

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten work on grid paper showing various mathematical calculations and diagrams.

Top Left: $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_8$

Top Center: $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_8 = 64827 = 3^3 \cdot 7^4$

Top Right: $3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{30}$
 $3^{31} - 1 = 2(3^{30} + 3^{29} + \dots + 3 + 1)$
 $3^4 - 1 = 2 \cdot (3^3 + \dots + 1)$
 $\frac{1}{2}(3^{31} - 3^4)$
 $(3^{27} - 1) \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{2}$
 $3^4 = 81$

Left Column Calculations:

$$\begin{array}{r} 325 \\ \times 2 \\ \hline 650 \\ \text{...} \\ 650 \\ \hline 81 \\ \hline 569 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 4 \\ \hline 104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 481 \\ - 26 \\ \hline 455 \\ \text{...} \\ 481 \\ \hline 104 \\ \hline 377 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 49} \\ - 28 \\ \hline 63 \\ - 63 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 496 \\ - 15 \\ \hline 481 \end{array}$$

Center Column Calculations:

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 4 \\ \underline{3} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21609 \overline{) 3} \\ \underline{21} \\ 6 \\ \underline{6} \\ 09 \\ \underline{09} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 2} \\ \underline{21} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 03 \\ \underline{03} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 2} \\ \underline{21} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

Right Column Calculations:

$$\begin{array}{r} 374 \\ \times 2 \\ \hline 748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 457 \\ - 81 \\ \hline 376 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 638 - 3 \cdot 4 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 502 \\ - 481 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 31 \\ \hline 26 \\ 78 \\ \hline 806 \end{array}$$

Diagrams:

 $3 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 3$
 $4,5$
 $2,3 \cdot 1,4 = 2,5$
 $93 = 3 \cdot 31$

Equations:
 $49 = 7^2$
 $x_1 = 3^4 \cdot 2^6 = 1$
 $\begin{cases} x > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^7 - 1)x \end{cases}$

№2

~~scribbles~~

$$\sin \frac{2\pi}{2} \cos \frac{2\pi}{2} + \cos \cdot \sin$$

$$\cos x = \cos \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} \right) =$$

$$= \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma + \delta}{2} - \sin \cdot \sin$$

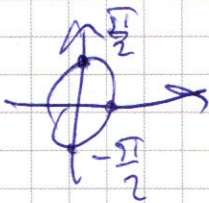
$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 5x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$= 2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \cos 5x \cdot \sin 2x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

↓

$$2 \cos^2 x - 1 \quad 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos^2 2x - \sqrt{2} \sin^2 2x = 0$$



$$\sqrt{2} (\cos^2 2x + \sin^2 2x) (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$(2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

↓

$$\begin{cases} \cos 2x = -1 \\ 4 \cos \left(\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = -\sin 2x & \left(\begin{smallmatrix} \text{b-ke pen.} \\ \text{b-ke pen.} \end{smallmatrix} \right) \\ \cos 5x \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

№3

$$\left(1 - \frac{x^2}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} = x^{2(\ln x + 2 \ln y)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\begin{matrix} b=4 \\ c=6 \end{matrix}$$

$$(x+a)(y+b) =$$

$$= 2xy + ax + by + ab$$

27

$$\begin{aligned} -3(x^2 - 4x + 4) + 12 \\ -3(x-2)^2 + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \\ -1 \end{cases}$$

$$(x-y-4)(-3x-y) = 0$$

$$d = -3$$

$$\begin{matrix} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \\ d=-3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} ad = -3 \\ be = 1 \\ bd + ae = 2 \\ cd = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{d} \\ b = \frac{1}{e} \\ \frac{d}{e} - \frac{3}{3d} = 2 \end{cases}$$

$$(x+by+c)(x+ey)$$

$$= adx^2 + x^2 \cdot (be) + xy(bd+ae) + (cx+cy)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} y < 0, y \in (-4; 0) \\ x > 0, x \in (4; 0) \\ (-\frac{y+4}{4})^{\ln(x-y)} = (x+4)^{2 \ln(x+y)} \cdot (y+4)^{4 \ln y} \\ x = y+4 \quad (y = x-4) \end{cases}$

2) $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ (\frac{x}{3})^{\ln 3x} = x^{2 \ln 3x^3} \\ y = -3x \end{cases}$

$$\left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2 \ln(x)} \cdot x^{4 \ln(x-4)} \cdot x^{6 \ln 3x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{2 \ln 3x^3}$$

$$7 \ln x \cdot \ln(4-x) - \ln^2(4-x) = \ln x (2 \ln x + 4 \ln(x-4)) \cdot x^{(6 \ln x + 6 \ln 3 - 4 \ln 3 - 6 \ln x)}$$

$$7 \ln x \cdot \ln(4-x) - \ln^2(4-x) = 2 \ln^2 x + 4 \ln x \cdot \ln(x-4)$$

$$2 \ln^2 x + \ln^2(4-x) - 3 \ln x \cdot \ln(4-x) = 0$$

$$(\ln x - \ln(4-x)) (2 \ln x - \ln(4-x)) = 0$$

$$\begin{cases} \ln x = \ln(4-x) \Rightarrow x = 2 \\ x^2 = 4-x \end{cases}$$

$$x^2 + x - 4 = 0 \quad (x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2})$$

$$3^{28} = 3 \cdot (3^{27}) = 3 \cdot (3^4 - 1)^{13}$$

$$3^{27} - 1 = 0$$

$$y > 3 + 4(3a+3)$$

$$y \leq 3 \cdot (31+ax)$$

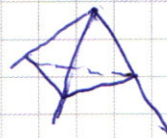
$$3^x + 4(3a+3) \leq 3 \cdot (31+ax)$$

$$3^x - 12a - 12 = 3^x + 9a \Rightarrow 4 \cdot 3^{28} - 31 = (3^4 - 1) \cdot 3^x$$



$$(1) \angle KSO$$

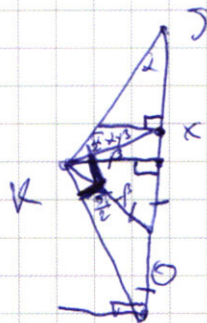
$$S(\text{ок.})$$



$$S_1 = 9$$

$$S_2 = 16$$

$$k = \frac{3}{4}$$



$$\frac{Sx + 2R}{Sx} = \frac{4}{3}$$

$$S_1(S_{\text{ок.}}) = Sx : Sx$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2R}{Sx} \Rightarrow Sx = 6R$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 159 \\ 460 \\ \hline 529 \end{array}$$

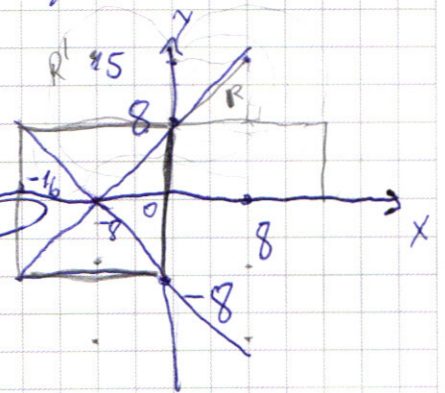
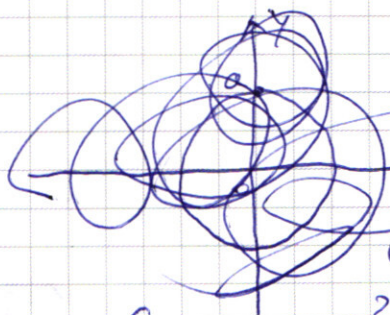
$$\begin{array}{r} 196 \\ + 48 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 57 \\ \hline 1105 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1105 : \\ = 5.221 = \\ = 5.1213 \end{array}$$

$$\begin{cases} |x+y+8| + |k-y+8| = 16 \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+8 > -y & \Rightarrow 2x+16=16 \Rightarrow x=0 \quad (y < 8, y > -8) \\ x+8 > y & \Rightarrow \begin{cases} y \geq 8 \\ y = -8 \end{cases} \\ x+8 < -y & \Rightarrow 2 \text{ рел.} \\ x+8 < y & \end{aligned}$$



$$a \in \{7, \sqrt{1105}\}$$

$$(8, 15)$$

$$(-16, -8)$$

$$\sqrt{29^2 + 23^2} =$$

$$2 \sqrt{1105} \approx 3.20$$

$$\sqrt{23^2 + 16^2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \cos 5x \cdot \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$\Rightarrow$

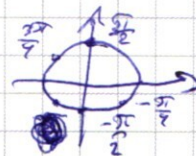
$$\begin{cases} \cos 2x + \sin 2x = 0 & (1) \\ 2 \cos 5x + 2 \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (1) $\cos 2x = 0$ - не находим

$$\begin{cases} \tan 2x = -1 \\ \cos(\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = -\frac{\pi}{24} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{6\pi}{56} + \frac{2\pi k}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



Ответ: $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = -\frac{\pi}{24} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{6\pi}{56} + \frac{2\pi k}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

N3

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y \geq 0 \\ \Rightarrow (x > 0, y \neq 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 - \\ -(x-y-4)(3x+y) = 0 \end{cases}$$

①

Обз $x > 0, x < 4, y > -4$

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ \left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2 \ln x + 4 \ln(4-x)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \\ &7 \ln x (\ln(4-x) - \ln^2(4-x)) = \\ &= 2 \ln^2 x + 4 \ln(x-4) \ln x \\ &\Rightarrow \\ &(\ln x - \ln(4-x)) (2 \ln x - \ln(4-x)) = 0 \\ &\Rightarrow \\ &\begin{cases} x = 4 - x \\ x^2 = 4 - x \end{cases} \\ &\Rightarrow \\ &\begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = -2 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

②

Обз $x > 0, y \leq 0$

$$\begin{cases} y = -3x \\ \left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{2 \ln 9x^3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \\ &\ln x \cdot 2 \ln 3 = \ln 3 \cdot \ln 3x \\ &\Rightarrow \\ &\ln x = \ln 3 \\ &\Rightarrow \\ &x = 3 \\ &\Rightarrow \\ &y = -9 \end{aligned}$$

Ответ: $\{(3, -9), (2, -2), \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}\right)\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

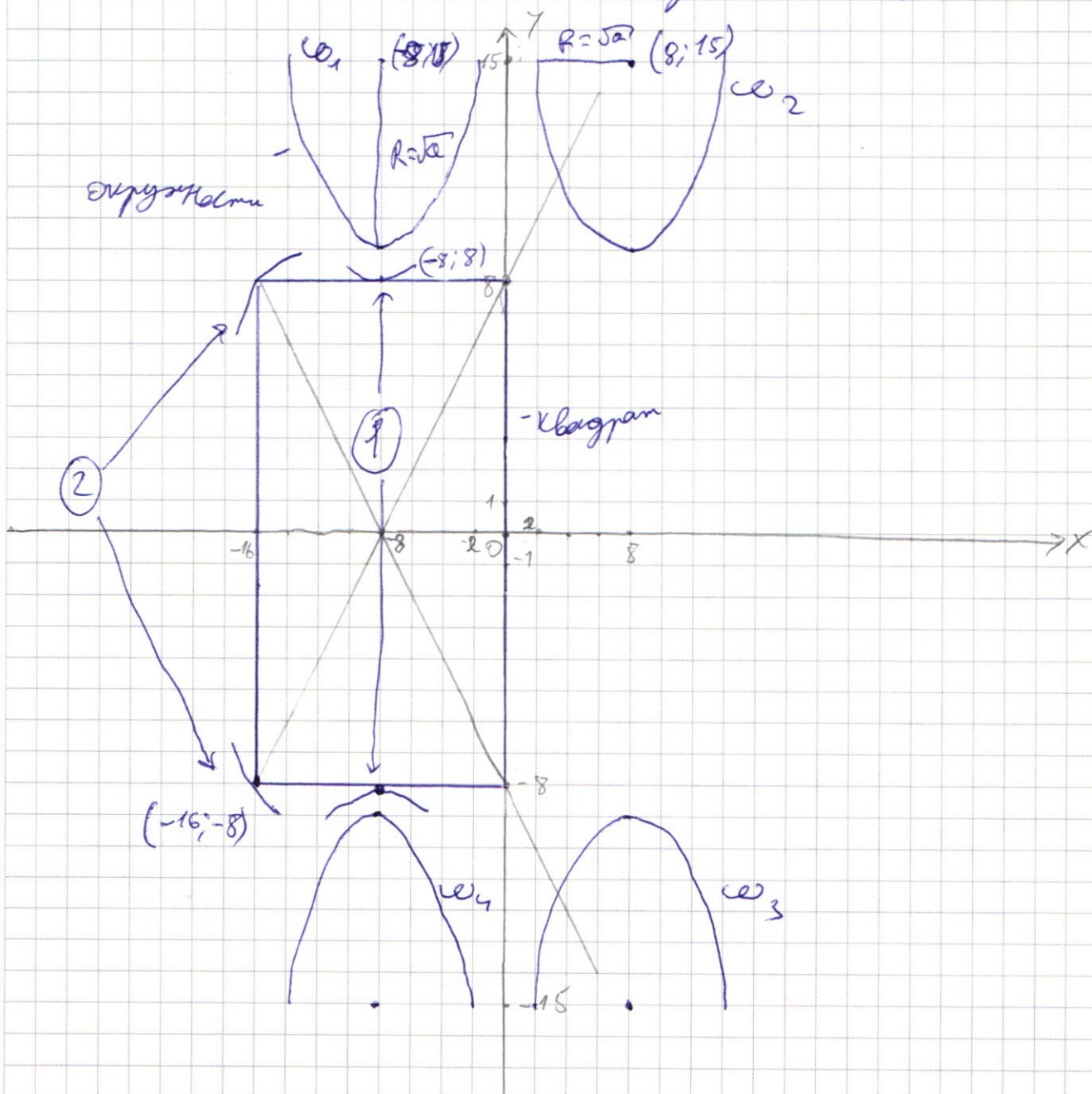
N5

квадрат со стороной 16

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+8 > -y \Rightarrow x=0 \\ x+8 > y \\ x+8 < -y \Rightarrow y=8 \\ x+8 < y \\ x+8 < -y \Rightarrow x=-16 \end{cases}$$

окружность радиуса $\sqrt{a}$

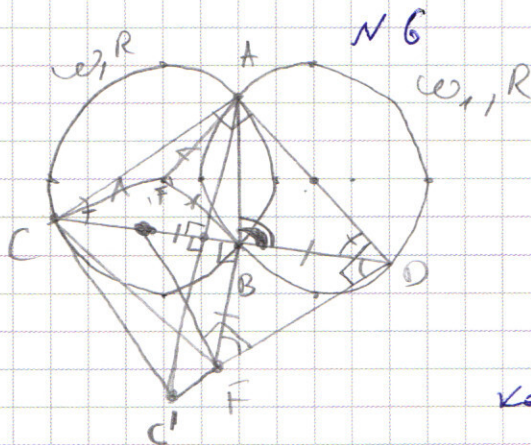


2 точки касания могут быть в
(в силу симметрии точек касания всегда чётное число)
2-х случаях: 1) ω_1 и ω_2 касаются квадрата
и 2) ω_2 и ω_3 проходят через дальние углы
квадрата. В остальных случаях окружности
либо не имеют общих точек, либо
пересекаются $\geq$ в 4-х точках.

$$1) R = 15 - 8 = 7 \Rightarrow \sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 49$$

$$2) R = \sqrt{24^2 + 23^2} = \sqrt{1105} \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{1105} \Rightarrow a = 1105$$

Ответ: $\{49; 1105\}$



Заметим:
 $\triangle ADB$ отрезается на FB ,
как и угол $\angle CB$.

т.к. окружности ω_1 и ω_2
имеют равные радиусы,
то $\angle ADB = \angle ACB = 45^\circ$, т.к. $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow AC = AD$
т.к. $BD = BF$, $\angle DBF = 90^\circ$, то $\angle BDF = 45^\circ = \angle BFD \Rightarrow \angle ADF = 90^\circ$
 $\triangle DC' = A(=) \triangle DC'$ - квадрат. т.к. $\triangle ADFC$ - прямоугол.
трапеция. ~~$FD = 2R$~~ $FR = \sqrt{2} BD$

$$CF = \sqrt{BD^2 + (CD - BD)^2} = \sqrt{2BD^2 + 2BD \cdot CD + CD^2} = 14$$

Ответ: 14

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} = B \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x = A \end{cases}$$

$$93 + 3(3^{27} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{28} \geq 0$$

⇓

$$31 + 3^{27}(x - 4) - x - 3^{x-1} \geq 0$$

верно при целых x :

$$x \in [5; 31]$$

при этом при x - целых, A и B - целые

Тогда если $f(x) = B(x) - g(x)$, то для $x \in [5; 31]$ целых
 y , удовлетворяющих системе

~~$$y = 3^x + 4 \cdot 3^{28} - 93 - 3(3^{27} - 1)x$$~~

$\{n$ - число пер

$$n = \sum_{k=5}^{31} g(x) = 26 \cdot 31 + 3^{27} \left(\frac{31 \cdot 32}{2} - \frac{5 \cdot 6}{2} - 26 \cdot 4 \right) - \frac{31 \cdot 32}{2} + \frac{5 \cdot 6}{2} - \sum_{k=5}^{31} 3^{k-1}$$

$$n = 26 \cdot 31 + 3^{27} (377) - 481 - \frac{1}{2} (3^{31} - 3^4 + 1) = 325 - 377 \cdot 3^{27} - \frac{1}{2} \cdot 3^4 (3^{28} - 1)$$

отсюда: ~~$3^{27} \cdot 377 - 3^{27} \cdot 377 + 3^{27} \cdot 377 - 3^{27} \cdot 377$~~ $\frac{569}{2} + \frac{673}{2} \cdot 3^{27}$

№ 1

$$648272 = 3^3 \cdot 7^4 \cdot 1 = x_1 \cdot \dots \cdot x_8$$

$x_1 \dots x_8$ - число

$\exists n$ - какое число



$n =$ ~~scribble~~

$$C_8^1 + C_8^2 + \dots + C_8^8 =$$

$$= \frac{8!}{1!} + \frac{8!}{2!} + \frac{8!}{3!} + \dots + \frac{8!}{8!}$$

ответ: $\rightarrow$