

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

 N^1

таким образом $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$, где
 $x_1 \in [1, 9]$; $x_{2-9} \in [0, 9]$, все $x_i \in \mathbb{N}$;

$$u \prod_{i=1}^8 (x_i) = 54822$$

$54827 = 3^4 \cdot 7^4$, но лишь, получается, что
 4 ~~конечно~~ ~~такого~~ ~~числа~~ 4 цифры - тройки; а еще
 4 цифры - 7
 т.е., ~~имеет~~ ~~представление~~ ~~4~~ способ ~~представления~~
 цифры в таком числе C_8 , т.к. нам
 достаточно выбрать 4 позиции для
 3, а остальные автоматически станут
 позициями для 7; способ $= \frac{8!}{4! \cdot 4!} =$
 $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70 \rightarrow \text{ответ.}$

№ 2 (продолжение)

№ 21 продолжение/
предположить x_0 $f(x) \geq 0$ для x_0 ;
т.е. x может быть любой число
показ что до x_0

мандрей впервой корень.
 $f(31) = 0$, следовательно, нам подогнали
 представление $[5; 30]$, см. стр. 2.

т.к. $y_0 = x_0 = f(x) \searrow$, после ~~того~~ ^{на} ^(3 показало, что, с введением производной)
 каждому из этих промежутков максимум один корень,
 корни обр. промежутков. Я найден,
 най. попутно много промежутков
 между корнями.

Дело за малым, для каждого приведенного
 арг. x найдем сев. y (или несколько)
~~для~~ арг. для x_i $\exists$ универс. n и y_n
~~а~~ ~~тогда~~ тогда $y_1 = 3^x + 1 + 4 \cdot 3^{28}$;
 а $y_n = 93 + 3^{28} x - 3x$, тогда $n =$
~~всего~~ $x = y_n - y_1 + 1 =$

$$= 93 + 3^{28} x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}$$

Подставим каждый из икс. сюда и най-
 дем число y для него, после чего
 суммируем, получив конечный ответ -
 количество пар.

$$n_5 = 3^{28} - 165$$

$$n_6 = 2 \cdot 3^{28} - 729 + 93 - 18$$

$$n_7 = 3^{29} + 93 - 21 - 3^7$$

$$n_8 = 4 \cdot 3^{28} + 93 - 24 - 3^8$$

$$n_9 = 5 \cdot 3^{28} + 93 - 27 - 3^9$$

$$n_{10} = 6 \cdot 3^{28} + 93 - 30 - 3^{10}$$

$$n_{11} = 7 \cdot 3^{28} + 93 - 33 - 3^{11}$$

$$n_{12} = 8 \cdot 3^{28} + 93 - 36 - 3^{12}$$

$$n_{13} = 9 \cdot 3^{28} + 93 - 39 - 3^{13}$$

$$n_{14} = \dots$$

$$n_{15} = \dots$$

$$n_{16} = \dots$$

$n_{17} =$ в конечной сумме, это можно посчитать
 как сумму прогрессии
 см стр. 5 $n_{30} = 25 \cdot 3^{28} + 93 - 90 - 3^{30}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^{3 \ln(4-x) - 2 \ln(x)} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$3 \ln(4-x) - 2 \ln(x) = \ln(4-x) \cdot \log_x(4-x)$$

$$3 \ln(4-x) - 2 \ln(x) = \frac{\ln^2(4-x)}{\ln x}$$

~~$$\ln(4-x) + \ln\left(\frac{4-x}{x}\right)$$~~

$$l = \ln(4-x)$$

$$k = \ln(x)$$

$$3l - 2k = \frac{l^2}{k}$$

$$l^2 - 3kl + 2k^2 = 0$$

$$l = \frac{3k \pm \sqrt{9k^2 - 8k^2}}{2} = \frac{4k}{2}; \quad \frac{2k}{2} = 2k; \quad k$$

$$\ln(4-x) = \ln x \rightarrow 4-x = x \rightarrow x=2$$

$$\ln(4-x) = 2 \ln x \rightarrow 4-x = x^2 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

не поднимать, $x > 0$
 $\rightarrow -1 - \sqrt{5}$
 $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

~~$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \neq 4$$~~

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ не поднимать
мы за того, что $\cos y > 0$

Ответ: $(3; -9); (2; -2); \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

N 2

Сначала найдем количество игроков.

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$x - 4 > \frac{3^x + 3x - 93}{3^{28}}$$

$$x > 3^{x-28} + \frac{x}{3^{28}} - \frac{31}{3^{28}} + 4$$

~~★ =~~ $f(x) = 3^{x-28} + \frac{x}{3^{28}} - \frac{31}{3^{28}} + 4 - x$
 $f'(x) = \ln 3 \cdot 3^{x-28} + \frac{1}{3^{28}} - 1$ [как подобрать все x , для которых $f(x) < 0$]
~~Заметим, что $f'(x) > 0$, $f(x) \neq$~~

найдем корни $f'(x)$

$$3^{x-28} = \frac{1 - \frac{1}{3^{28}}}{\ln 3}$$

заметим, что $x_0 = 28 + \log_3 \left(\frac{1 - \frac{1}{3^{28}}}{\ln 3} \right)$ $f(x) \searrow$, $f'(x) \leq 0$
 после этого $f'(x) > 0$

заметим, что x_0 можно приблизить снизу как 26; (п.к. $\frac{1 - \frac{1}{3^{28}}}{\ln 3} > \frac{1}{9}$), и сверху как 28, п.к. $\log_3 \left(\frac{1 - \frac{1}{3^{28}}}{\ln 3} \right) < 0$; $\frac{1 - \frac{1}{3^{28}}}{\ln 3} < 1$

Прикинем, между какими целыми числами корни функции.

$$f(4) = \frac{7}{3^{24}} + \frac{4}{3^{28}} - \frac{31}{3^{28}} = \frac{27}{3^{28}} - \frac{27}{3^{28}} = 0$$

Ура! Таким образом, мы нашли минимум функции проинтерпретировав, которому может ~~быть~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \text{№ 3} \\ \left(-\frac{x^2}{y}\right) \ln(y) = x^2 \ln(xy^2) \end{cases} \quad \begin{cases} -y \geq 0 \\ y < 0 \\ xy^2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-2x-4 \pm \sqrt{(2x+4)^2 - 4(-3x^2+12x)}}{2}$$

$$= -x-2 \pm \frac{12x-21}{2}$$

перед нулем все равно "+", ~~перед~~ знак

$$x \in (0; 1] \quad 2x-2 \leq 0$$

$$x \in [1; +\infty) \quad 2x-2 \geq 0$$

$$y = -x-2$$

знак подкоренного выражения не влияет на раскрытие: $y = \begin{cases} -x-2+2x-2 = x-4 \\ -x-2-2x+2 = -3x \end{cases}$
Подставим в первое уравнение и решим совокупность

$$\left(\frac{x^6}{3}\right) \ln(3x) = x^2 \ln(9x^3)$$

$$\left(\frac{x^2}{4-x}\right) \ln(4-x) = x^2 \ln(x(x-4)^2)$$

или наоборот

I/

$${}_3 \ln(3x) = \frac{x^{6 \ln(3x)}}{x^{2 \ln(9x^3)}}$$

$$\ln(3x) = \log_3 \left(\frac{x^{6 \ln(3x)}}{x^{2 \ln(9x^3)}} \right)$$

$$\ln(3x) = \log_3 \left(x^{(6 \ln(3x) - 2 \ln(9x^3))} \right)$$

x > 0

$$\frac{\log_x 3x}{\log_x e} = \frac{6 \ln(3x) - 2 \ln(9x^3)}{\log_x 3}$$

$$\log_x^2 3 + \log_x 3 = 6 \frac{(\ln 3 + \ln x)}{\ln x} - 2 \frac{(2 \ln 3x + \ln x)}{\ln(x)}$$

$$\log_x^2 3 + \log_x 3 = 6(\log_x 3 + 1) - 2 \left(\frac{2(\ln 3 + \ln x)}{\ln x} + 1 \right)$$

$$0 = \log_x^2 3 - 5 \log_x 3 - 6 + 2 + 4(\log_x 3 + 1)$$

$$\log_x^2 3 - \log_x 3 - 5 = 0$$

~~при замене~~

$$2 \log_x^2 3 - 5 \log_x 3 - 6 = 0$$

~~состав квадратного уравнения некорректно, корней нет.~~

II/

$$\begin{cases} \log_x 3 = 0 \rightarrow \text{такого не бывает} \\ \log_x 3 = 1 \quad x = 3; y = -9 \end{cases}$$

II/

$${}_x \ln(4-x) - 2 \ln(x(x-4)^2) = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$${}_x \ln(4-x) - 2 \ln(x) - 4 \ln(x-4) = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

или нет имп. 3

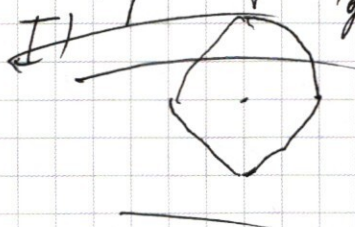
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \cos(7x) + \cos(3x) + \sin 2x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

Даным заданию геометрически.

Если одна из окружностей пересекать ~~окружностей~~ горизонтально / вертикально прямо, то и та, чей центр лежит на прямой, и пересеченной, ~~тоже~~ так же пересечен; т.к. их радиусы равны.

Заметим, что ~~центр имеет две окружности~~ ~~окружности~~ ~~идут~~ ~~преж~~ из данных окружностей не лежат на одной прямой, но для каждой окружности есть такая, что через их центры можно провести горизонтально / вертикально прямо.
 → вывод для получения двух корней, где окружности должны касаться прямой, много не бывает. (или еще в порядке повторениях по-прежнему).



II

III

IV

Эм. V 7

III

IV

$$\sum_{i=5}^{30} n_i = 93 \cdot 26 + \frac{10+25}{2} \cdot 26 - 3^{28} -$$

$$- 26 \cdot 4 \cdot 3^{28} - 3 \cdot \frac{10+25}{2} \cdot 26 - \frac{3^{30} - 1}{2} +$$

$$+ \frac{3^5 - 1}{2} = , \text{ это число и является ответом:}$$

$$= 2418 + 455 \cdot 3^{28} - 1365 - 455 \cdot 3 -$$

$$- 104 \cdot 3^{28} - \frac{3^{30} - 3^5}{2} = 351 \cdot 3^{28} + 1053 - \frac{3^{30} - 3^5}{2}$$

$$= (39 - 0,5) \cdot 3^{30} + 937,5 = 38,5 \cdot 3^{30} + 937,5$$

Ответ: ↗

№ 5

заметьте, что $(|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a$
 уравнение, которое задает несколько окружностей с радиусом $\sqrt{a}$

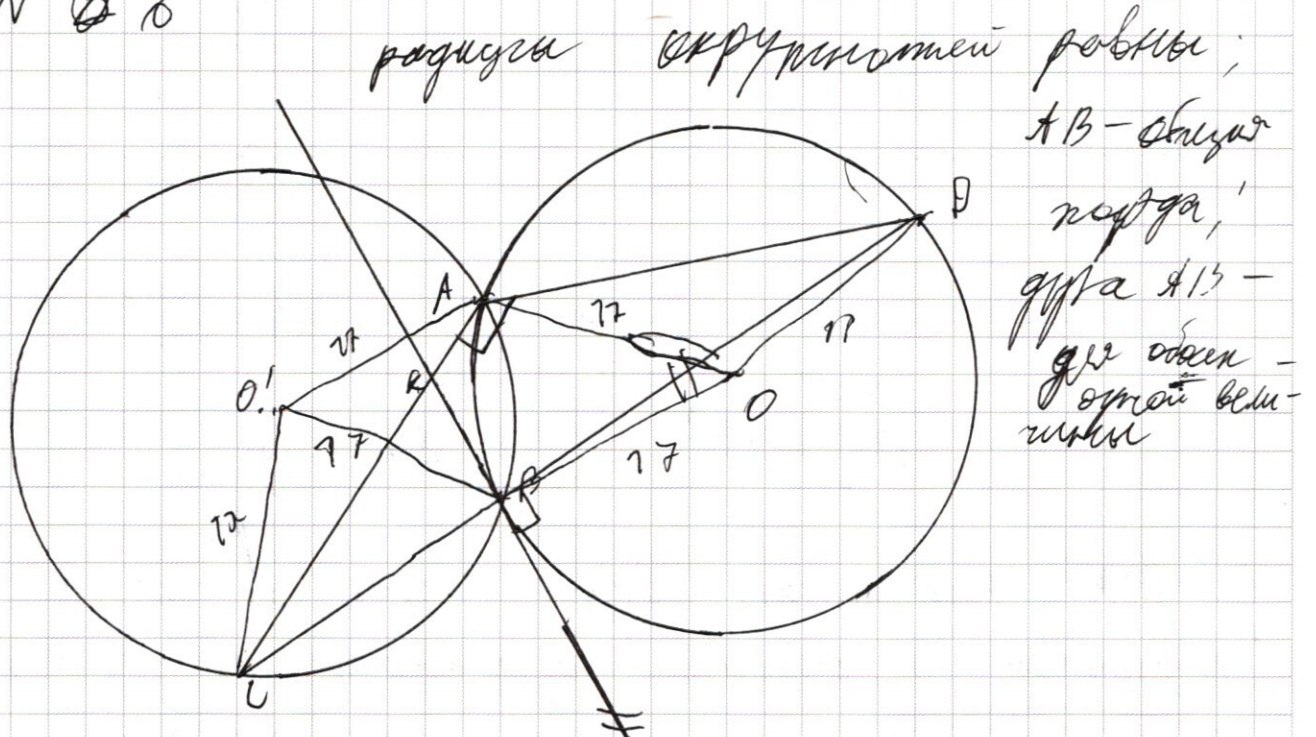
заметьте, что эти окружности имеют центры, и они имеют своими центрами точки $(-8; -15); (-8; 15); (8; 15); (8; -15)$
~~Первое~~ Раскроем модуль в первом уравнении, выразив все функции, которые оно скрывает.

$$\begin{cases} x \geq 0 & (\text{оба модуля с плюсом}) \\ y = 8 & (\text{первый с плюсом, второй с минусом}) \\ x = -16 & (\text{оба с минусом}) \\ y = -8 & (\text{первый с минусом, второй с плюсом}) \end{cases}$$

см. стр. 6, $-x \geq y + 8$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2 б



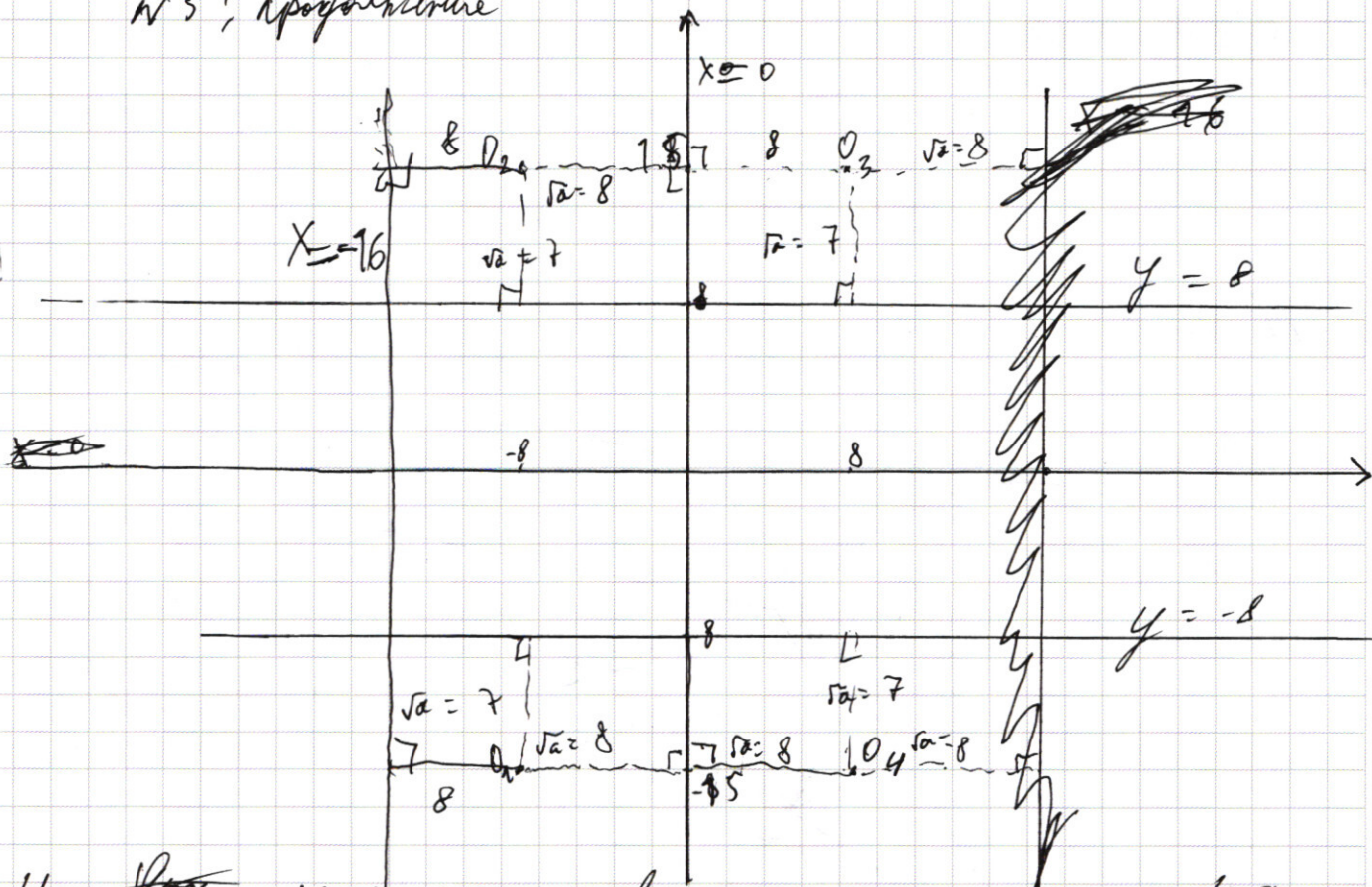
радиусы окружностей равны;
AB — общая
хорда;
дуга AB —
дуга одной вели-
чины

$CD^2 = CA^2 + AD^2$
прямая К. — хорда пер-
пендикулярна AB и BF; $\triangle EKB \sim \triangle CAD$ по
формулам, — прямому и острому;

$\angle CAB = \angle ADB$ как опирающиеся на одну
дугу; $CA \perp AD$ — р/ф; $CK \perp AB$ — р/ф;
дуга AB = 90° ; $AB = 17\sqrt{2}$ (из р/ф);
точка O — центр одной из окружностей/
хорда CD = 0; хорда CA = $\frac{a}{\sqrt{2}}$; $AD = \frac{a}{\sqrt{2}}$;
O' — центр второй окружности, хорда
~~CA = CO' = AB~~.

или стр 9.

№ 5; прохождение



Из ~~пол~~ картины видно, что $a = 64$; 49
подставим в систему и проверим, два ли корня.

~~где $a = 64$ где $a = 64$ или наоборот~~
~~переменная = $(-16; 15)$, $(-16; -15)$~~
 ~~$(0; 15)$ и $(0; -15)$~~

~~Мы все находимся в плену, а где~~

~~$a = 49$ мы находим для решения!~~
~~пробле — 8;~~ ~~49~~

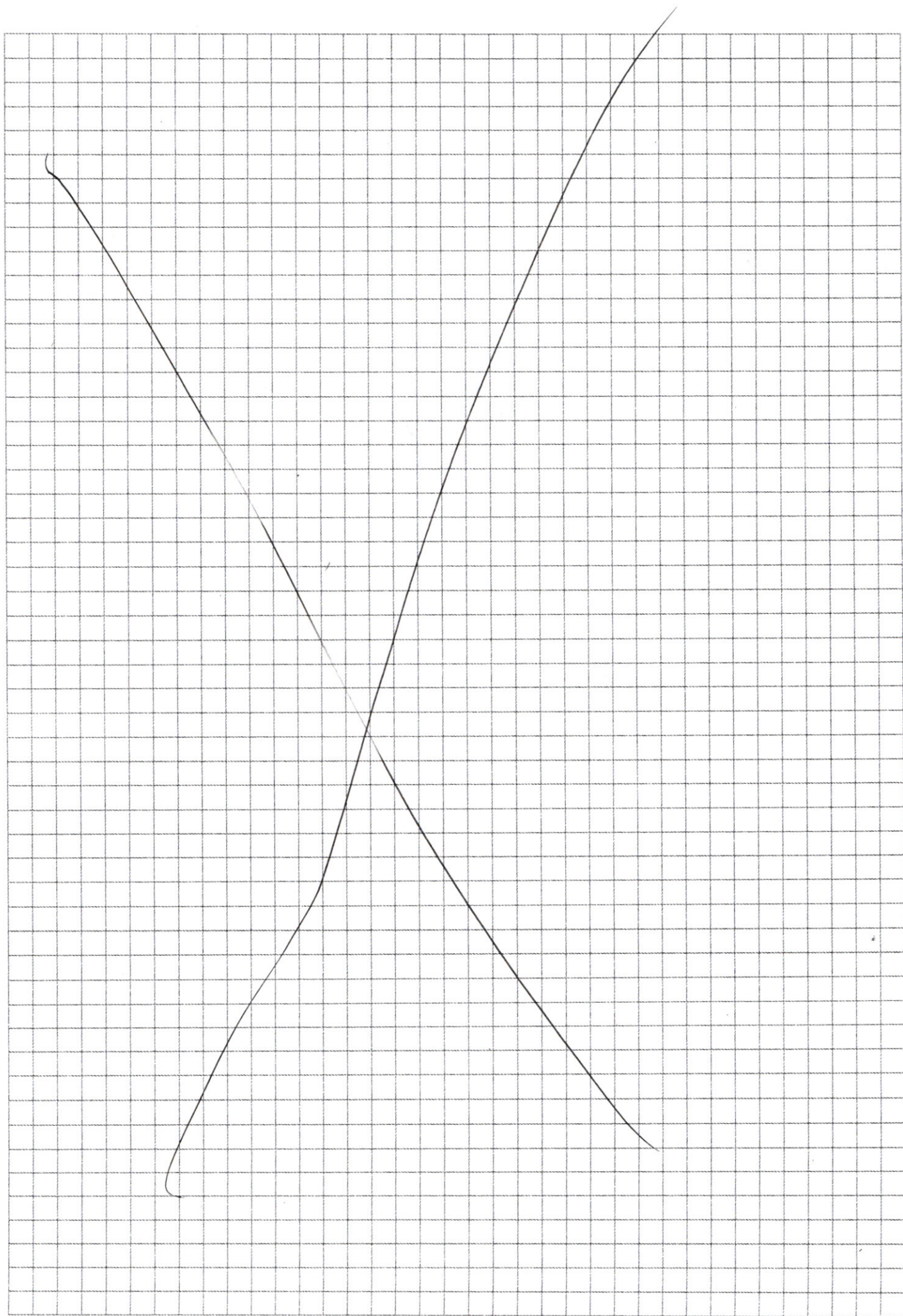
~~таким образом, что для $a = 64$ корней не два, а один $a = 64$ — два, т. е.~~

где один квадратный значимый а
система имеет лишь два решения $\rightarrow$
 $\rightarrow$ оба подпадают. Ответ: $x = 69, 49$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

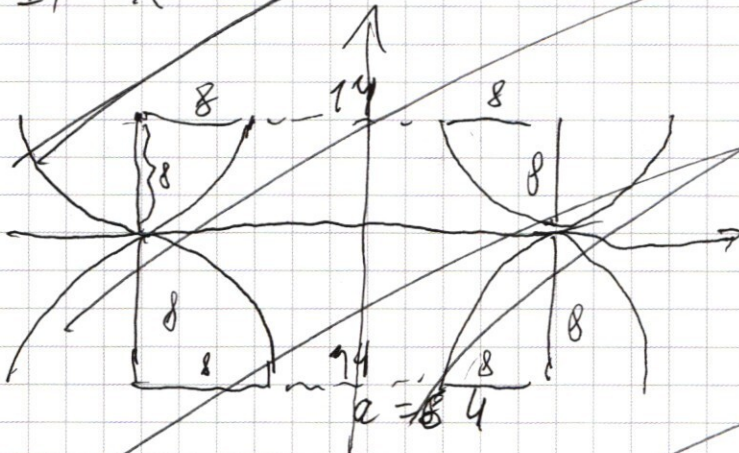
В $\triangle BAO$ $\angle BAO = 45^\circ$, по показанию
рубли $\triangle BAO$ - р/б и прямоугольн, AB -
бисс / медиана / высота р/б $\triangle CAD$,
~~м.к.~~ $CADE$ - квадрат; $CE = DE =$
 $= 17\sqrt{2}$



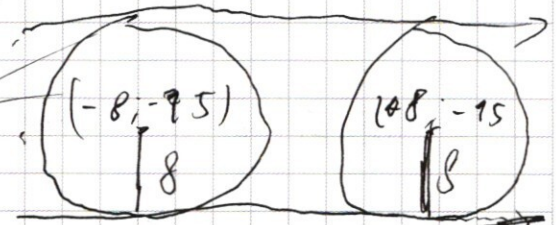
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 / продолжение /

I / $x = 0$



II / $x = -16$



$a = 64$, но $a = 64$,
уже было, для него
реализуются четыре
различные пары x и y ,
высчитываем.

IV / $y = -8$

$$16 + 15$$

$$16 - 15 + 8$$

$$-15$$

$$0$$

$$52 = x$$

$$52 = h \quad a = x$$

$$52 = h' \quad 0 = x$$

$$|16 + 15 + 8| = 7$$

$$-16 + 15 + 8 =$$

$$|26 + x| + |x - 7| = 76$$

$$\rightarrow 12$$

$$14 + 5$$

$$12 + 7$$

$$10 + 9$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, including algebraic calculations and a quadratic equation solution.

Top Left: Long division of 2407 by 343, resulting in 7.

Top Middle: Long division of 243 by 343, resulting in 0.70.

Top Right: Calculation of $27 + 4 - 31$ and a boxed quadratic equation solution:

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Center: Expansion of $(x^2 - 4)^2$:

$$(x^2 - 4)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$$

Bottom Left: Long division of 64827 by 2408, resulting in 26.

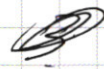
Bottom Middle: Long division of 48 by 32, resulting in 1.5.

Bottom Right: Long division of 48929 by 29, resulting in 1687.

Far Right: Vertical list of numbers: 22, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

$$3^5 = 243$$

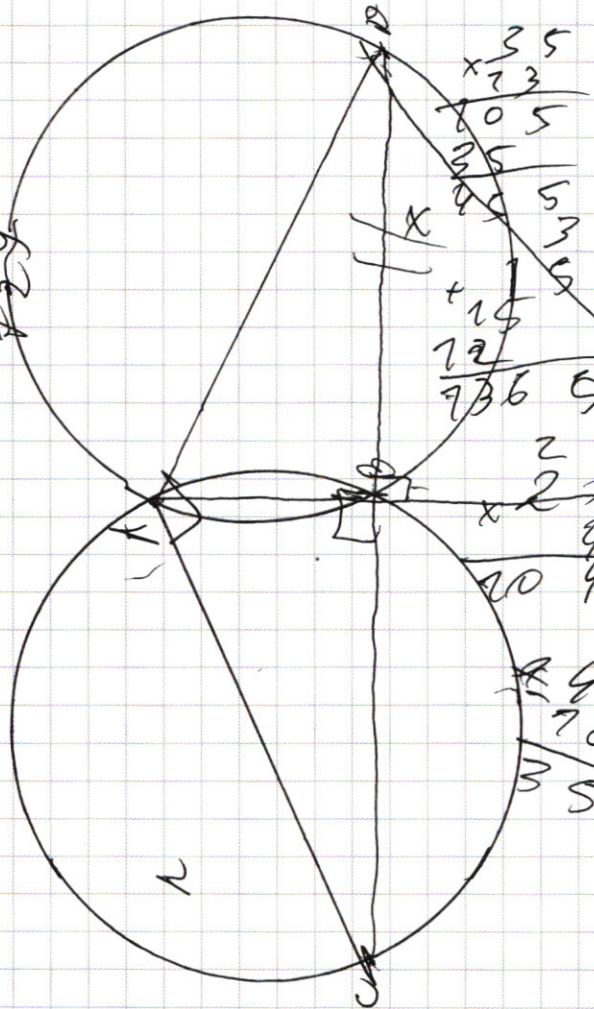
$$\begin{array}{r} 93 \\ \times 26 \\ \hline 558 \\ 186 \\ \hline 2418 \end{array}$$



$$1 + 3 + 9 + 27 + 81$$

$$- 25 \times 3 = 3^{28} - 165$$

$$3^5 = 27 \cdot 9 = 81 \cdot 3 = 243$$



$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 73 \\ \hline 105 \\ 245 \\ \hline 2555 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2418 \\ 7365 \\ 1053 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 224 \\ \hline 784 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ 26 \\ + 87 \\ \hline 151 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 455 \\ 704 \\ 357 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 25 \\ 87 \\ 79 \end{array}$$

$$N_5 = 93 + 3^{28}$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ 93 \\ \hline 150 \end{array}$$

$$N_6 = 2 \cdot 3^{28}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ 70 \\ 27 \\ 32 \\ 35 \\ 38 \\ 41 \\ 44 \end{array}$$