МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Произведение цифр = 64827

$64827 = 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7 \Rightarrow$ Цифры: 3; 3; 3; 7; 7; 7; 7; 1

Повторения: $n_3 = 3$; $n_7 = 4$

$P_{8\,(повт)} = \frac{8!}{3!\cdot4!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 5\cdot7\cdot8 = 280$ чисел.

Ответ: 280 чисел.

№2.

$\cos7x + \cos3x + \sin7x - \sin3x + \sqrt2\cos4x = 0$

$2\cos5x\cos2x + 2\sin2x\cos5x + \sqrt2(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2\cos5x(\cos2x + \sin2x) + \sqrt2(\cos2x - \sin2x)(\cos2x + \sin2x) = 0$

$(\cos2x + \sin2x)(2\cos5x + \sqrt2(\cos2x - \sin2x)) = 0$

$$\left[\begin{array}{ll} \cos2x + \sin2x = 0 & (1) \\ 2\cos5x + \sqrt2(\cos2x - \sin2x) = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1): $\cos2x + \sin2x = 0 \mid :\cos2x \ (\cos2x \neq 0)$

$tg2x + 1 = 0$, $tg2x = -1$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k\in\mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}$

(2): $2\cos5x + \sqrt2(\cos2x - \sin2x) = 0 \mid :2$

$\cos5x + \frac{\sqrt2}{2}\cos2x - \frac{\sqrt2}{2}\sin2x = 0$

$\cos5x + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$

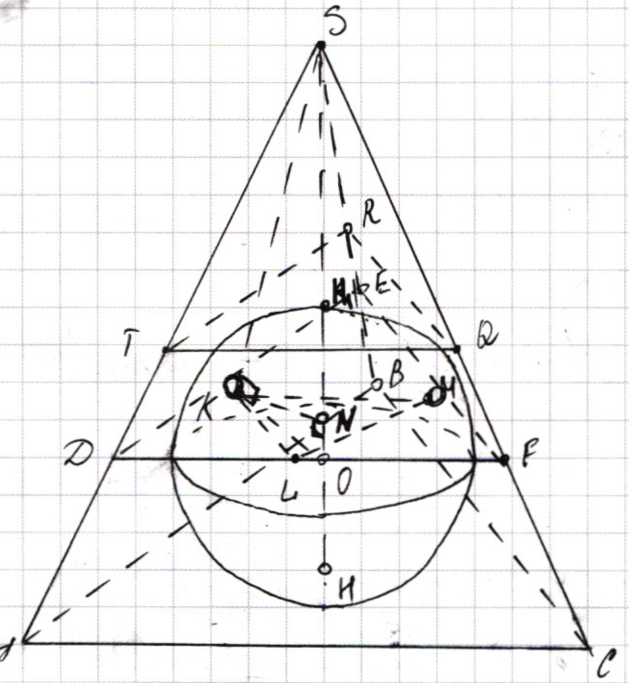
$2\cos\left(\frac72 x + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac32 x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac72 x + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac32 x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac72 x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\in\mathbb{Z} \\ \frac32 x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}k, k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ: $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi}{7}k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k,\ k\in\mathbb{Z}$

№4.



Решение:

1) $S_{\Delta TRQ}=9;\ S_{\Delta ABC}=16$

$SO\perp(TRQ);\ SO\perp(ABC)\Rightarrow(ABC)\parallel(TRQ)$

$STRQ$ – пирамида ; SH_1 – высота
$SABC$ – пирамида ; SH – высота

$\frac{SH_1^2}{SH^2}=\frac{S_{\Delta TRQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{9}{16};\ SH_1=\frac{3}{4}SH$

(причём $(O;H_1;H)\in SH$)

2) $H_1H=SH-SH_1=\frac{1}{4}SH$; $H_1H=2r\Rightarrow r=\frac{1}{8}SH$ (где r – радиус сферы)

$OK=r=\frac{SH}{8}$

3) ΔSKO: $SO=SH_1+H_1O=SH_1+r=\frac{7}{8}SH$; $OK=\frac{1}{8}SH$

$\angle SKO=90°$ (т.к. K – точка касания сферы и (ABS))

$\sin\angle KSO=\frac{OK}{SO}=\frac{SH\cdot 8}{8\cdot 7SH}=\frac{1}{7}$; $\angle KSO=\arcsin\frac{1}{7}$

4) $\Delta SKO\sim\Delta KNO$ ($\angle KNO=\angle SKO=90°$; $\angle SOK$ – общий)

(причём $N\in SO$ и $ON\perp KLM\Rightarrow ON\perp KN$)

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

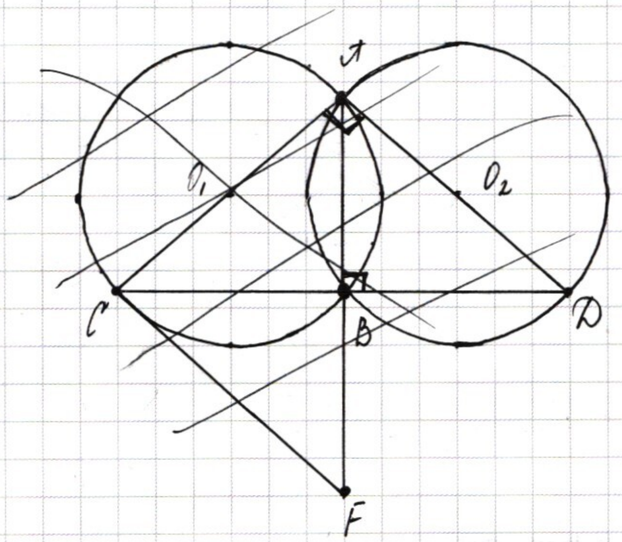
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

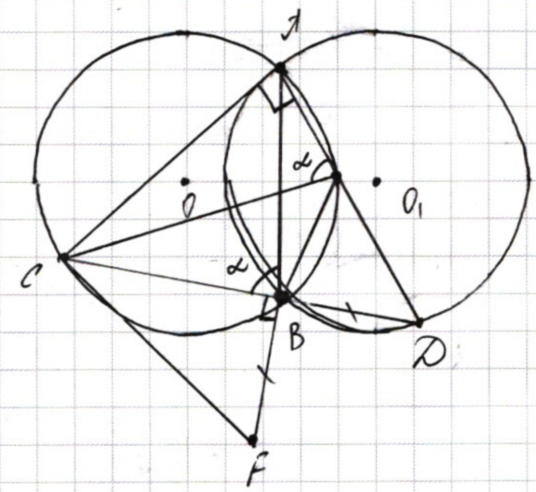
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

~~Решение~~:





№3.

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & (1) \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 & (2) \end{cases}$$

(1): ОДЗ: $\begin{cases} -y>0 \\ xy^2>0 \\ -\frac{x^7}{y}>0 \\ -\frac{x^7}{y}\neq 1 \\ x\neq 1 \\ x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} y<0 \\ x>0 \\ y>x^7 \\ -x^7\neq y \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

Ответ: нет решений.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{ON}{OK} = \frac{OK}{OS}$; $\frac{ON \cdot 8}{SH} = \frac{1}{7}$; $ON = \frac{1}{56} SH$

5) ~~Sсеч~~

$(KML) \cap AS = D$; $(KML) \cap BS = E$; $(KML) \cap CS = F$

$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{SN}{SH}\right)^2$; $SN = SO - ON = \frac{7SH}{8} - \frac{SH}{56} = \frac{48 SH}{56} = \frac{6SH}{7}$

$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{6SH}{7SH}\right)^2 = \frac{36}{49}$; $S_{\triangle DEF} = \frac{36 \cdot 16}{49} = \frac{576}{49} = S_{сеч.}$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$; $S_{сеч} = \frac{576}{49}$

№5.

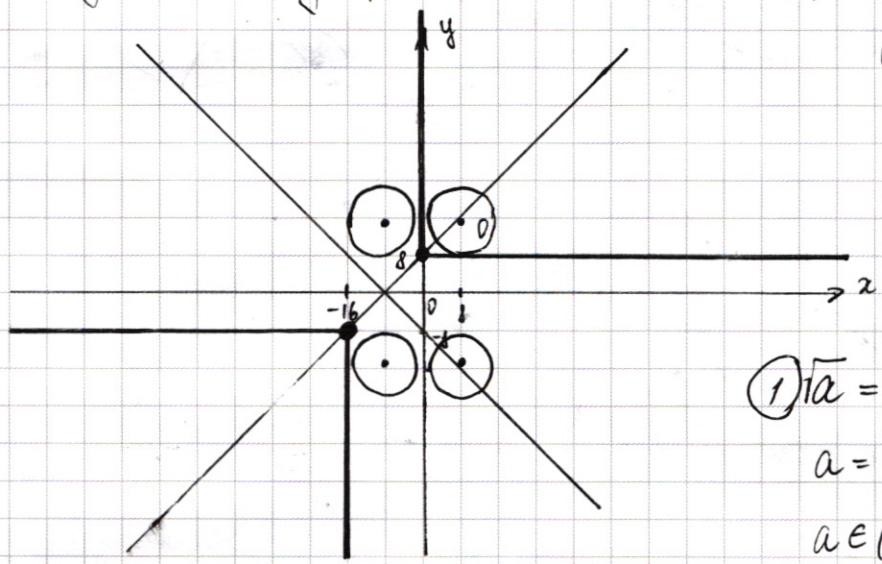
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1). \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2). \end{cases}$$

a - ? ; ровно 2 решения.

(1): $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

(2): $(|x|-8)^2 + (|y|-15) = a$

$O'(8; 15)$; $R = \sqrt{a}$



① $\sqrt{a} = 7$; $\sqrt{a} = 8$

$a = 49$; $a = 64$

$a \in (49; 64)$

Это единственное возможное решение, т.к. при дальнейшем увеличении a система будет иметь ≥ 3 решений.

$x+y+8 = 0$; $y = -x-8$

$x-y+8 = 0$; $y = x+8$

I: $(x+y+8) < 0$; $(x-y+8) < 0$; $x = -16$

II: $(x+y+8) < 0$; $(x-y+8) \geq 0$; $y = -8$

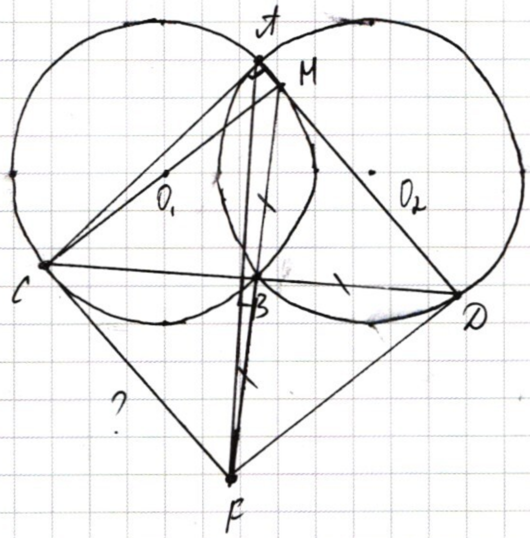
III: $(x+y+8) \geq 0$; $(x-y+8) \geq 0$; $x = 0$

IV: $(x+y+8) \geq 0$; $(x-y+8) < 0$; $y = 8$

Ответ: $a \in (49; 64)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.



Решение:

а) 1) $FB \cap AD = M$; $M \in$ окр. 1.

$\angle CBM = 90°$, т.к. опирается на d.

2) $CMDF$ — ромб, т.к. $MF \perp CD$ — диагонали. $\Rightarrow CM = 2r = CF$

$CF = 34$.

б) 3) $BC = 16 \Rightarrow BF = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{400} = 20 = BD$

$BM = \sqrt{34^2 - 16^2} = 20$

Ответ: $CF = 34$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

$x+y+8=0 \qquad x-y+8=0$

$y=-x-8 \qquad y=x+8$

$x+y+8+x-y+8=16$

$x=0$

$x+y+8-x+y-8=16$

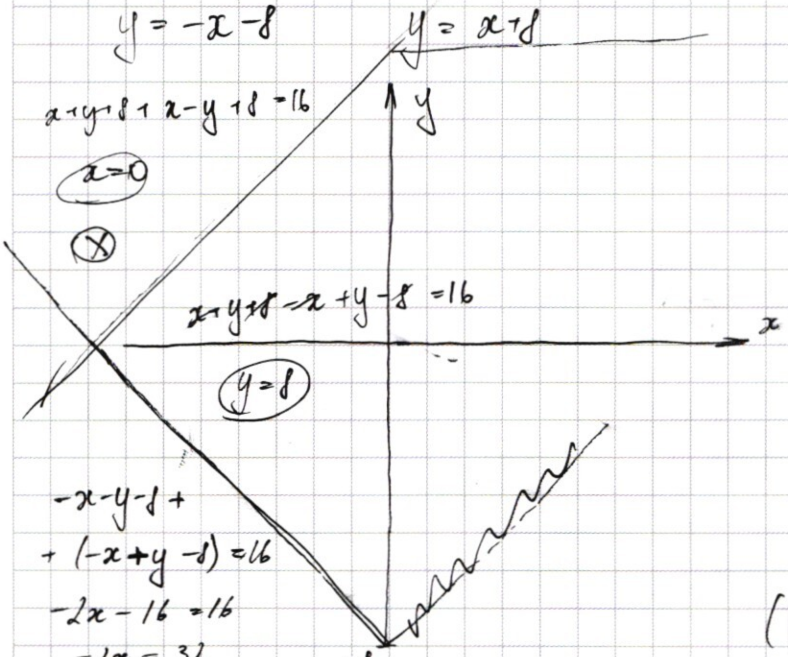
$y=8$

$-x-y-8+$
$+(-x+y-8)=16$

$-2x-16=16$

$-2x=32$

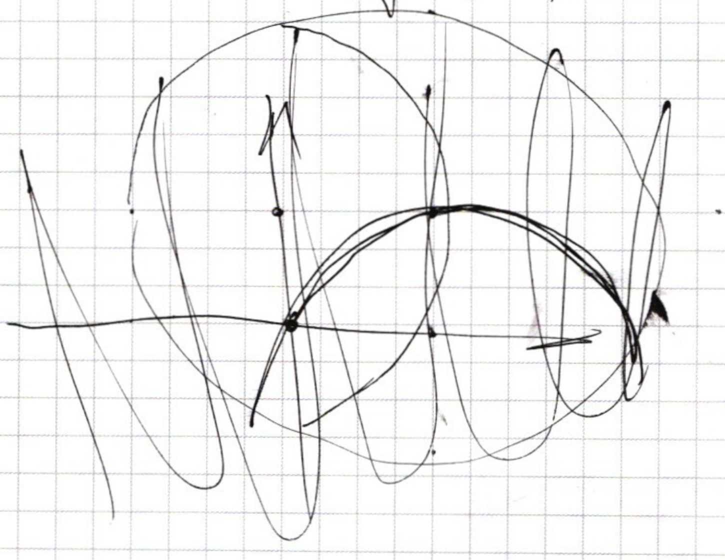
$x=-16$

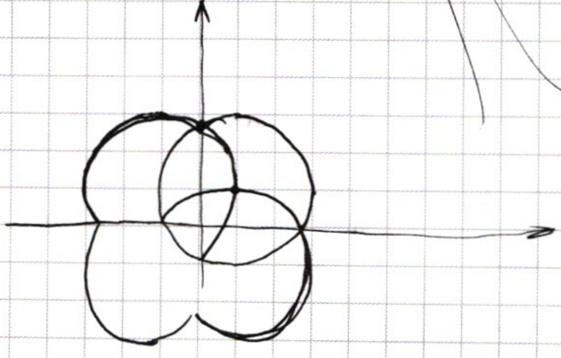


$-x+y-8+x-y+8=16$

$-2y=16;\ y=-8$

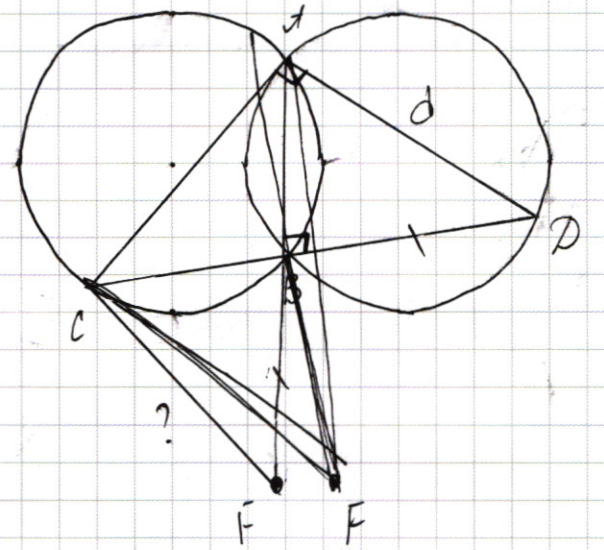
$(|x|-1)^2+(|y|-1)^2=4$



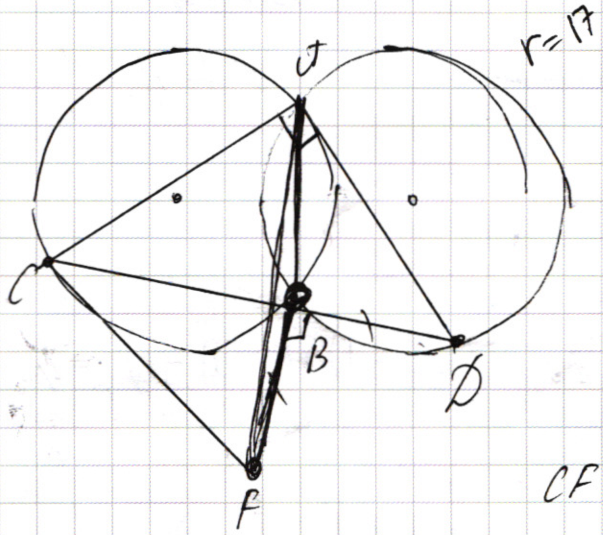


☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$r_{окр} = 17$



$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2$

$\cancel{AD = CB \cdot BD}$

$AC = \cancel{AB \cdot BF \cdot \sin}\ 2r\sin(180^\circ - \alpha)$

$AD = 2r\sin\alpha$

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$2 \cdot 4r^2\sin^2\alpha = CD^2$

$\cancel{\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27}-1)x \end{cases}}$

$\cancel{3^x + 4\cdot 3^{28} = 93 + (3^{28}-3)x}$

$\cancel{3^x + 4\cdot 3^{28} - 93 - (3^{28}-3)x = 0}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

~~Восьми~~ _ _ _ _ _ _ _ _

Пр-е чисел $= 64827$

$64827 = 3\cdot 21609 = 3\cdot 3\cdot 7203 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 2401 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 343 =$

$= 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 7\cdot 49 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7$

Числа: $3; 3; 3; 7; 7; 7; 7; 0$

$P_{8(повт)} = \frac{8!}{3!\cdot 4!} = \frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot 5\cdot\cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}} = 5\cdot 7\cdot 8 = 280$

$P_{7(повт)} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot 5\cdot\cancel{6}\cdot 7}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}} = 35$

$P = P_{8(повт)} - P_{7(повт)} = 245$ чисел.

№2.

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x\cos 2x + 2\sin 2x\cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x(\cancel{2}\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x + \sin 2x)(2\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)) = 0$

$\cos 2x + \sin 2x = 0$; $\operatorname{tg} 2x + 1 = 0$; $\operatorname{tg} 2x = -1$; $2x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{8} + \pi k, k\in\mathbb{Z}$

~~$2\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x) = 0$~~

~~$2\cos 5x + \sqrt{2}(2\cos^2 x - \sin^2 x - 2\cos x\sin x) = 0$~~

~~$2(\cos 2x\cos 3x - \sin 2x\sin 3x) + \sqrt{2}(2\cos^2 x - 2\cos x\sin x - 1) = 0$~~

~~$\cos 5x + \cos x$~~ $+ \cos 5x - \cos x$

$\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = 0$

$\cos 5x + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$

$2\cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi\cdot 2}{8\cdot 7} = \frac{3\pi}{28}$

$\frac{5\pi\cdot 2}{8\cdot 3} = \frac{5\pi}{12}$

№3.

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 \end{cases}$$

$$\cancel{-\frac{x^{7\ln(-y)}}{y^{\ln(-y)}} = x^{2\ln(xy^2)}}$$

$$\cancel{y^2+2y(x+2)-3x(x+4)=0}$$

$$\cancel{\frac{D}{4} = (x^2+4x+4)+3x^2+12x =}$$

$$\cancel{=4x^2+16x+4 =}$$

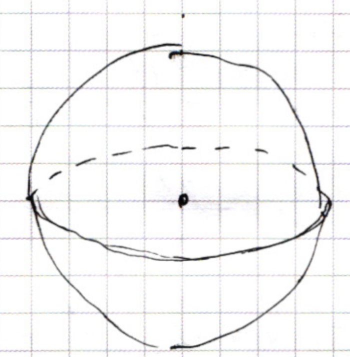
$$y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0$$

$$\cancel{(y+x)^2-4x^2+12x+4y=0}$$

$$\cancel{(y+x)^2-4(x^2-12-y)}$$

$$x^{2\ln(xy^2)} = x^{2(\ln x+\ln y^2)} = x^{2(\ln x+2\ln|y|)}$$

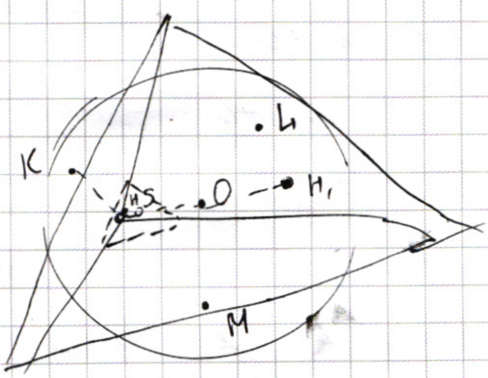
$$\cancel{-\frac{x^{7\ln(-y)}}{y^{\ln(-y)}}}$$



$$-a^{\ln(-a)}$$

$$\cancel{2^{\log_3 2}}$$

№4.

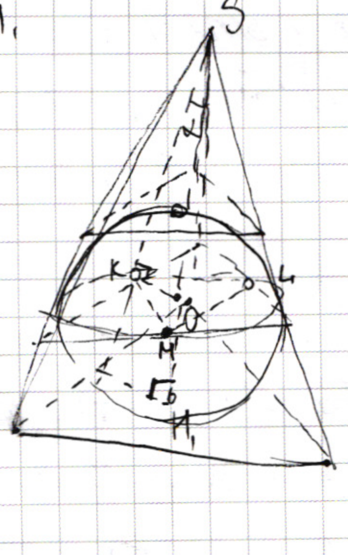


$V_1 = \frac{1}{3}S_1 SH$

$V_2 = \frac{1}{3}S_2 SH_1$

$\frac{SH_1}{SH_1} =$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 16 \\ \hline 216 \\ 36 \\ \hline 576 \end{array}$$



$SO \perp \alpha \quad SO \perp \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \parallel \beta$

$k^2 = \frac{9}{16}; \ k=\frac{3}{4}$

$SH : SH_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{SO}{SH_1} = \frac{7}{8}; \ SO = \frac{7}{8}SH_1$

$OK = r = \frac{1}{8}SH_1$

$\sin\alpha = \frac{SH_1 : 8}{8 \cdot 7 SH_1} = \frac{1}{7}$

$\alpha = \arcsin\frac{1}{7}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 \end{cases}$$

$$(-y)^{\ln(-y)} = \frac{x^{7\ln(-y)}}{x^{2\ln(xy^2)}}$$

$$y^{\ln(-y)} = -x^{7\ln(-y)-2(\ln x+\ln y^2)}$$

$$y^{\ln(-y)} = -x^{7\ln(-y)-2\ln x-2\ln|y|}$$

$-y=e^k$

$\cancel{y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0}$

$\cancel{y^2+4y+4-3(x^2+4x+4)+12+2xy=0}$

$\cancel{(y+2)^2-3(x+2)^2+12+2xy=0}$

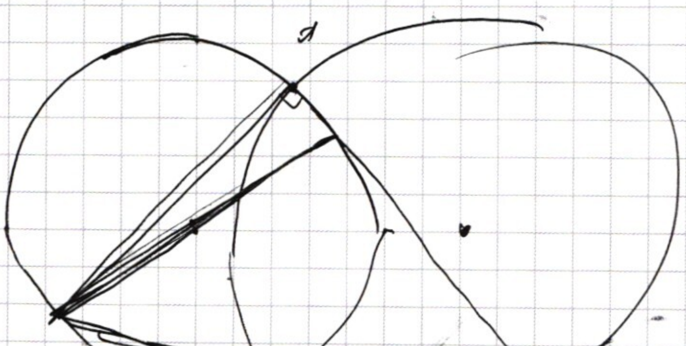
$-y>0 \Rightarrow y<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |y|=-y$

$xy^2>0 \Rightarrow x>0$

$\cancel{y^{\ln(-y)} = -x^{20-2\ln x+5\ln(-y)}}$

$$-x^{7\ln(-y)} = y^{\ln(-y)}x^{2\ln(xy^2)}$$



$1^k = 1^m \Rightarrow a \neq 1$

$k=m$

$\cancel{k=3;\ m=2}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y > 3^{x} + 4\cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3\left(3^{27}-1\right)\cancel{y}x \end{cases}$$

(1) $y' = x\left(3^{x-1}\right)$

$x\,3^{x-1} = 0$; $x = 0$

$\cancel{x-1=}\ 3^{x-1} = 0$ $\varnothing$