

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

→ 1

Разложим 64827 на простые множители:

64827	3
21609	3
7203	3
2401	7
343	7
49	7
7	7
1	

$$64827 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Чтобы произведение цифр восьмизначного числа равнялось 64827, в нем должны присутствовать ровно четыре цифры 7, следовательно произведение (т.к. $21 = 3 \cdot 7$ - не цифра)

оставшихся цифр равна 7
 $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$ т.к. $27 = 3^3$ (то оставшиеся цифры
 $27 = 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$ это цифры 3 и 3) либо
 это цифра 1

Если среди этих чисел нет цифр 9, то эти цифры определены однозначно: это три цифры 3 и одна цифра 1. Если же среди них есть цифра 9, то она ровно одна, иначе произведение будет больше 27. Но тогда эти цифры никак не определены однозначно: это одна цифра 9, одна цифра 3 и две цифры 1. Чтобы получить восьмизначное число, воспользуемся следующим методом:

(из данных цифр) Сначала соберем четыре значное число не используя цифру 7, а затем между цифрами четырехзначного числа разместим цифру 7.

1) При четырехзн. число составлено из набора {1; 3; 3; 3}

Кол-во его max чисел равно кол-ву вариантов расположения цифр 1 (т.к. остальные цифры расставлены однозначно)
 т.к. равно 4

2) Четырехзн. число составлено из набора {1; 1; 3; 9}

Кол-во max чисел:
 3! если первая цифра 1
 3! если первая цифра 3
 3! если первая цифра 9
 Итого max чисел 12

Значит, всего можно составить $12 + 4 = 16$ четырехзн. чисел. Кол-во способов расставить между их цифрами цифру 7 равно $C_5^4 = 5$ (где 5 - кол-во промежутков между цифрами плюс начало и конец числа, т.е. можно вставить цифру 7 в 5 мест)

$$C_5^4 = C_5^1 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{24} = 5$$

Знаменное число десятичной дробей, расположенных под
десятичной, равно $16 \cdot 70 = 1120$

Ответ: 1120.

→ 2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 2x + \cos 5x + 2 \cos 5x + \cos 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \cos^2 2x - \sin^2 2x = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) \left(\cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \right) \left(\cos 5x + \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(3,5x + \frac{\pi}{8} \right) \cdot \cos \left(1,5x - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cos \left(3,5x + \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\cos \left(1,5x - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 3,5x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ 1,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases} \quad (\text{где } k, n, m \in \mathbb{Z})$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$$

$$3,5x = \frac{3\pi}{8} + \pi n$$

$$1,5x = \frac{5\pi}{8} + \pi m$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}$; $\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}$ ($k, n, m \in \mathbb{Z}$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} \frac{x^{7\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2\ln(xy^2)} \\ (y-x)(y+3x)+4(y+3x)=0 \end{cases} \\ & \text{т.к. } \begin{cases} x^{7\ln(-y)} > 0 \\ (-y)^{\ln(-y)} > 0 \end{cases}; \begin{cases} x^{2\ln(xy^2)} > 0 \\ x > 0 \end{cases}, \text{ то прологарифмируем 1-е уравнение по основанию } e \\ & \ln \frac{x^{7\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = \ln x^{2\ln(xy^2)} \quad (1) \\ & (y+3x)(y-x+4)=0 \quad (2) \\ & (1): \ln x^{7\ln(-y)} - \ln(-y)^{\ln(-y)} = \ln x^{2\ln(xy^2)} \\ & 7\ln(-y)\ln x - \ln^2(-y) = 2\ln(xy^2)\ln x \\ & 7\ln(-y)\ln x - \ln^2(-y) = \ln x(2\ln x + 2\ln y^2) \\ & 7\ln(-y)\ln x - \ln^2(-y) = \ln x(2\ln x + 4\ln(-y)) \\ & 2\ln^2 x - 3\ln x \ln(-y) + \ln^2(-y) = 0 \\ & 2(\ln x - \ln(-y))(\ln x - \frac{1}{2}\ln(-y)) = 0 \\ & \begin{cases} \ln x = \ln(-y) \\ 2\ln x = \ln(-y) \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ \ln x^2 = \ln(-y) \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \end{cases} \\ & (2): \begin{cases} y+3x=0 \\ y-x+4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x=-y \\ 4-x=-y \end{cases} \\ & \text{возвращаясь к системе:} \\ & \begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \\ 3x = -y \\ 4-x = -y \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = -y & (3) \\ 3x = -y & (4) \\ 4 - x = -y & (5) \\ x^2 = -y & (6) \end{cases}$$

$$(3): \begin{cases} x = -y \\ 3x = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3x \\ x = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \neq O D3$$

$$(4): \begin{cases} x = -y \\ 4 - x = -y \\ x = 4 - x \\ x = -y \\ x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$(5): \begin{cases} x^2 = -y \\ 3x = -y \\ x^2 = 3x \\ 3x = -y \\ x(x-3) = 0 \\ 3x = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ 3x = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \neq O D3$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -9 \end{cases}$$

$$(6): \begin{cases} x^2 = -y \\ 4 - x = -y \\ x^2 = 4 - x \\ 4 - x = -y \\ x^2 + x - 4 = 0 \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \neq O D3$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -9 \end{cases}$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = x - 4$$

$$\text{III. n. } \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \text{ (OD3: } x > 0), \text{ no}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ y = x - 4 \\ x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{17} - 1}{2} > 0$$

$$\sqrt{17} > 1$$

$$\frac{\sqrt{17} - 9}{2} < 0$$

$$\frac{\sqrt{17}}{2} < 9$$

$$17 < 81$$

$$\text{Answer: } (2; -2); (3; -9); \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \right)$$

~ 5

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16 & (1) \\ ((x - 8)^2 + (y - 15)^2 = a \end{cases}$$

$$(1): |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \leq x+8 \end{cases} \quad \Downarrow$$

$$2x+16=16 \quad -x-8 \leq y \leq x+8$$

$$x=0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ -x-8 \leq y \leq x+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq -x-8 \\ y \geq x+8 \end{cases} \quad \Downarrow$$

$$-2x-16=16 \quad x+8 \leq y \leq -x-8$$

$$x=-16$$

$$\begin{cases} x=-16 \\ x+8 \leq y \leq -x-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-16 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+8 \geq -y \\ x+8 \leq y \end{cases} \quad \Downarrow$$

$$x+y+8-x+y-8=16 \quad -y \leq x+8 \leq y$$

$$y=8$$

$$\begin{cases} -y \leq x+8 \leq y \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16 \leq x \leq 0 \\ y=8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+8 \leq -y \\ x+8 \geq y \end{cases} \quad \Downarrow$$

$$-x-y-8+x-y+8=16 \quad y \leq x+8 \leq -y$$

$$y=-8$$

$$\begin{cases} y \leq x+8 \leq -y \\ y=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16 \leq x \leq 0 \\ y=-8 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ -8 \leq y \leq 8 \\ x=-16 \\ -8 \leq y \leq 8 \\ -16 \leq x \leq 0 \\ y=8 \\ -16 \leq x \leq 0 \\ y=-8 \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{2} (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= -16 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -8 \leq y \leq 8 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = -16 \\ -8 \leq y \leq 8 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} -16 \leq x \leq 0 \\ y = 8 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} -16 \leq x \leq 0 \\ y = -8 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -8 \leq y \leq 8 \\ (|y|-15)^2 = a - 64 \end{cases} \quad (a)$$

$$\begin{cases} x = -16 \\ -8 \leq y \leq 8 \\ (|y|-15)^2 = a - 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16 \leq x \leq 0 \\ y = 8 \\ (|x|-8)^2 = a - 49 \end{cases} \quad (b)$$

$$\begin{cases} -16 \leq x \leq 0 \\ y = -8 \\ (|x|-8)^2 = a - 49 \end{cases}$$

$$(a) \quad \begin{aligned} (|y|-15)^2 &= a - 64 \\ a &\geq 64 \\ |y| &= 15 \pm \sqrt{a-64} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = 15 + \sqrt{a-64} \\ y = -15 - \sqrt{a-64} \\ y = -15 + \sqrt{a-64} \\ y = 15 - \sqrt{a-64} \end{cases} \quad a \geq 64$$

По ограничению походам

$$\begin{cases} y = 15 - \sqrt{a-64} \\ y = -15 + \sqrt{a-64} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 16 \\ -8 \leq y \leq 8 \\ y = \pm (15 - \sqrt{a-64}) \\ -16 \leq x \leq 0 \\ y = 8 \\ y = -8 \\ x = \pm (8 - \sqrt{a-49}) \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} (|x|-8)^2 &= a - 49 \\ a &\geq 49 \\ |x| &= 8 \pm \sqrt{a-49} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 8 + \sqrt{a-49} \\ x = -8 + \sqrt{a-49} \\ x = -8 - \sqrt{a-49} \\ x = 8 - \sqrt{a-49} \end{cases}$$

По ограничению походам

$$\begin{cases} x = 8 - \sqrt{a-49} \\ x = -8 + \sqrt{a-49} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -8 &\leq 15 - \sqrt{a-64} \leq 8 \\ -8 &\leq -15 + \sqrt{a-64} \leq 8 \end{aligned}$$

$$7 \leq \sqrt{a-64} \leq 23$$

$$113 \leq a \leq 593$$

$$-16 \leq 8 - \sqrt{a-49} \leq 8$$

$$8 \leq \sqrt{a-49} \leq 24$$

$$113 \leq a \leq 625$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 113 \leq a \leq 625 \\ 113 \leq a \leq 593 \end{cases}$$

Заметим что при $a < 113$ система не имеет решений, а при каждой из

$113 \leq a \leq 593$ и $113 \leq a \leq 625$ система имеет по 2 решения $\Rightarrow$ система имеет ровно 2 решения $\Leftrightarrow 593 < a \leq 625$

Ответ: $a \in (593; 625]$

27

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^x + 4 \cdot 3^{28} \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$$3^{x-1} \leq 31 + (3^{27} - 1)x - 4 \cdot 3^{27}$$

$$3^{x-1} \leq 3^{27}(x-4) + 31 - x$$

$f(x) = 3^{x-1}$
показательная
ф-я
всегда возрастает

$g(x) = 3^{27}(x-4) + 31 - x$
линейная ф-я
график - прямая
всегда возрастает

Следовательно, гр-ные $f(x) = g(x)$ имеют не более 2-х корней

Проверим $x=4$ и $x=31$

$$3^3 = 31 - 4$$

$$27 = 22$$

Верно

$$3^{30} = 3^{27} \cdot 27$$

$$3^{30} = 3^{30}$$

Верно

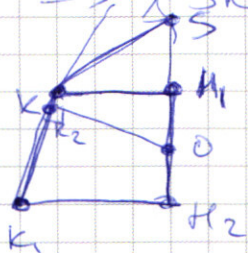
Значит, $x=4$ и $x=31$ - корни гр-ной $f(x) = g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \leq g(x)$ выполняется на отрезке $4 \leq x \leq 31$

№ 4

Задание 2 по SO - обобщая; $OK=OL=OM \rightarrow$ как радиусы сфер $\Rightarrow \angle SKO = \angle SLO = \angle SMO = 90^\circ \rightarrow$

$\Rightarrow \triangle SKO = \triangle SLO = \triangle SMO \Rightarrow \angle OSK = \angle OSL = \angle OSM$



Р-ин сечение SO k :

$\exists SO \perp \alpha = H_1, SO \perp \beta = H_2$, где α и β -

плоскости $\perp SO$ и касающиеся сферы в точках H_1 и H_2 соответственно
 $SK \perp \beta = k_1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

→ 3

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right) \ln(-y) \Rightarrow x^2 \ln(xy^2)$$

$$\begin{cases} -y > 0 \\ -\frac{x^7}{y} > 0 \\ xy^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^7 \ln(-y)}{(-y) \ln(-y)} = x^2 \ln(x) + 4 \ln(-y)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y-x)(y+3x) + 4(y+3x) = 0$$

$$(y+3x)(y-x+4) = 0$$

$$\begin{cases} y = -3x & (1) \\ y = x - 4 & (2) \end{cases}$$

(1):

$$\left(\frac{x^6}{3}\right) \ln x + \ln 3 = x^2 \ln(x(3x)^2) = x^2 \ln(x) + 2 \ln 9 x^3$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right) \ln x + \ln 3 > 0 \Rightarrow x^2 \ln 3 + 4 \ln x > 0$$

$$2 \ln 9 + 2 \ln x^3$$

$$4 \ln 3 + 6 \ln x$$

$$(\ln x + \ln 3) \ln \frac{x^6}{3} = (4 \ln 3 + 6 \ln x) \ln x$$

$$(\ln x + \ln 3)(6 \ln x - \ln 3) = (6 \ln x + 4 \ln 3) \ln x$$

$$t = \ln x; a = \ln 3$$

$$(t+a)(6t-a) = (6t+4a)t$$

$$6t^2 - at + 6at - a^2 = 6t^2 + 4at$$

$$-2t^2 + 3at - a^2 = 0$$

$$at = a^2$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t = a$$

$$t = \frac{-3a \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$\ln x = \ln 3$$

$$\ln x = \frac{-3 \ln 3 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$x = 3$$

$$x = \frac{-3 \ln 3 \pm \sqrt{1}}{4}$$

(2) $0 < x < 4$
 $y = x - 4$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right) \ln(-y) = x^2 \ln(x^2 y^2)$$

$$\ln(-y) \ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) = 2 \ln x \ln(x^2 y^2)$$

$$\Rightarrow \ln(-y) (\ln(x^7) - \ln(-y)) = 2 \ln x (\ln x + \ln y^2)$$

$$\ln(-y) (7 \ln x - \ln(-y)) = 2 \ln x (\ln x + 2 \ln(-y))$$

$$a = \ln(x)$$

$$b = \ln(-y)$$

$$b(7a - b) = 2a(a + 2b)$$

$$7ab - b^2 = 2a^2 + 4ab$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$2(a - b)(a + \frac{1}{2}b) = 0$$

$$a = b$$

$$a = -\frac{1}{2}b$$

$$x = 4 - y$$

$$x = 2$$

$$x^2 = x - 4$$

$$x^2 - x + 4 = 0$$

$$\begin{cases} y = -3x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$\ln x = \ln -y$$

$$\ln x^2 = \ln -y$$

$$\begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 2x \cos 5x + 2 \cos 5x \cos 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$\sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \left(\cos 5x + \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$2 \cos \frac{7x + \pi}{2} \cos \frac{3x - \pi}{2} \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cos \left(3,5x + \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(1,5x - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$3,5x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$1,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$3,5x = \frac{3\pi}{8} + \pi k$$

$$1,5x = \frac{5\pi}{8} + \pi m$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

$$k, m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{28} + \frac{11}{28} + \frac{19}{28} = \frac{31}{28}$$

$$\frac{3}{28} + \frac{5}{28} + \frac{43}{28} = \frac{51}{28}$$

$$\frac{3}{28} + \frac{5}{12} + \frac{43}{28} = \frac{51}{28}$$

$$\frac{3}{28} + \frac{5}{12} + \frac{43}{28} = \frac{51}{28}$$

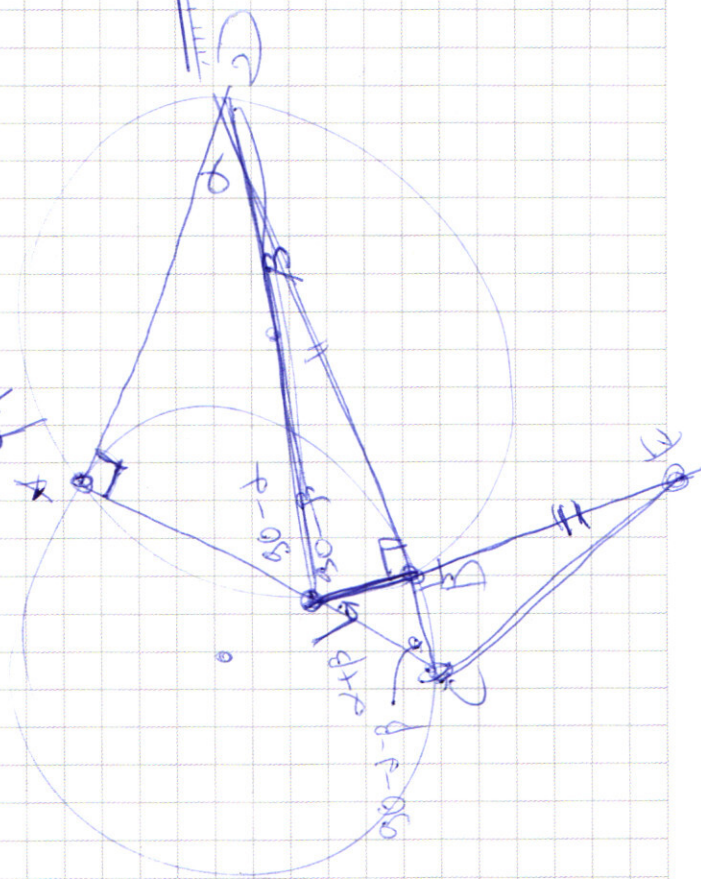
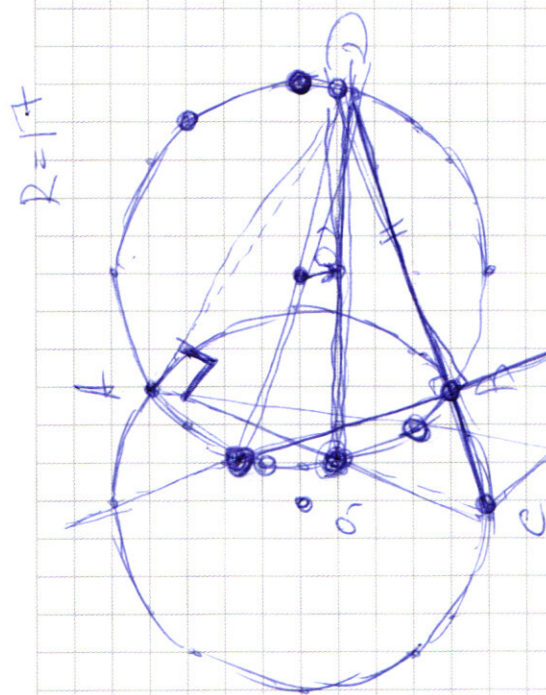
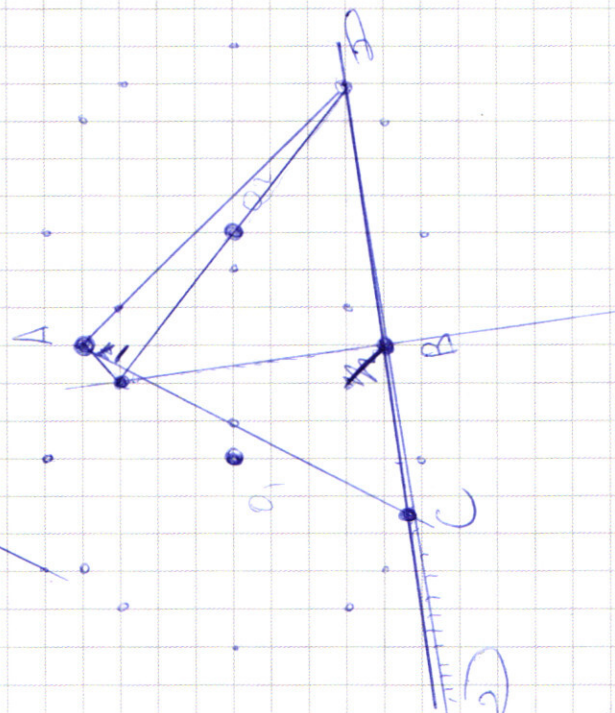
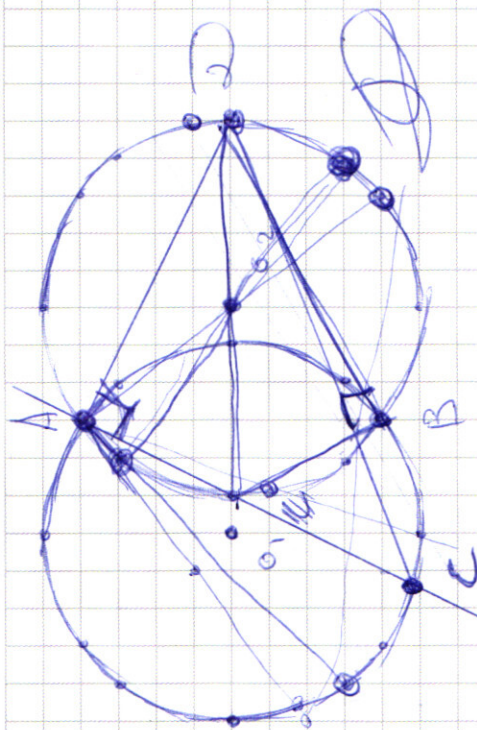
$$\frac{3}{28} + \frac{5}{12} + \frac{43}{28} = \frac{51}{28}$$

$$\frac{3}{28} + \frac{5}{12} + \frac{43}{28} = \frac{51}{28}$$

$$6, 22, 38, 54, 70, 86, 102$$

$$18, 66, 114, 162, 210, 258, 306$$

$$70, 182, 294, 406, 518, 630, 742, 854, 966, 1078, 1190, 1302, 1414, 1526, 1638, 1750, 1862, 1974, 2086, 2198, 2310, 2422, 2534, 2646, 2758, 2870, 2982, 3094, 3206, 3318, 3430, 3542, 3654, 3766, 3878, 3990, 4102, 4214, 4326, 4438, 4550, 4662, 4774, 4886, 4998, 5110, 5222, 5334, 5446, 5558, 5670, 5782, 5894, 6006, 6118, 6230, 6342, 6454, 6566, 6678, 6790, 6902, 7014, 7126, 7238, 7350, 7462, 7574, 7686, 7798, 7910, 8022, 8134, 8246, 8358, 8470, 8582, 8694, 8806, 8918, 9030, 9142, 9254, 9366, 9478, 9590, 9702, 9814, 9926, 10038, 10150, 10262, 10374, 10486, 10598, 10710, 10822, 10934, 11046, 11158, 11270, 11382, 11494, 11606, 11718, 11830, 11942, 12054, 12166, 12278, 12390, 12502, 12614, 12726, 12838, 12950, 13062, 13174, 13286, 13398, 13510, 13622, 13734, 13846, 13958, 14070, 14182, 14294, 14406, 14518, 14630, 14742, 14854, 14966, 15078, 15190, 15302, 15414, 15526, 15638, 15750, 15862, 15974, 16086, 16198, 16310, 16422, 16534, 16646, 16758, 16870, 16982, 17094, 17206, 17318, 17430, 17542, 17654, 17766, 17878, 17990, 18102, 18214, 18326, 18438, 18550, 18662, 18774, 18886, 18998, 19110, 19222, 19334, 19446, 19558, 19670, 19782, 19894, 20006, 20118, 20230, 20342, 20454, 20566, 20678, 20790, 20902, 21014, 21126, 21238, 21350, 21462, 21574, 21686, 21798, 21910, 22022, 22134, 22246, 22358, 22470, 22582, 22694, 22806, 22918, 23030, 23142, 23254, 23366, 23478, 23590, 23702, 23814, 23926, 24038, 24150, 24262, 24374, 24486, 24598, 24710, 24822, 24934, 25046, 25158, 25270, 25382, 25494, 25606, 25718, 25830, 25942, 26054, 26166, 26278, 26390, 26502, 26614, 26726, 26838, 26950, 27062, 27174, 27286, 27398, 27510, 27622, 27734, 27846, 27958, 28070, 28182, 28294, 28406, 28518, 28630, 28742, 28854, 28966, 29078, 29190, 29302, 29414, 29526, 29638, 29750, 29862, 29974, 30086, 30198, 30310, 30422, 30534, 30646, 30758, 30870, 30982, 31094, 31206, 31318, 31430, 31542, 31654, 31766, 31878, 31990, 32102, 32214, 32326, 32438, 32550, 32662, 32774, 32886, 32998, 33110, 33222, 33334, 33446, 33558, 33670, 33782, 33894, 34006, 34118, 34230, 34342, 34454, 34566, 34678, 34790, 34902, 35014, 35126, 35238, 35350, 35462, 35574, 35686, 35798, 35910, 36022, 36134, 36246, 36358, 36470, 36582, 36694, 36806, 36918, 37030, 37142, 37254, 37366, 37478, 37590, 37702, 37814, 37926, 38038, 38150, 38262, 38374, 38486, 38598, 38710, 38822, 38934, 39046, 39158, 39270, 39382, 39494, 39606, 39718, 39830, 39942, 40054, 40166, 40278, 40390, 40502, 40614, 40726, 40838, 40950, 41062, 41174, 41286, 41398, 41510, 41622, 41734, 41846, 41958, 42070, 42182, 42294, 42406, 42518, 42630, 42742, 42854, 42966, 43078, 43190, 43302, 43414, 43526, 43638, 43750, 43862, 43974, 44086, 44198, 44310, 44422, 44534, 44646, 44758, 44870, 44982, 45094, 45206, 45318, 45430, 45542, 45654, 45766, 45878, 45990, 46102, 46214, 46326, 46438, 46550, 46662, 46774, 46886, 46998, 47110, 47222, 47334, 47446, 47558, 47670, 47782, 47894, 48006, 48118, 48230, 48342, 48454, 48566, 48678, 48790, 48902, 49014, 49126, 49238, 49350, 49462, 49574, 49686, 49798, 49910, 50022, 50134, 50246, 50358, 50470, 50582, 50694, 50806, 50918, 51030, 51142, 51254, 51366, 51478, 51590, 51702, 51814, 51926, 52038, 52150, 52262, 52374, 52486, 52598, 52710, 52822, 52934, 53046, 53158, 53270, 53382, 53494, 53606, 53718, 53830, 53942, 54054, 54166, 54278, 54390, 54502, 54614, 54726, 54838, 54950, 55062, 55174, 55286, 55398, 55510, 55622, 55734, 55846, 55958, 56070, 56182, 56294, 56406, 56518, 56630, 56742, 56854, 56966, 57078, 57190, 57302, 57414, 57526, 57638, 57750, 57862, 57974, 58086, 58198, 58310, 58422, 58534, 58646, 58758, 58870, 58982, 59094, 59206, 59318, 59430, 59542, 59654, 59766, 59878, 59990, 60102, 60214, 60326, 60438, 60550, 60662, 60774, 60886, 60998, 61110, 61222, 61334, 61446, 61558, 61670, 61782, 61894, 62006, 62118, 62230, 62342, 62454, 62566, 62678, 62790, 62902, 63014, 63126, 63238, 63350, 63462, 63574, 63686, 63798, 63910, 64022, 64134, 64246, 64358, 64470, 64582, 64694, 64806, 64918, 65030, 65142, 65254, 65366, 65478, 65590, 65702, 65814, 65926, 66038, 66150, 66262, 66374, 66486, 66598, 66710, 66822, 66934, 67046, 67158, 67270, 67382, 67494, 67606, 67718, 67830, 67942, 68054, 68166, 68278, 68390, 68502, 68614, 68726, 68838, 68950, 69062, 69174, 69286, 69398, 69510, 69622, 69734, 69846, 69958, 70070, 70182, 70294, 70406, 70518, 70630, 70742, 70854, 70966, 71078, 71190, 71302, 71414, 71526, 71638, 71750, 71862, 71974, 72086, 72198, 72310, 72422, 72534, 72646, 72758, 72870, 72982, 73094, 73206, 73318, 73430, 73542, 73654, 73766, 73878, 73990, 74102, 74214, 74326, 74438, 74550, 74662, 74774, 74886, 74998, 75110, 75222, 75334, 75446, 75558, 75670, 75782, 75894, 76006, 76118, 76230, 76342, 76454, 76566, 76678, 76790, 76902, 77014, 77126, 77238, 77350, 77462, 77574, 77686, 77798, 77910, 78022, 78134, 78246, 78358, 78470, 78582, 78694, 78806, 78918, 79030, 79142, 79254, 79366, 79478, 79590, 79702, 79814, 79926, 80038, 80150, 80262, 80374, 80486, 80598, 80710, 80822, 80934, 81046, 81158, 81270, 81382, 81494, 81606, 81718, 81830, 81942, 82054, 82166, 82278, 82390, 82502, 82614, 82726, 82838, 82950, 83062, 83174, 83286, 83398, 83510, 83622, 83734, 83846, 83958, 84070, 84182, 84294, 84406, 84518, 84630, 84742, 84854, 84966, 85078, 85190, 85302, 85414, 85526, 85638, 85750, 85862, 85974, 86086, 86198, 86310, 86422, 86534, 86646, 86758, 86870, 86982, 87094, 87206, 87318, 87430, 87542, 87654, 87766, 87878, 87990, 88102, 88214, 88326, 88438, 88550, 88662, 88774, 88886, 88998, 89110, 89222, 89334, 89446, 89558, 89670, 89782, 89894, 90006, 90118, 90230, 90342, 90454, 90566, 90678, 90790, 90902, 91014, 91126, 91238, 91350, 91462, 91574, 91686, 91798, 91910, 92022, 92134, 92246, 92358, 92470, 92582, 92694, 92806, 92918, 93030, 93142, 93254, 93366, 93478, 93590, 93702, 93814, 93926, 94038, 94150, 94262, 94374, 94486, 94598, 94710, 94822, 94934, 95046, 95158, 95270, 95382, 95494, 95606, 95718, 95830, 95942, 96054, 96166, 96278, 96390, 96502, 96614, 96726, 96838, 96950, 97062, 97174, 97286, 97398, 97510, 97622, 97734, 97846, 97958, 98070, 98182, 98294, 98406, 98518, 98630, 98742, 98854, 98966, 99078, 99190, 99302, 99414, 99526, 99638, 99750, 99862, 99974, 100086, 100198, 100310, 100422, 100534, 100646, 100758, 100870, 100982, 101094, 101206, 101318, 101430, 101542, 101654, 101766, 101878, 101990, 102102, 102214, 102326, 102438, 102550, 102662, 102774, 102886, 102998, 103110, 103222, 103334, 103446, 103558, 103670, 103782, 103894, 104006, 104118, 104230, 104342, 104454, 104566, 104678, 104790, 104902, 105014, 105126, 105238, 105350, 105462, 105574, 105686, 105798, 105910, 106022, 106134, 106246, 106358, 106470, 106582, 106694, 106806, 106918, 107030, 107142, 107254, 107366, 107478, 107590, 107702, 107814, 107926, 108038, 108150, 108262, 108374, 108486, 108598, 108710, 108822, 108934, 109046, 109158, 109270, 109382, 109494, 109606, 109718, 109830, 109942, 110054, 110166, 110278, 110390, 110502, 110614, 110726, 110838, 110950, 111062, 111174, 111286, 111398, 111510, 111622, 111734, 111846, 111958, 112070, 112182, 112294, 112406, 112518, 112630, 112742, 112854, 112966, 113078, 113190, 113302, 113414, 113526, 113638, 113750, 113862, 113974, 114086, 114198, 114310, 114422, 114534, 114646, 114758, 114870, 114982, 115094, 115206, 115318, 115430, 115542, 115654, 115766, 115878, 115990, 116102, 116214, 116326, 116438, 116550, 116662, 116774, 116886, 116998, 117110, 117222, 117334, 117446, 117558, 117670, 117782, 117894, 118006, 118118, 118230, 118342, 118454, 118566, 118678, 118790, 118902, 119014, 119126, 119238, 119350, 119462, 119574, 119686, 119798, 119910, 120022, 120134, 120246, 120358, 120470, 120582, 120694, 120806, 120918, 121030, 121142, 121254, 121366, 121478, 121590, 121702, 121814, 121926, 122038, 122150, 122262, 122374, 122486, 122598, 122710, 122822, 122934, 123046, 123158, 123270, 123382, 123494, 123606, 123718, 123830, 123942, 124054, 124166, 124278, 124390, 124502, 124614, 124726, 124838, 124950, 125062, 125174, 125286, 125398, 125510, 125622, 125734, 125846, 125958, 126070, 126182, 126294, 126406, 126518, 126630, 126742, 126854, 126966, 127078, 127190, 127302, 127414, 127526, 127638, 127750, 127862, 127974, 128086, 128198, 128310, 128422, 128534, 128646, 128758, 128870, 128982, 129094, 129206, 129318, 129430, 129542, 129654, 129766, 129878, 129990, 130102, 130214, 130326, 130438, 130550, 130662, 130774, 130886, 130998, 131110, 131222, 131334, 131446, 131558, 131670, 131782, 131894, 132006, 132118, 132230, 132342, 132454, 132566, 132678, 132790, 132902, 133014, 133126, 133238, 133350, 133462, 133574, 133686, 133798, 133910, 134022, 134134, 134246, 134358, 134470, 134582, 134694, 134806, 134918, 135030, 135142, 135254, 135366, 135478, 135590, 135702, 135814, 135926, 136038, 136150, 136262, 136374, 136486, 136598, 136710, 136822, 136934, 137046, 137158, 137270, 137382, 137494, 137606, 137718, 137830, 137942, 138054, 138166, 138278, 138390, 138502, 138614, 138726, 138838, 138950, 139062, 139174, 139286, 139398, 139510, 139622, 139734, 139846, 139958, 140070, 140182, 140294, 140406, 140518, 140630, 140742, 140854, 140966, 141078, 141190, 141302, 141414, 141526, 141638, 141750, 141862, 141974, 142086, 142198, 142310, 142422, 142534, 142646, 142758, 142870, 142982, 143094, 143206, 143318, 143430, 143542, 143654, 143766, 143878, 143990, 144102, 144214, 144326, 144438, 144550, 144662, 144774, 144886, 144998, 145110, 145222, 145334, 145446, 145558, 145670, 145782, 145894, 146006, 146118, 146230, 146342, 146454, 146566, 146678, 146790, 146902, 147014, 147126, 147238, 147350, 147462, 147574, 147686, 147798, 147910, 148022, 148134, 148246, 148358, 148470, 148582, 148694, 148806, 148918, 149030, 149142, 149254, 149366, 149478, 149590, 149702, 149814, 149926, 150038, 150150, 150262, 150374, 150486, 150598, 150710, 150822, 150934, 151046, 151158, 151270, 151382, 151494, 151606, 151718, 151830, 151942, 152054, 152166, 152278, 152390, 152502, 152614, 152726, 152838, 152950, 153062, 153174, 153286, 153398, 153510, 153622, 153734, 153846, 153958, 154070, 154182, 154294, 154406, 154518, 154630, 154742, 154854, 154966, 155078, 155190, 155302, 155414, 155526, 155638, 155750, 155862, 1559$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2) (|x| - 8)^2 + 49 = a$$

$$(|x| - 8)^2 = a - 49$$

$$|x| = 8 \pm \sqrt{a - 49}$$

$$\begin{aligned} x &= 8 + \sqrt{} \\ x &= 8 - \sqrt{} \\ x &= -8 + \sqrt{} \\ x &= -8 - \sqrt{} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -16 &\leq 8 + \sqrt{} \leq 0 \\ -24 &\leq \sqrt{} \leq -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -16 &\leq 8 - \sqrt{} \leq 0 \\ -24 &\leq -\sqrt{} \leq -8 \\ 8 &\leq \sqrt{} \leq 24 \end{aligned}$$

$$8^2 + 7^2 \leq 24^2 + 7^2$$

$$24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$$

$$23^2 = 529 + 64 \quad 593$$

$$7^2 + 8^2 \leq a \leq 593$$

$$7^2 + 8^2 \leq a \leq 625$$

$$113 \leq 593$$

$$113 \leq a \leq 593$$

$$113 \leq a \leq 625$$

$$593 < a \leq 625$$

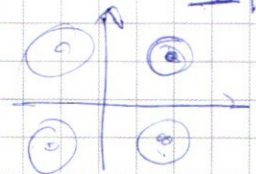
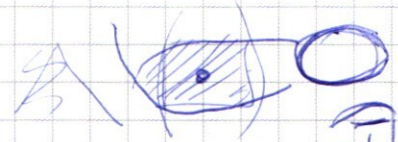
$$y = 8 - x$$

$$y = 8 + x$$

$$\begin{aligned} y &= \pm 8 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 16 \\ y &= \pm 8 \end{aligned}$$

$$140 + 91 + 140 - 91 = 16$$

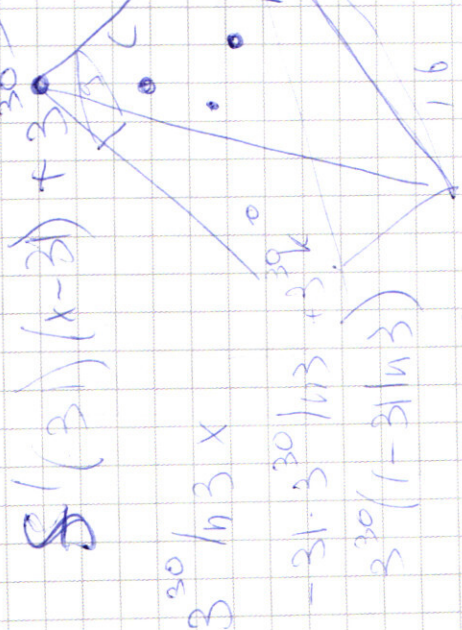


$$1,5 \cdot 3^{29} - 1,5 \cdot 81$$

$$3^4 (1 \dots 3^{25})$$

$$93 + 3^{28} - 3x - 3^{x-1} - 3^{28} - 3x - 3^{x-1} - 3^{28}$$

$$3^{x-1} \ln 3^{140}$$



$$3^{30} \ln 3^x$$

$$-31 \cdot 3^{30} \ln 3 + 3^{39}$$

$$3^{30} (1 - 31 \ln 3)$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} \leq (3 - 3)x + 93$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27} = 31 + 3 \cdot 3^{27} - x$$

$$3^{x-1} = 3^{27} (x - 4) + 31 - x$$

$$31 - x : 3$$

$$31 \cdot 3^x = 3^x$$

$$x = 31$$

$$x = 4$$

$$3^{27} + 0.6 - 81$$

$$4 < x < 31 + 2 \cdot 3^{27}$$

$$93 + 3^{28} x - 3^{28} (x - 4) - 3x - 3^{28} \geq 1$$

$$3(31 - x - 3^{x-1} - 3^{28}) \geq 1$$

$$12,25 \cdot 3 - 36$$

$$36,75 - 36$$

$$3/4$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3,5\sqrt{3}$$

$$3^{78} - 174$$

$$\frac{h}{h+203} = \frac{3}{4}$$

$$4h = 3h + 609$$

$$h = 609$$

$$\sin = \frac{1}{7}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$\frac{609}{7}$$

$$\frac{420}{4\sqrt{3}} = \frac{203}{\sqrt{3}}$$

$$240$$

$$253$$

$$170$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

кон-во 8 задач пропуск цифр = 64827

$$\begin{array}{r} 64827 \\ 21609 \\ 7203 \\ 2401 \\ 867 \\ 288 \\ 17 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 17 \\ 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64827 \\ 51 \\ 138 \\ 136 \\ 22 \\ 17 \\ 57 \end{array} \begin{array}{l} 17 \\ 381 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 240 \\ 343 \\ 49 \end{array} \begin{array}{l} 7 \\ 7 \end{array}$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 139 \\ 33 \\ 33 \\ 33 \\ 33 \end{array} \begin{array}{l} 6 \\ 12 \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1339 \\ 139 \\ 93 \\ 3139 \\ 01934 \\ 3319 \\ 339 \\ 29134 \\ 9931 \\ 91337 \\ 9313 \\ 9331 \end{array}$$

$$4131$$

$$\begin{array}{r} 1199 \\ 1319 \\ 1991 \\ 91996 \\ 9999 \\ 9911 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11-1 \\ 19-2 \\ 91-2 \\ 99-1 \end{array} \begin{array}{l} 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Phi R \\ C_4 C_n^k \\ C_5 \\ C_4 \\ C_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \cdot 8 - 16 = 4 \\ -284 \\ 76 \\ 48 \end{array} \begin{array}{l} 16 \\ 70 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 70 \\ 24 \\ 70 \cdot 19 = \end{array}$$

$$[1330]$$

$$|x+8+y| + |x+8-y| = 16$$

$$1) \begin{cases} x+8+y \geq 0 \\ x+8-y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \leq x+8 \end{cases}$$

$$-x-8 \leq y \leq x+8$$

$$2x + 16 = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+8+y \leq 0 \\ x+8-y \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -x-8 \\ y \geq x+8 \end{cases}$$

$$x+8 \leq y \leq -x-8$$

$$-2x - 16 = 16$$

$$-2x = 32$$

$$\begin{cases} x = -16 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+8+y \geq 0 \\ x+8-y \leq 0 \end{cases}$$

$$x+8+y - x-8+y = 16$$

$$y = 8$$

$$\begin{cases} x+8 \geq -y \\ x+8 \leq y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y \leq x+8 \leq y \\ -8 \leq x+8 \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16 \leq x \leq 0 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+8+y \leq 0 \\ x+8-y \geq 0 \end{cases}$$

$$-x-8-y + x+8-y = 16$$

$$y = -8$$

$$\begin{cases} x+8 \leq -y \\ x+8 \geq y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x+8 \leq -y \\ -8 \leq x+8 \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16 \leq x \leq 0 \\ y = -8 \end{cases}$$

$$1) 64 + (|y| - 15)^2 = a$$

$$(|y| - 15)^2 = a - 64$$

$$|y| = 15 \pm \sqrt{a - 64}$$

$$2) 64 + (|y| - 15)^2 = 0$$

$$-8 \leq \begin{cases} 1) y = 15 + \sqrt{a-64} \\ 2) y = 15 - \sqrt{a-64} \end{cases} \leq 8$$

$$-8 \leq \begin{cases} 3) y = -15 - \sqrt{a-64} \\ 4) y = -15 + \sqrt{a-64} \end{cases} \leq 8$$

$$a) -8 \leq 15 + \sqrt{a-64} \leq 8$$

$$-23 \leq \sqrt{a-64} \leq -7$$

$$a \in \emptyset$$

$$-8 \leq 15 - \sqrt{a-64} \leq 8$$

$$-23 \leq -\sqrt{a-64} \leq -7$$

$$7 \leq \sqrt{a-64} \leq 23$$

$$7^2 \leq a-64 \leq 23^2$$

$$7^2 + 64 \leq a \leq 23^2 + 64$$

$$-8 \leq -15 - \sqrt{a-64} \leq 8$$

$$-8 \leq 15 + \sqrt{a-64} \leq 8$$

$$-8 \leq -15 + \sqrt{a-64} \leq 8$$

$$-8 \leq 15 - \sqrt{a-64} \leq 8$$