МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{1}$ Разложим данное число на простые мн-ли:
$64827 = 3^3 \cdot 7^4$. Т.к. 7 - един. цифра, делящ. на 7 (кроме 0, который мы не испол., т.к. произведение обнул.), то в десятич. записи чисел используется ровно 4 семёрки. Т.к. $64827 \not\vdots 2; 5$, то в записи не исп. 2, 4, 5, 6, 8. Остались 1, 3 и $9 = 3^2$. Чтобы получить 3^3, можно использовать либо 9 и 3, либо три тройки, остальные цифры равны 1. Получаем след. 2 возм. набора:

1. 7, 7, 7, 7, 9, 3, 1, 1;
2. 7, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 1.

В каждом наборе кол-во способов выбрать 4 места под семёрки в восьмизначн. числе равно кол-ву соч-ий $C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 6^2 \cdot 7 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$. Далее для кажд. случая:

1. Кол-во способов выбрать 2 места под един-ы из ост. 4 — $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Остальные два места в записи числа уходят на 9 и 3, тут, очевидно, 2 возм. перестановки, итого $70 \cdot 6 \cdot 2 = 840$.
2. Кол-во способов выбрать 3 места под тройки из остав. 4 — $C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$. Остав-ся место уходит един. Итого: $70 \cdot 4 = 280$. Суммарно: $840 + 280 = 1120$

Ответ: 1120.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\boxed{12}$ $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x + \sin 2x)(2\cos 5x + 2(\cos 2x \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{4}} - \sin 2x \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\sin\frac{\pi}{4}}) = 0$

$2\sqrt{2}(\cos 2x \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{4}} + \sin 2x \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\sin\frac{\pi}{4}})(\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$

$2\cos(2x - \frac{\pi}{4})\cos(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8})\cos(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l \end{array}\right.$; $n, k, l \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3} \end{array}\right.$; $n, k, l \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$; $\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}$; $n, k, l \in \mathbb{Z}$.

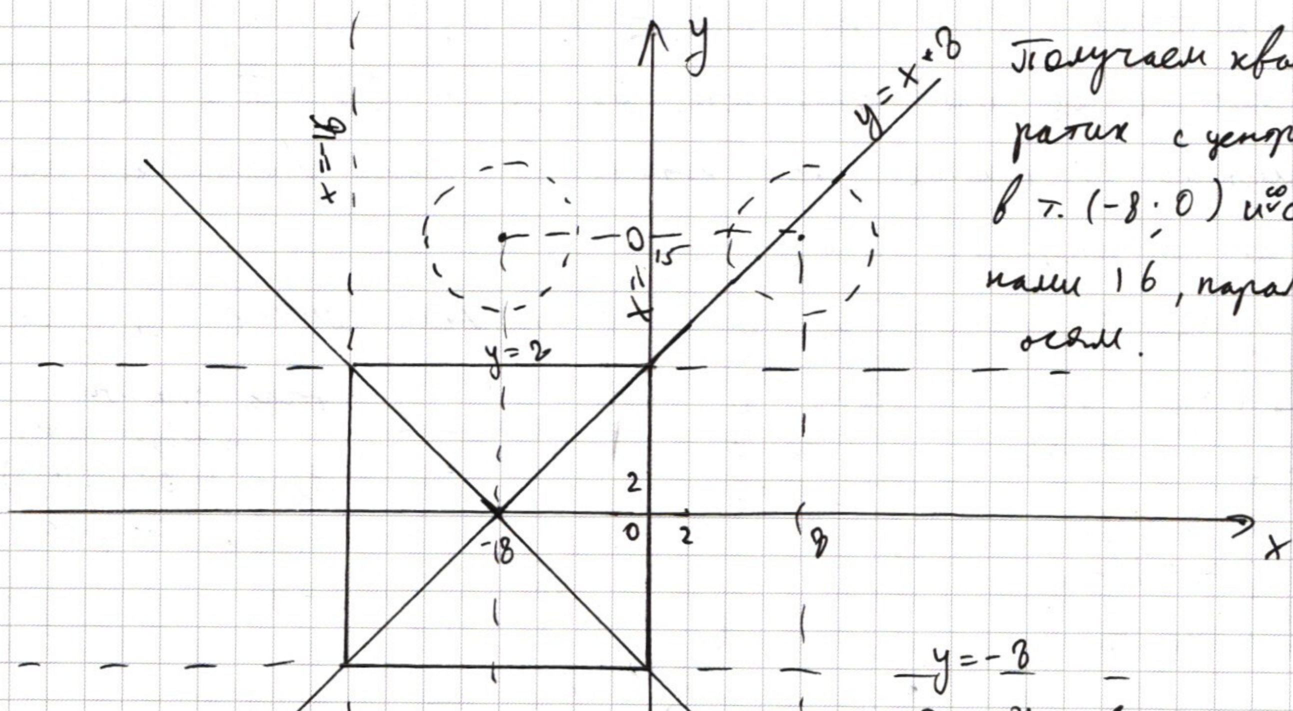
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{5}$ $\begin{cases} |x+y+8|+|x-y+8|=16 \\ (|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a \end{cases}$

Замм. первое ур-ие системы Его можно переписать так:

$$\left[\begin{array}{l} x+y+8+x-y+8=16,\ y\geq -x-8,\ y\leq x+8 \\ x+y+8-x+y-8=16;\ y\geq -x-8,\ y>x+8 \\ -x-y-8+x-y+8=16,\ y<-x-8,\ y\leq x+8 \\ -x-y-8-x+y-8=16,\ y<-x-8,\ y>x+8. \end{array}\right.$$

Изобразим в осях OXY данную систему:



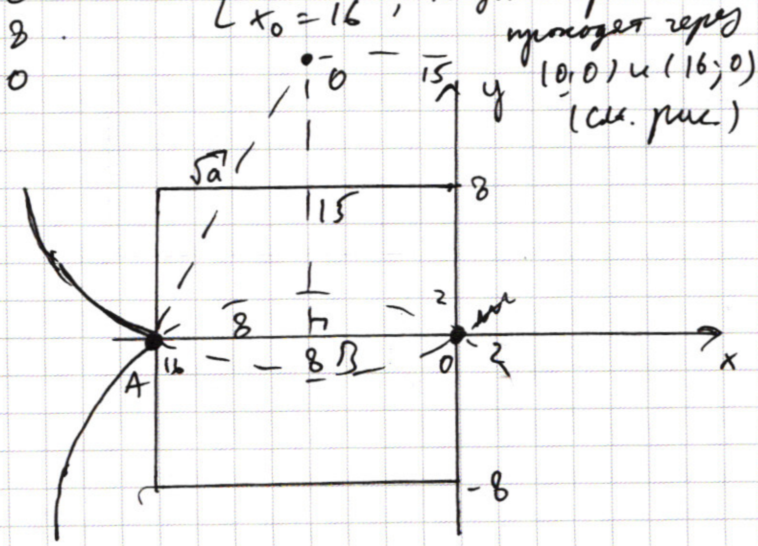
Получаем квадратик с центром в т. $(-8;0)$ и со сторонами 16, парал. осям.

2-ое Уравнение же явл. ур-нем окр-ти при $a>0$, которые симметрично

отобразим отн. осей (стоит заметить, что если $a > 64$, то радиус окр-тей превзойдёт 8, и часть окр-ти исчезнет, т.е. каждая окр-ть не может выйти за пределы своей коорд. четверти). При $a=0$ они выродятся в 4 точки, не леж. на квадрате, а при $a<0$ решений у втор. ур-ие, очевидно, не будет.
Заметим, что если окр-ти 1-ой и 4-ой коорд. четв-тей и имеют общ. точку с квадратом, то только при $x=0$ (квадрат располож. во II и III четв-ях), но тогда из-за наличия модуля симм. отн. Oy окр-ть также будет иметь ту же общ. точку с квад-ом, поэтому рассм-ть правые окр-ти не имеет смысла.
Также заметим, что если $(x_0; y_0)$ - реш-ие при некотором $a>0$, то $(x_0; -y_0)$ и $(16-x_0; y_0)$ явл. реш. (из симметрии отн. Ox и $x=8$). Т.к. нам нужно 2 реш-ие, то какая-то пара вышеупом. реш-ий совпадает, т.е.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0 = x_0 \\ y_0 = -y_0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = 16 - x_0 \\ y_0 = y_0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = 16 - x_0 \\ -y_0 = y_0 \end{cases} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ x_0 = 8 \\ \begin{cases} x_0 = 8 \\ y_0 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

В первом случае т.к. $y_0=0$, то $\left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 16 \end{array}\right.$, тогда окр-ти проходят через $(0;0)$ и $(16;0)$ (см. рис.)

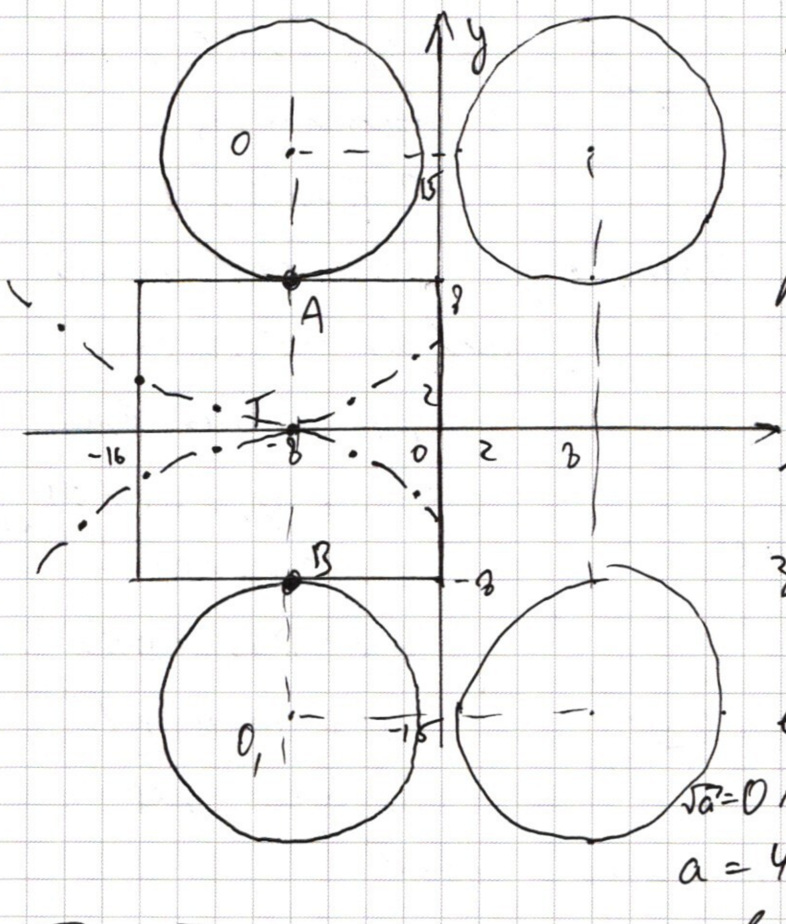


Из прям $\triangle OAB$:
$a = 15^2 + 8^2 = 17^2 = 289$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Во втором случае $x_0 = 8$, тогда реш-ями явл. точки кв-та $(8; 8)$ и $(8; -8)$.



~~Тогда радиус окр-ти~~ в т. касания

Тогда центры окр-ей O, O_1, центр кв-та T и реш-ия т. A, B лет. на прямой $x = -8$, при этом сторона кв-та ~~как~~ перп. этой прямой, значит окр-ти кас. стороны, и эти 2 реш. един., значит случай подх-т

$\sqrt{a} = OA = OT - AT = 15 - 8 = 7 \Rightarrow a = 49$.

Третий случай не подх-т, ведь если окр-ти проходят через $(-8; 0)$, то они, очевидно, пересекают кв-т еще в 4 точках (показано пунктиром с точками)

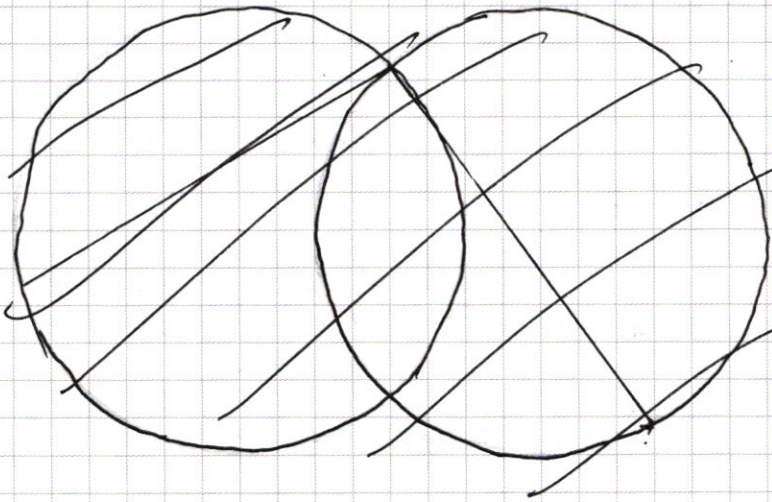
Итого, $a = 289$ и $a = 49$ – един. реш-ия задачи

Ответ: 49; 289.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

16

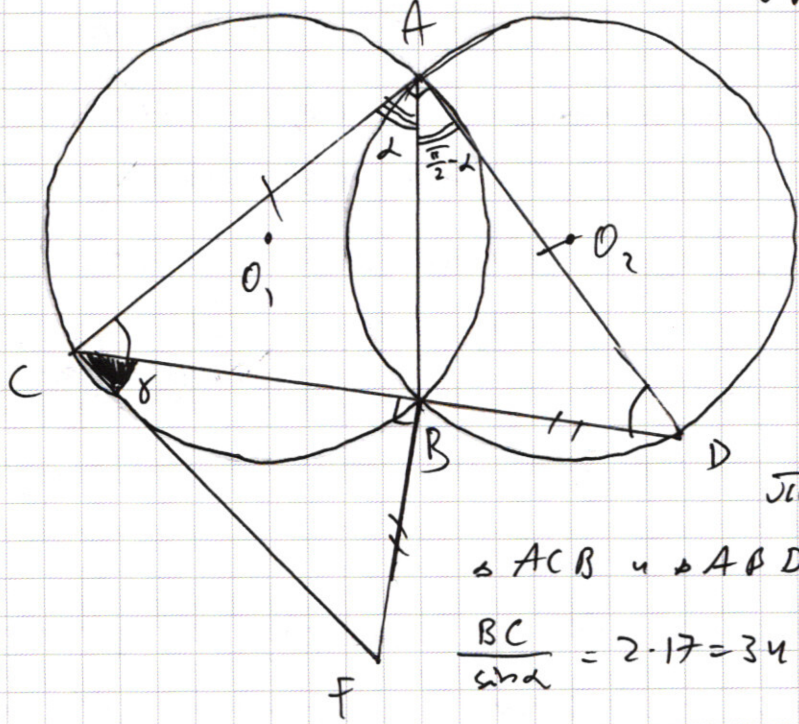
а) Пусть O_1 и O_2 — центр. окр-тей, проход. через набор точек A, B, C и A, B, D соотв.



Заметим, что $\triangle AO_1B = \triangle AO_2B$ по 3 сторонам $\Rightarrow$ $\angle AO_1B = \angle AO_2B$ $\Rightarrow$

Малые дуги $\breve{AB}$ обеих окр-ей равны $\Rightarrow$ равны опир. на них впис. углы $\angle ACB$ и $\angle ADB$

т.к. $\angle ACB + \angle ADB + \frac{\pi}{2} = \pi$ (из $\triangle ACD$), то $\angle ACB = \angle ADB = \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $\triangle ACD$ — прям. р/б.



По т. синусов для $\triangle ACB$ и $\triangle ABD$ соотв.:

$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2\cdot 17 = 34$; $\frac{BD}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = \frac{BD}{\cos\alpha} = 34$,

где $\alpha = \angle CAB$ $\Rightarrow$

$\sin\alpha = \frac{BC}{34}$, $\cos\alpha = \frac{BD}{34}$ $\Rightarrow$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{BC^2}{34^2} + \frac{BD^2}{34^2} = 1$ $\Rightarrow$

$BD^2 + BC^2 = BF^2 + BC^2 = 34^2$ $\Rightarrow$ из прям. $\triangle CBF$:

$CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = 34$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) Если $BC = 16$, то $BF = BD = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$

Если $\angle BCF$ обозн. за γ, то из прям $\triangle BCF$

$\sin\gamma = \frac{BF}{CF} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$; $\cos\gamma = \frac{16}{34} = \frac{8}{17} \Rightarrow$

$\sin\angle ACF = \sin(\gamma + \underset{=\frac{\pi}{4}}{\angle ACD}) = (\sin\gamma + \cos\gamma)\frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= \left(\frac{15}{17} + \frac{8}{17}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{34} + \frac{8\sqrt{2}}{34}$

$CD = BC + BD = 16 + 30 = 46 \Rightarrow$ из пр. р/б $\triangle ACD$:

$AC = AD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{46}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$S_{\triangle ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin\angle ACF}{2} = \frac{\cancel{46}^{23}}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{34}}{\cancel{2}} \cdot \left(\frac{15\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{34}} + \frac{8\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{34}}\right) =$

$= 23(15+8) = 23^2 = 529$

Ответ: а) 34

б) 529.

3) Рассм. втор ур-ие системы как кв-ое отн. y:

$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$

$\frac{D}{4} = (x+2)^2 + 3x^2 - 12x = 4x^2 - 8x + 4 = (2x-2)^2$

$\left[\begin{array}{l} y = -x-2+2x-2 = x-4 \\ y = -x\cancel{-2}-2x\cancel{+2} = -3x \end{array}\right.$

Рассм. отдельно эти случаи:

1. $y = -3x \Rightarrow$

$$\left(\frac{x^7}{3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\frac{x^{2\ln(27x^3)}}{3^{\ln 3x}} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\frac{x^{2\ln(9x^3)}\cdot x^{2\ln 3}}{3^{\ln 3x}} = x^{2\ln(9x^3)}$$

Т.к. x по ~~ОДЗ~~ ~~...~~ полож, то $x^{2\ln(9x^3)} > 0 \Rightarrow$

$$x^{2\ln 3} = 3^{\ln 3x} \quad \text{(ОДЗ не измен.)}$$

$$x^{2\ln 3} = \left(3^{\log_3 x^2}\right)^{\ln 3} = 3^{\ln 3\cdot\log_3 x^2} = 3^{\ln 3\cdot\frac{\ln x^2}{\ln 3}} = 3^{\ln x^2} \Rightarrow$$

$$3^{\ln x^2} = 3^{\ln 3x} \Leftrightarrow$$

$$\ln x^2 = \ln 3x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 3x \\ x > 0 \end{cases};\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 3,\ y = -3\cdot 3 = -9$$

2. $y = x - 4 \Rightarrow$ ОДЗ $\begin{cases} x - 4 < 0 \\ x > 0 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases};\ x \in (0;4)$

$$\left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x(x-4)^2)}$$

Прологарифмируем лев. и пр. части:

$$\ln(4-x)\ln\left(\frac{x^7}{4-x}\right) = \ln(x(x-4)^2)\ln x^2$$

$$\ln(4-x)(7\ln x - \ln(4-x)) = 2\ln x\cdot(\ln x + 2\ln(4-x))$$

$$\ln^2(4-x) - 3\ln(4-x)\cdot\ln x + 2\ln^2 x = 0$$

Если $\ln x = 0$, то $x = 1$ и $\ln^2(4-1) = 0$ – $\cancel{0}$ $\Rightarrow \ln x \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{\ln^2(4-x)}{\ln^2 x} - 3\frac{\ln(4-x)}{\ln x} + 2 = 0 \qquad \frac{\ln(4-x)}{\ln x} = t \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t^2-3t+2=0 \overset{\text{по т. Виета}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\ln(4-x)}{\ln x}=2 \\ \frac{\ln(4-x)}{\ln x}=1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \ln(4-x)=\ln x^2 \text{ с уч. ОДЗ} \\ \ln(4-x)=x \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-x=x^2 \\ 4-x=x \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x^2+x-4=0^* \\ x=2 \text{ - входит в ОДЗ.} \\ y=-2. \end{array}\right.$

$^*D=1+16=17$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}>0 \\ x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<0 \text{ (не уд. ОДЗ)} \end{array}\right.$

$\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \overset{<}{\vee} 4$; $\sqrt{17} \overset{<}{\vee} 9$; $17 \overset{<}{\vee} 81 \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ уд. ОДЗ

$y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}-4^2=\frac{-9+\sqrt{17}}{2}$

Итого: $\left[\begin{array}{l} x=3,\ y=-9 \\ x=2,\ y=-2 \\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\ y=\frac{-9+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

Ответ: $(3;-9)$, $(2;-2)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{-9+\sqrt{17}}{2}\right)$.

$\boxed{7}$ Рассм. $f(t)=3^t-4\cdot 3^{28}-93-3^{28}\cdot t+3t$, нам нужны целые x, при которых $f(x)<0$, ведь по усл.

$3^x+4\cdot 3^{28}<y\leq 93+3(3^{27}-1)x=93+3^{28}\cdot x-3x \Rightarrow$

$f(x)<0$.

$f'(t)=\ln 3\cdot 3^t-3^{28}+3$

$\ln 3\in(1;2)$

при $t=27$: $f'(t)=\ln 3\cdot 3^{27}-3^{28}+3=3^{27}\underbrace{(\ln 3-3)}_{<-1}+3<-3^{27}+3<0$

при $t=28$: $f'(t)=\ln 3\cdot 3^{28}-3^{28}+3=3^{28}\underbrace{(\ln 3-1)}_{>0}+3>0$

Т.к. при $x=4$ $f(x)=0$, а при $x=5$ $f(5)<0$, то

~~вплоть до 27 вкл-но f(t)~~ $f(t)<0$ при $t\in[5;27]$.
по свойству мон. функций, ведь $f'(t)$ — мон. функция,
и как мы убедились при каком-то $t_0\in(27;28)$
$f'(t_0)=0.\Rightarrow$ при $t<t_0$ $f'(t)<0$, а при $t>t_0$ $f'(t)>0$.

При $t=31$: $f(t)=27\cdot3^{28}-4\cdot3^{28}-93-3^{28}\cdot31+3\cdot31=$
$=-8\cdot3^{28}-93+93<0$

Т.к. на $t\in[28;31]$ $f(t)$ возр., то при дан. t $f(t)<0$.
При $t=32$: $f(t)=81\cdot3^{28}-4\cdot3^{28}-93-3^{28}\cdot32+3\cdot32=$
$=45\cdot3^{28}-3>45\cdot3-3>0$

При $t\geqslant32$ $f(t)$ возр. $\Rightarrow$ при тех же t $f(t)>0$.
Получаем, что $f(t)$ отр. только при целых t в пр-ке $[5;31]$. Значит $5\le x\le31$. При заданном x нам подходят все целые $y\in(3^x+4\cdot3^{28};\ 93+3(3^{27}-1)x]$, а это, несложно посчитать, $93+3^{28}\cdot x-3x-3^x-4\cdot3^{28}$ чисел
Значит ответ равен:

$$\sum_{x=5}^{31}(93+3^{28}\cdot x-3x-3^x-4\cdot3^{28})=\sum_{x=5}^{31}(93-4\cdot3^{28})+(3^{28}-3)\sum_{x=5}^{31}x-$$

$$-\sum_{x=5}^{31}3^x=27(93-4\cdot3^{28})+(3^{28}-3)\cdot\frac{27\cancel{(5+31)}^{18}}{\cancel{2}}-\frac{3^5(3^{27}-1)}{3-1}=$$

$$=2511-108\cdot3^{28}+486\cdot3^{28}-1458-\frac{81\cdot3^{28}}{2}+\frac{3^5}{2}=$$

$$=1053+378\cdot3^{28}-\frac{81\cdot3^{28}}{2}+\frac{243}{2}=\frac{675\cdot3^{28}}{2}+\frac{2349}{2}$$

Ответ: $\frac{675\cdot3^{28}}{2}+\frac{2349}{2}$.

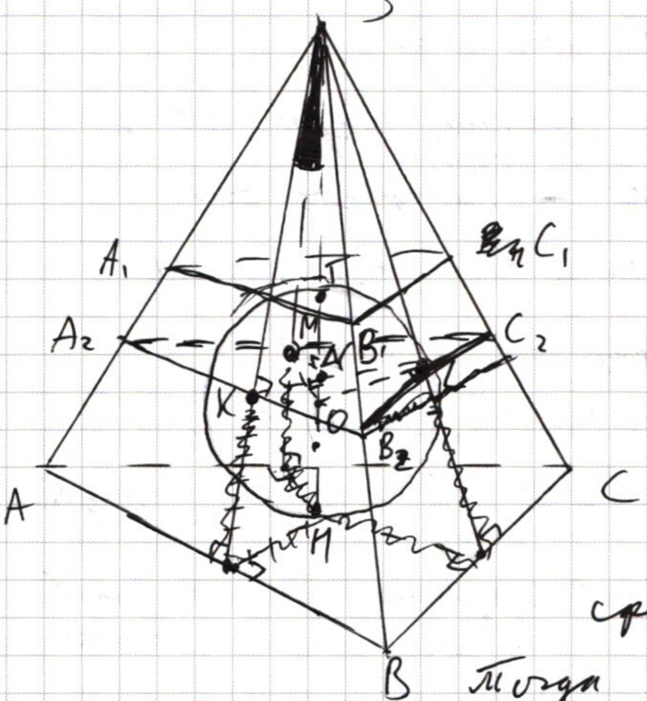
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{4}$



Пусть пл-ть, кас. сферы и дающая сечение площадью 16, пересекает рёбра триэдра в т. A, B и C, а другая пл-ть — в т. A_1, B_1, C_1 соотв так, что прямые AA_1 BB_1 и CC_1 содерж. рёбра триэдра

Пусть пл-ть (ABC) кас. сферы в т. H, а $(A_1B_1C_1)$ — в т. T. Тогда по свойству касания $OT \perp (A_1B_1C_1)$, но по усл. $OS \perp (A_1B_1C_1)$. Т.к. из точки возможно провести един. перп-р к пл-ти, то $T \in SO$. Аналогично $H \in SO$. $\Rightarrow ST \perp (A_1B_1C_1)$, $SH \perp (ABC) \Rightarrow ST$ — высота в $SA_1B_1C_1$; SH — выс. в $SABC$. Т.к. $SO \perp (A_1B_1C_1)$ и $SO \perp (ABC)$, то $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \Rightarrow$ они отсекают гомотетичные пирамиды. Пусть коэф их подобия равен $k \Rightarrow \frac{ST}{SH} = k$ (соотв. высоты)

$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = k^2$ (соотв. осн-ия) $\Rightarrow \frac{ST}{SH} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

Пусть r — радиус сферы $\Rightarrow \frac{ST}{ST+2r} = \frac{3}{4}$; $4ST = 3ST + 6r$; $ST = 6r$. Т.к. $OK \perp (SAB)$ (т. K — т. кас.), то $\angle SKO = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ из прям. $\triangle SKO$: $\sin\angle KSO = \dfrac{OK}{OS} = \dfrac{r}{ST+r} = \dfrac{r}{7r} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow$

$\angle KSO = \arcsin\frac{1}{7}$ ($\angle KSO$ точно острый, ведь это угол в прям. $\triangle$-ке)

$\triangle KSO = \triangle LSO = \triangle MSO$ (как прям. с общ. гип. и равными r кат.)

Если $KN \perp SO$ ($N \in SO$), то и $LN \perp SO$ и $MN \perp SO$, т.е. KN, LN и MN - высоты в равн. $\triangle$-ах

Как известно, мн-во всех прямых, перп. SO и проход. через данную т. N — ГМТ плоскость $\Rightarrow$ $N \in (KLM)$, причём $(KLM) \perp SO$, т.к. $KN \perp SO$, $LN \perp SO$; $KN \cap LN = N$ (по признаку, короче), $\Rightarrow$ $(KLM) \parallel (ABC) \Rightarrow$ Если $(KLM) \cap AA_1$, BB_1 и CC_1 в т. A_2, B_2 и C_2 соотв, то $SABC$ и $SA_2B_2C_2$ подобны с коэф. $\frac{SN}{SH}$, т.к. $SN \perp (A_2B_2C_2)$, поэтому SN и SH - соотв. высоты

Из прям $\triangle KSO$: $KS = \sqrt{SN \cdot SO}$ (по свойству) $\Rightarrow$

$SN = \dfrac{KS^2}{SO} = \dfrac{SO^2 - OK^2}{SO} = SO - \dfrac{OK^2}{SO} = 7r - \dfrac{r^2}{7r} = \dfrac{48r}{7} \Rightarrow$

$\dfrac{SN}{SH} = \dfrac{\overset{6}{\cancel{48}}r}{7 \cdot \cancel{8}r} = \dfrac{6}{7}$. При этом $\triangle A_2B_2C_2$ и $\triangle ABC$ - соотв. у подоб. пирамид $SABC$ и $SA_2B_2C_2$

$\Rightarrow \dfrac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{SN}{SH}\right)^2 = \dfrac{36}{49} \Rightarrow S_{A_2B_2C_2} = \dfrac{16 \cdot 36}{49} = \dfrac{576}{49}$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{1}{7}$; $S_{A_2B_2C_2} = \dfrac{576}{49}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(t) = 3^x - 4\cdot 3^{28} - 93 - 3^{28}x + 3x$

$f'(t) = 3^x \ln 3 - 3^{28} + 3$

$f'(t) > 0$ при $x \geq 28$

$3^{28} - 4\cdot 3^{28} - 93 - 3^{28}\cdot 28 + 3\cdot 28$

$3\cdot 3^{28} - 4\cdot 3^{28} - 93 - 3^{28}\cdot 29 + 3\cdot 29$

$27\cdot 3^{28} - \cancel{4\cdot 3^{28}} - 93 - 3^{28}\cdot 31 + 3\cdot 31$

$\left(\frac{3^x}{3^2}\right)^{\ln 9} = 9^{\ln 3^5}$

$3^{10\ln 3} = 3^{10\ln 3}$

$93 \times 27 = 651 + 186 = 2511$

$27 \times 4 = 108$

$36 \times 16 = 216 + 36 = 576$

$81 - 36 = 45$

$486 - 108 = 378$

$81 \times 18 = 243\cdot 6 =$

$= 3778$

58

$27 \times 18 = 216 + 27 = 486$

$486 \times 3 = 1458$

$\frac{5}{7}; \quad \frac{485}{7} =$

$\frac{5}{7}\cdot 4532511$

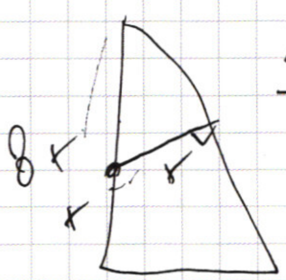
$1458 - 1 = 103$

$z^2 =$

$\frac{79}{t^2\cdot 48} = \frac{103}{48t^2} + \frac{148}{t^2}$

$\boxed{✓}$ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

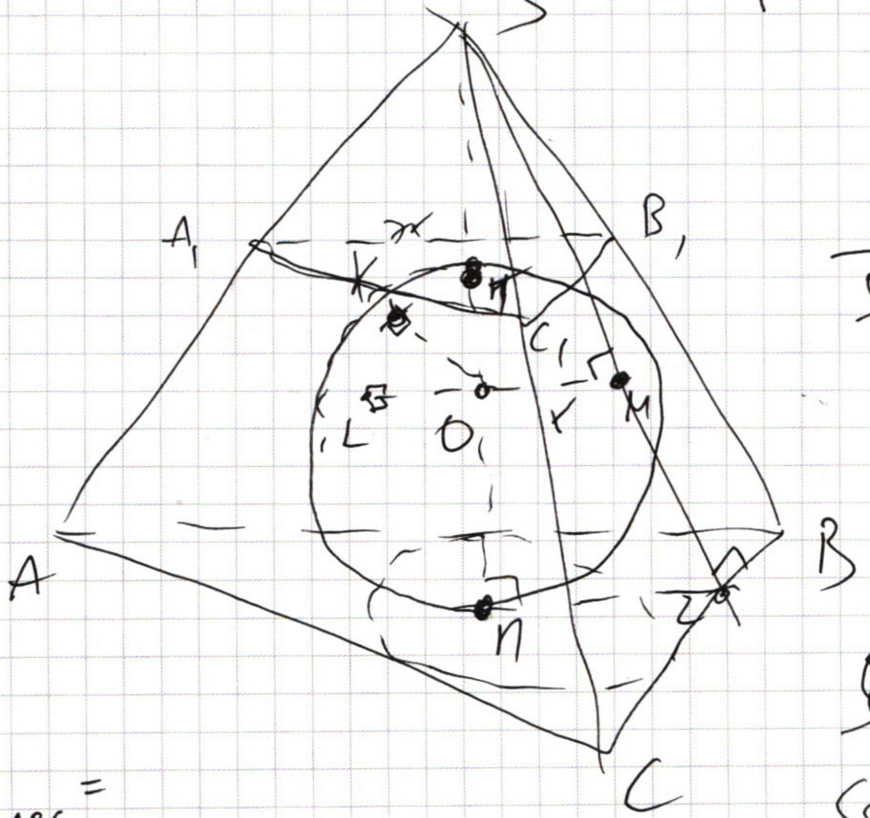


$$\frac{h}{8r} = \cancel{7\pi}$$

$$\frac{h}{R_{ABC}} = \frac{7r}{r} = 7$$

$$P = \frac{2(S_{б.п.} - S_{осн})}{h} = \frac{14 S_{осн}}{7 R_{ABC}} =$$

$=$



$$\frac{ST}{\cancel{8}T + 2r} = \frac{3}{4}$$

$$ST = 6r$$

$$\cancel{STTT} = 8r$$

$$S_{б.п.} - S_{осн.} = 7 S_{осн}$$

$$S_{б.п.} = 8 S_{осн} = 128$$

$R_{ABC} =$

$$\frac{1}{3} S_{б.п.} \cancel{r} = S_{осн} \cdot \frac{h}{r\cancel{2}} = \frac{8}{\cancel{3}} S_{осн}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 16 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$S'_{б.п.} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} S_{осн} = 2 S_{осн} = 32$$

$$\cancel{36 \cdot 76 S'_{б.п.} - 9}$$

$$(S_1 + S_2 + S_3 - 9) r = \frac{1}{3} \cdot \cancel{S} 6r \cdot 9$$

$$22r = 18r$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

64827 | 3
21609 | 3
7203 | 3
2401 | 7
343 | 7
49 | 7
7 | 7
1

$3^3 \cdot 7^4$

$4 \cdot 3^{28} > 9^2 + 3^{28} x - 3x$

$4 \cdot 3^{28} > 92 + 3^{28}x - 5x$

$343 \cdot 7 = 2401$

$2401 \cdot 27 = 64827$

$AB = 17\sqrt{2}$

9 9 9 9

9 9 9 3

9 9 9 6

9 9 _ _ 4 × 7

9 6 _ _ 4 × 7

9 3 _ _ 4 × 7

4 × 9 − 1

4 × 6 − 1

4 × 3 − 1

3 × 9 + 3; 6

6 6 6 _

1. только 4 сем.

2. 5 сем. – (3;3;3), (6;6;6), (9;9;9)

3. 6 сем. – (9;3), (9;6), (9;9)

4. 7 сем – 0

остались 4 цифры

семёрки

$BC^2 + BD^2 = 34^2$

$BC^2 = CD^2 - 2BC \cdot CD = 34^2$

$\frac{CD-BC}{34} = \frac{BC}{\sin\alpha}$

$BC\cos\alpha + BC\sin\alpha = CD\cos\alpha$

$AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos\alpha = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB\cos\alpha$

$3^x + 4 \cdot 3^{28} > 93 + 3^{28}x - 3x$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$2\cos 5x\cos 2x + 2\sin 2x\cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x \cdot \cancel{\sqrt{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})} + \cancel{\sqrt{2}}\cos 4x = 0$

$(\cos 2x + \sin 2x)$

$(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)$

$(\cos 2x + \sin 2x)(2\cos 5x + 2\cos(2x + \frac{\pi}{4}))$

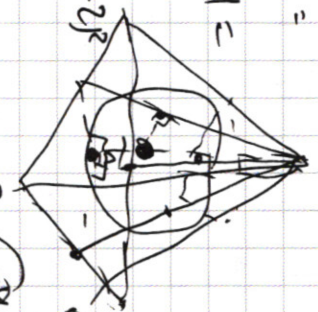
$y < 0$

$x > 0$

$y^2 + 2xy + x^2 -$

$\frac{y^2}{2} + 2 \cdot \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}x + 2x^2 - 5x^2$

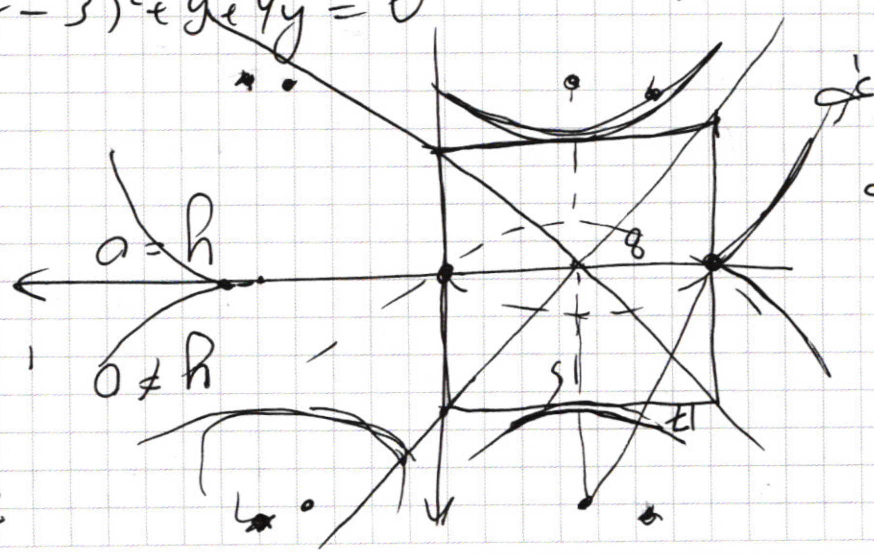
$\frac{y^2}{2} + 2 \cdot \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} + 8$



$y^2 + 2xy + x^2 - (4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 9) + 9 + 4y = 0$

$\boxed{682}$

$(x+y)^2 - (2x-3)^2 + 9 + 4y = 0$



черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)