac{CB}{CA}$
 $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$
 $\frac{KD}{BD} = \frac{KM}{MA} = \frac{CN}{MB} = \frac{3V}{AB}$
 $\angle KMA \sim \angle KBD \Rightarrow \frac{KA}{KB} = \frac{KM}{KD} = \frac{AN}{BD} = \frac{MN}{BF}$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3^{28}x - 3x \end{cases}$$

$$-93 \mid 37$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 3 \cdot 31 - 3x + 3^{28}x$$

$$3 < \log_3 31 \cdot 4 < 4$$

$$-24 < \log_3 31 - 27 < -23$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} - 3^{28}x - 93 + 3x \leq 0$$

$$\frac{1}{x^{23}} < \frac{1}{x^{23}} - \frac{64827}{63} - \frac{19203}{120}$$

$$3^{28}(4-x) + 3^x - 93 + 3x < 0$$

$$\log_3 3^{28}(4-x) + \log_3 3^x - \log_3 3 \cdot 31 - \log_3 3 \cdot x < 0$$

$$28 + \log_3(4-x) + \log_3 x - 1 - \log_3 31 - 1 - \log_3 x < 0$$

$$27 + \frac{\log_3 4}{\log_3 x} - \log_3 31 \cdot 4 < 0$$

$$27 + \log_3 4 < \log_3 31 - 27$$

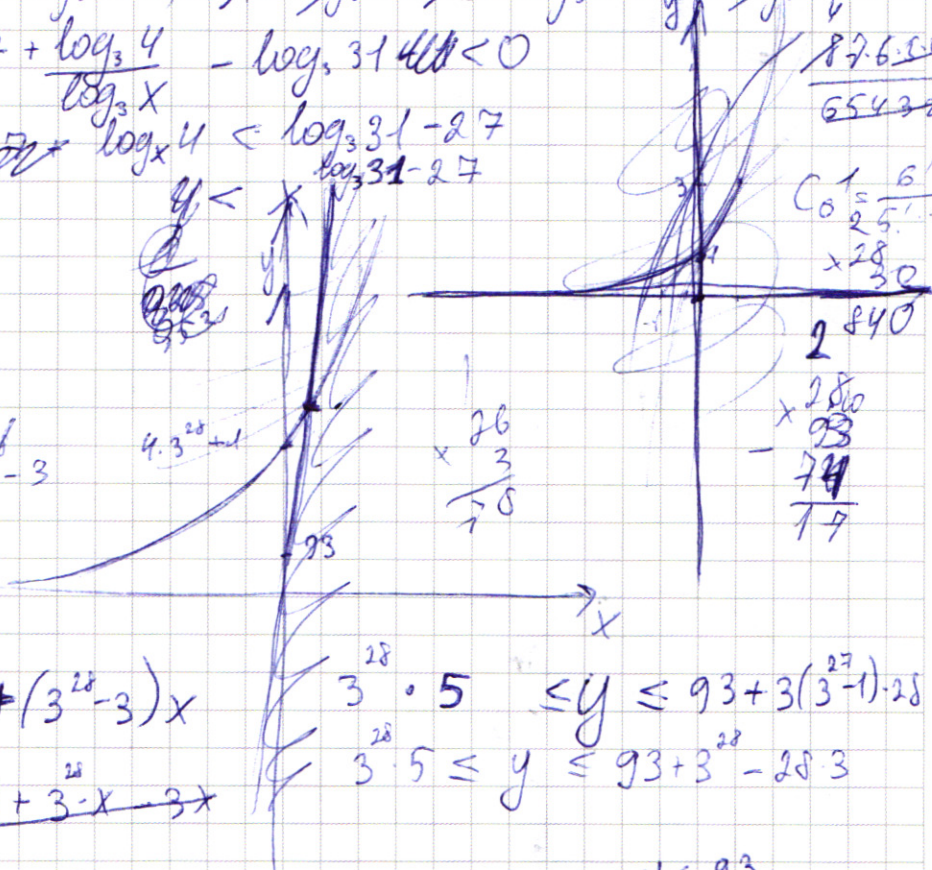
$$y \leq 93 + (3^{28} - 3)x$$

$$y > 3 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3^{28} - 3$$

$$3 + 3^{28} < 93 + 3^{28} - 3$$

$$1 + 3^{28} < 30$$



$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 3^{28} + (3^{28} - 3)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 3^4 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^{28} \cdot 5 \leq y \leq 93 + 3(3^{27} - 1) \cdot 28$$

$$3^{28} \cdot 5 \leq y \leq 93 + 3^{28} - 28 \cdot 3$$

$$3^x + 4(3^{28} - 3) < 3^4 + (3^{28} - 3)x$$

$$x \neq 4 \quad y \in 93$$

$$3(3^{27} - 1)(x - 4) > 3^4 - 3^4 + 3(3^{27} - 1)$$

$$\log_3(3^{27} - 1) + \log_3(x - 4) > \log_3 3^3 + \log_3(3^{27} - 1)$$

$$27(3^{27} - 1) > 27(3^3 - 1)$$

$$(3^{27} - 1)t - 3^{26} + 3 > 0$$

$$26 \cdot 3^{24} - 26 \cdot 3^{26} - 27 \cdot 3^{26} - 27$$

$$1 \geq 3^{26}(27 - 26 \cdot 3)$$

при $t = 27$ правая часть = левой

$$x \leq 27$$

$$t = 27 \quad x \leq 31$$

$$310$$