

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r}
 64827 \mid 3 \\
 21609 \mid 3 \\
 7203 \mid 3 \\
 2401 \mid 7 \\
 343 \mid 7 \\
 49 \mid 7 \\
 7 \mid 7 \\
 1 \mid
 \end{array}$$

№1

$$\begin{array}{r}
 64827 \mid 3 \\
 \underline{6} \\
 4 \\
 \underline{3} \\
 18 \\
 \underline{18} \\
 27 \\
 \underline{27} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 21609 \mid 3 \\
 \underline{21} \\
 6 \\
 \underline{6} \\
 9 \\
 \underline{9} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7203 \mid 3 \\
 \underline{6} \\
 12 \\
 \underline{12} \\
 3 \\
 \underline{3} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2401 \mid 7 \\
 \underline{21} \\
 30 \\
 \underline{28} \\
 21 \\
 \underline{21} \\
 0
 \end{array}$$

Восьмизначное число будет состоять из трёх 3; четырёх 7 и одной 1 или из одной 9; одной 3; двух 1; четырёх 7, чтобы произведение ~~его~~ цифр было равно 64827.

Если число состоит из трёх 3; четырёх 7 и одной 1; то количество таких чисел $\frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} =$

$$= 40 \cdot 7 = 280$$

Если число состоит из одной 1; одной 3; двух 1; четырёх 7; то количество таких чисел $\frac{8!}{2! \cdot 4!} =$

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} = 280 \cdot 3 = 840$$

Количество подходящих чисел $840 + 280 = 1120$

Ответ у 1120 чисел произведение цифр равно 64827.

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \end{cases} \quad \sqrt{7}$$

$$\begin{cases} y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$$x = 4$$

$$x = 31$$

в этих точках не будет решений

Но есть только на промежутке $4 < x < 31$ будут находиться решения.

При $x=5$ $y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$ будет $y > 3^5 + 4 \cdot 3^{28}$

Мы можем считать 3^x как арифметическую прогрессию

при $x=5$; 3^x будет равно 3^5 , а при $x=30$ будет 3^{30}

Сумма ~~всех~~ значений 3^x при $4 < x < 31$

$$S = \frac{3(3^{30} - 1)}{2}$$

Сумма всех значений $3^x + 4 \cdot 3^{28}$ при $4 < x < 31$ равно $x \in \mathbb{Z}$

$$\frac{3(3^{30} - 1)}{2} + 100 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$$y \leq 93 - 3x + x \cdot 3^{28}$$

$93 - 3x + x \cdot 3^{28}$ - арифметическая прогрессия

с разностью при $x \in \mathbb{Z}$ $d = -3 + 3^{28}$

$93 - 3x + x \cdot 3^{28}$ при $x=5$; равно $75 + 5 \cdot 3^{28}$

$93 - 3x + x \cdot 3^{28}$ при $x=30$; равно $3 + 30 \cdot 3^{28}$

Сумма ~~на~~ ~~промежутке~~ $x \in [5; 30]$ при $x \in \mathbb{Z}$

$$4 < x < 31 \quad S = \frac{75 + 5 \cdot 3^{28} + 3 + 30 \cdot 3^{28}}{2} \cdot 25 = 875 + 437,5 \cdot 3^{28}$$

$$\cdot 3^{28}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Разница между суммой и есть количество ~~пар~~ пар
целых чисел.

$$875 + 437,5 \cdot 3^{28} - \frac{3^{31} - 3}{2} - 100 \cdot 3^{28} =$$

$$= 337,5 \cdot 3^{28} + \frac{1753 - 3^{31}}{2}$$

П.к. $y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$ нужно исключить еще 25 пар.

$$337,5 \cdot 3^{28} + \frac{1753 - 3^{31}}{2} - 25 =$$

$$= 337,5 \cdot 3^{28} + \frac{1703 - 3^{31}}{2}$$

Ответ кол-во целых пар $337,5 \cdot 3^{28} + \frac{1703 - 3^{31}}{2}$
/5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ ((x+8)^2 + (y-15)^2) = a \end{cases}$$

1) Если $x+y+8 \geq 0$, и $x-y+8 \geq 0$; то

$$x+y+8+x-y+8=16$$

$$2x=0$$

$$x=0$$

$-8 \leq y \leq 8$, чтобы соблюдалось условие

2 решения при

$$y \in [-8; 0] \cup [0; 8]$$

1 решение

$$y=0, x=0 \text{ при } a=289$$

минимальный a при $y=8$ или $y=-8$

$$a = 64 + 49 = 113$$

максимальный a при $y=0$ (но он исключается)

$$a = 289$$

2 решения $a \in [113; 289)$.

2) Если $x+y+8 \geq 0$ $x+8-y \leq 0$; то

$$x+y+8 - x+y-8 = 16$$

$$2y = 16$$

$$y = 8$$

$-16 \leq x \leq 0$, для того чтобы соблюдалось условие

2 решения при

$$x \in [-16; -8]; (-8; 0].$$

1 решение при

$$x = -8$$

$$a = 49$$

a - минимальный a при $x = -8$ $a = 49$ (исключ).

a - макс при $x = 0$ или $x = -16$ $a = 113$

2 решения при $a \in (49; 113]$.

3) Если $x+y+8 \leq 0$ $x-y+8 \geq 0$; то

$$-x-y-8 + x-y+8 = 16$$

$$-2y = 16$$

$$y = -8$$

$-16 \leq x \leq 0$, чтобы соблюдалось условие

2 решения при

$$x \in [-16; -8]; (-8; 0].$$

1 решение при

$$x = -8$$

$$a = 49.$$

a - минимальный при $x = -8$ $a = 49$ (исключаем)

a - максимальный при $x = 0$ или $x = -16$

2 решения при $a \in (49; 113]$.

4) Если $x+y+8 \leq 0$ и $x-y+8 \leq 0$; то

$$-x-y-8 - x+y-8 = 16$$

$$-2x = 32$$

$$x = -16$$

$-8 \leq y \leq 8$, чтобы соблюдалось условие

2 решения при

$$y \in [-8; 0); (0; 8].$$

a - минимальный при $y = 8$ $a = 289$ или $y = -8$ $a = 289$

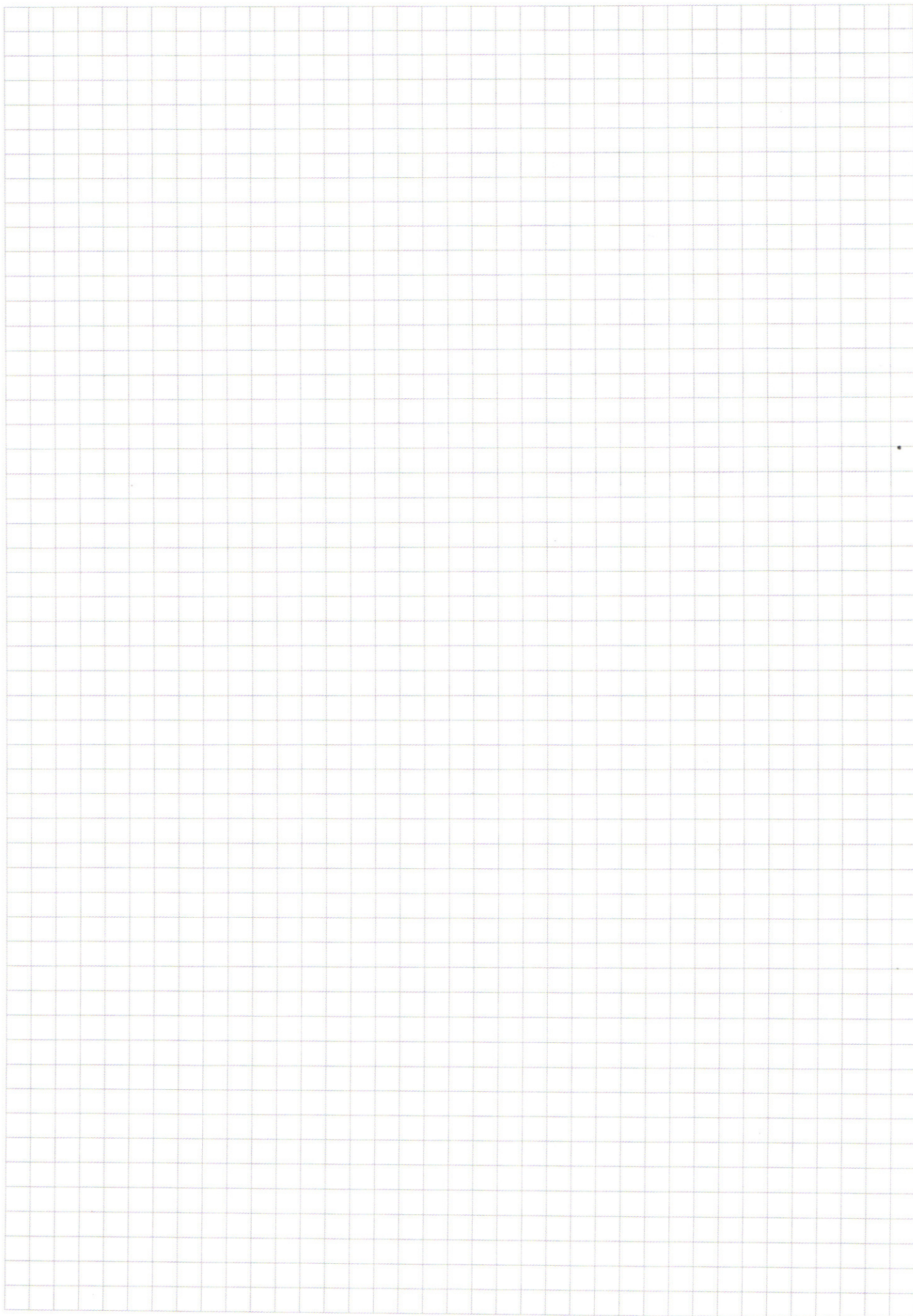
a - максимальный при $y = 0$ $a = 289$ (исключаем)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 решения при $a \in [113; 289]$ ^{N5}

1 решение
 $y=0$ $a=289$.

5) Два решения в общем будет только при $a=49$ и
 $a=289$, а в других случаях 4 решения
Ответ $a=49; a=289$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

1) Если $x+y+8 \geq 0$; $x-y+8 \geq 0$, то

$$2x = 0$$

$$x=0 \quad -8 \leq y \leq 8$$

$64 +$

$$(y-15)^2 = a-64$$

$$y^2 - 30y + 225 = a - 64$$

$$\begin{array}{r} x=0 \\ y \\ z \end{array} \quad \begin{array}{r} +64 \\ +63 \\ +50 \end{array} \quad \begin{array}{r} +225 \\ 64 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$64 + 49 = a$$

$$a \in [113; 289)$$

$$2) \quad x+y+8 \geq 0 \quad x-y+8 \leq 0, \text{ mo}$$

$$x+y+8 - x+y-8 = 16$$

$$24 = 16$$

$$-16 \leq x \leq 16$$

$$y=8$$

$$(x-8)^2 + 49 = a$$

3) $x+y+z \leq 0$ $x-y+z \geq 0; mo$

$$-x - y - 8 + y + 8 = 16$$

$$-2y = 16$$

$$4 = -8 \quad \text{b} \quad -16 \leq x \leq 0$$

$$(x-8)^2 + 49 = 0$$

4) $x+y+8 \leq 0$ $x-y+8 \leq 0$

$$-x - y - 8 - x + y - 8 = -16$$

$$-2x = 32$$

$$x = -16$$

$$-8 \leq f \leq 8$$

$$64 + (14 - 15)^2 = a$$

$$a \in [113, 289).$$

Problem $a = 49, 289$.

$$\begin{array}{r} 64 \\ + 49 \\ \hline 113 \end{array}$$

$x \neq 2$

$a \in f^{-1}(113)$

$$a \in (49, 113]$$

$$2 \sin 2x \cos 5x + 2 \sin 2x \sin 5x$$

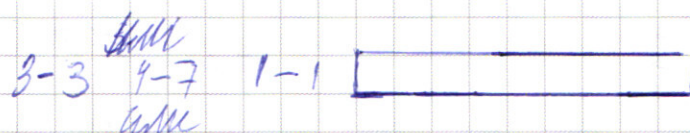
$$\begin{array}{r} 7203 \overline{) 3} \\ - 6 \\ \hline 12 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2407 \overline{) 343} \\ - 21 \\ \hline 30 \\ - 28 \\ \hline 27 \\ 32 \\ \hline 343 \\ - 2401 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ - 28 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 3} \\ 21609 \overline{) 3} \\ 7203 \overline{) 3} \\ 2401 \overline{) 7} \\ 343 \overline{) 7} \\ 49 \overline{) 7} \\ 7 \overline{) 7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 3} \\ 21609 \overline{) 3} \\ 7203 \overline{) 3} \\ 2401 \overline{) 7} \\ 343 \overline{) 7} \\ 49 \overline{) 7} \\ 7 \overline{) 7} \end{array}$$



$$1-9, 1-3, 1-7, 2-1$$

$$1321$$

$$24$$

$$\begin{array}{r} 1122 \\ 1212 \\ 1221 \\ \hline 2112 \\ 2121 \\ 2211 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 2} \\ 5 \overline{) 2} \\ 5 \overline{) 2} \end{array}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!} + \frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{2 \cdot 280}{840}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$+ 2 \sin 5x \cos 5x = 2 \cos 2x \cos 5x$$

$$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) = 3$$

$$\begin{array}{r} 658 \\ - 169 \\ \hline 489 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ - 3 \\ \hline 320 \\ - 7281 \\ \hline 657 \end{array}$$

$$*31 (31)$$

$$\begin{array}{r} 200 \\ + 840 \\ + 280 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3^{28} x - 3x$$

$$x > 4 \quad x=5 \quad y \geq 4^5 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 75 + 5 \cdot 3^{28}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28} x - 3x$$

$$(4-x) \cdot 3^{28} = -3^x + 93 - 3x$$

$$d = 3^{28} \cdot 486$$

$$x=7 \quad y > 3^6 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 69 \cdot 6 \cdot 3^{28}$$

$$n = 3^6 + 6 \cdot 2 \cdot 3^{28}$$

$$n = 3^{28} - 169$$

$$x=6 \quad y > 729 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 729 + 6 \cdot 3^{28}$$

$$n = 3^{28} - 658$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3(-56) + 3^{28}$$

$$3^2(81-8) + 2 \cdot 3^{22}$$

(-43 - 146)

3736-

729 23

706

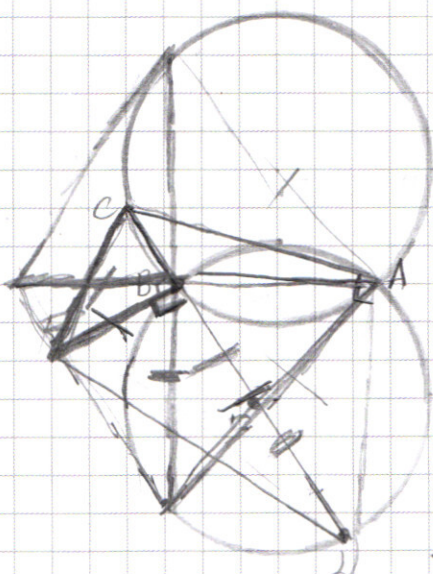
$$\begin{array}{r} 56 \overline{) 9} \\ - 56 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$3(729 \cdot 3 - 22) =$$

$$\begin{array}{r} 729 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

$2(\sin$

$\sqrt{6}$



$$\sqrt{CB \cdot CD}$$

$$y = 3 + 3^{28} \cdot 30^8$$

$$S_1 - S_2 = +$$

~~unimportant S.~~

$$13 \cdot 28$$

$$\sqrt{3}$$

$$(y^2 + 2xy + x^2) + (-4x^2 + 12x + 4y) = 0$$

$$(y+x)^2 + 4(-x^2 + 3x + y) = 0$$

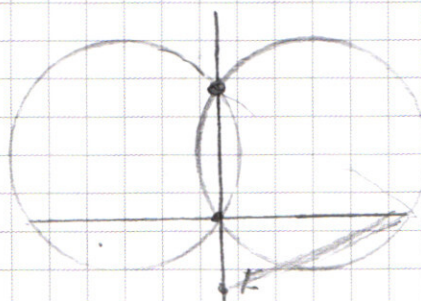
$$1. y < 0 \quad (y(y+x+4) = 3x(x-y+4))$$

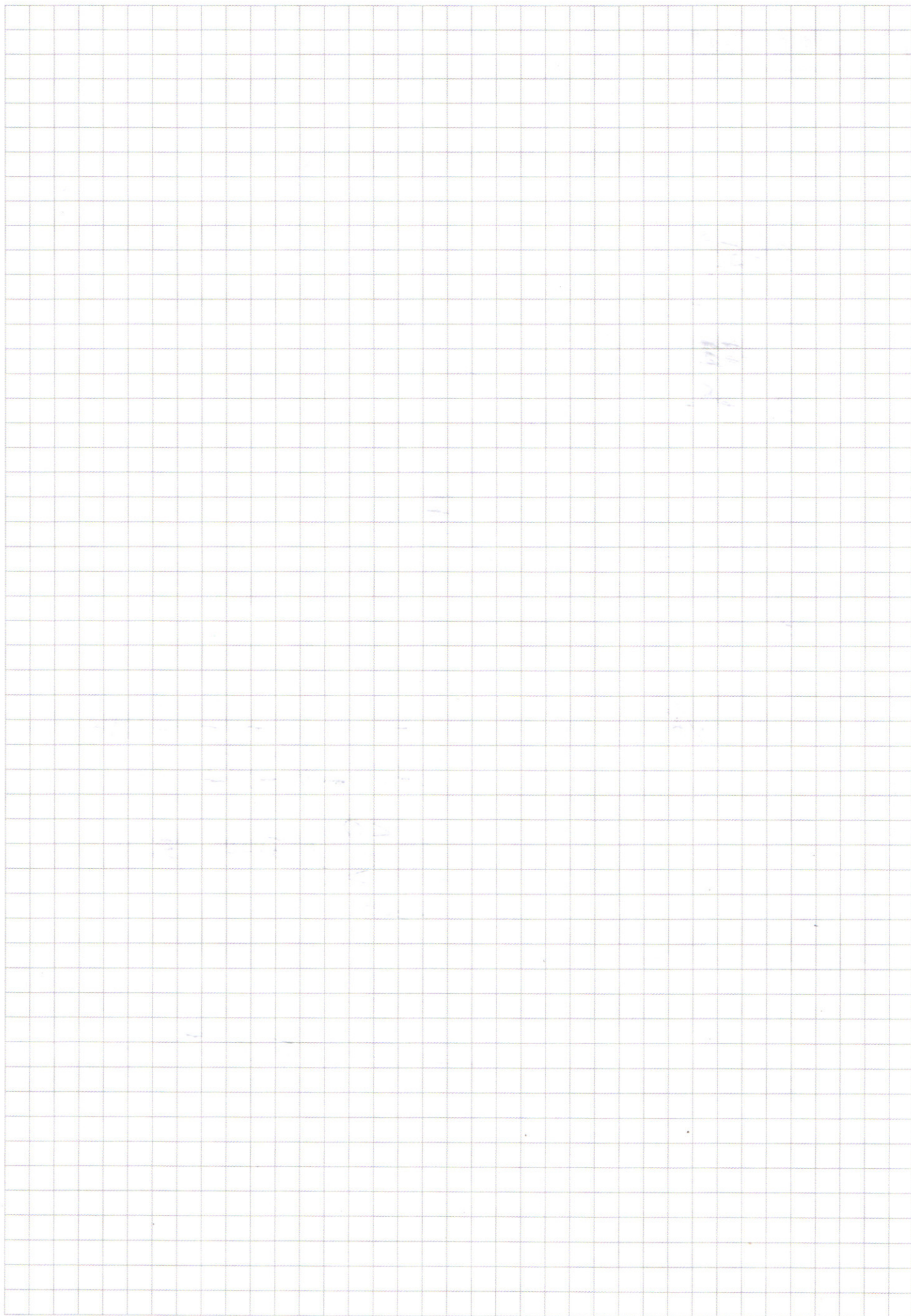
$\frac{1}{x^2}$

$$g^2$$

$$3 \times 7 - 1 \times 9$$

$$(y^2 - xy + 4y) \div (3x^2 - xy -$$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)