

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$64827 = 3^3 \cdot 7^4 \Rightarrow$ это означает, что в восьми-
значном числе могут присутствовать:

1) три 3

семь 7 и $\Rightarrow$ одна единица (это 8 цифр)

2) одна 9 тк. из трех $3^{ек}$ мы можем получить
только одну 9 $\Rightarrow$

одна 3

семь 7 и $\Rightarrow$ две единицы; из 7

семирок мы не можем получить

цифру от 1 до 9 $\Rightarrow$ это все варианты,

остается посчитать кол-во перестановок из 8

8-знач. числе $\Rightarrow$

8-знач. число:

1/

• • • • • • • •

8 7 6 5 4 3 2 1

$\Rightarrow$ и нужно посчитать

каждое повторение тк.

цифры повторяются

(3 тройки; семь семерок)

$$\frac{8!}{3! 4!}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2}$$

$$= 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 420 \text{ вар.}$$

2/

8-знач. число:

• • • • • • • •

8 6 7 6 6 5 4 2 3 1

$\Rightarrow$ и здесь, что

цифры повторяются



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(задача 7; где единицы) $\Rightarrow$

$$\frac{8!}{4! 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840.$$

$$\Rightarrow \text{всего вариантов} : 840 + 420 = 1260.$$

Ответ: 1260 вар.

$$\overbrace{\cos 7x + \cos 3x}^{\sqrt{2}} + \overbrace{\sin 7x - \sin 3x}^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

~~коэффициент~~ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x + \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

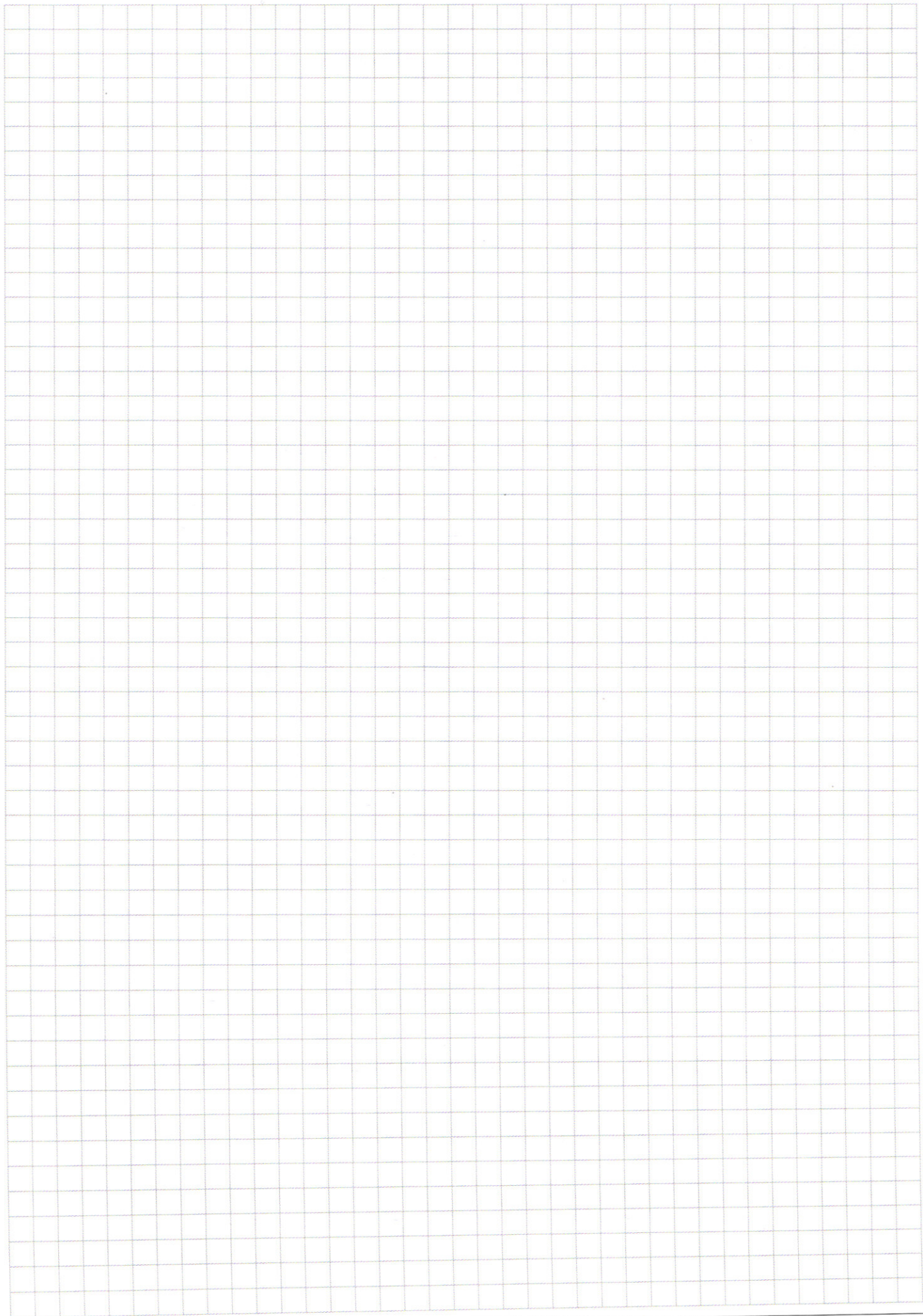
$$2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$1) \cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$2) 2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) разделим на $\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin 2x = 0$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

2) делим на 2 $\Rightarrow$

$$\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2x = 0$$

$$\cos 5x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

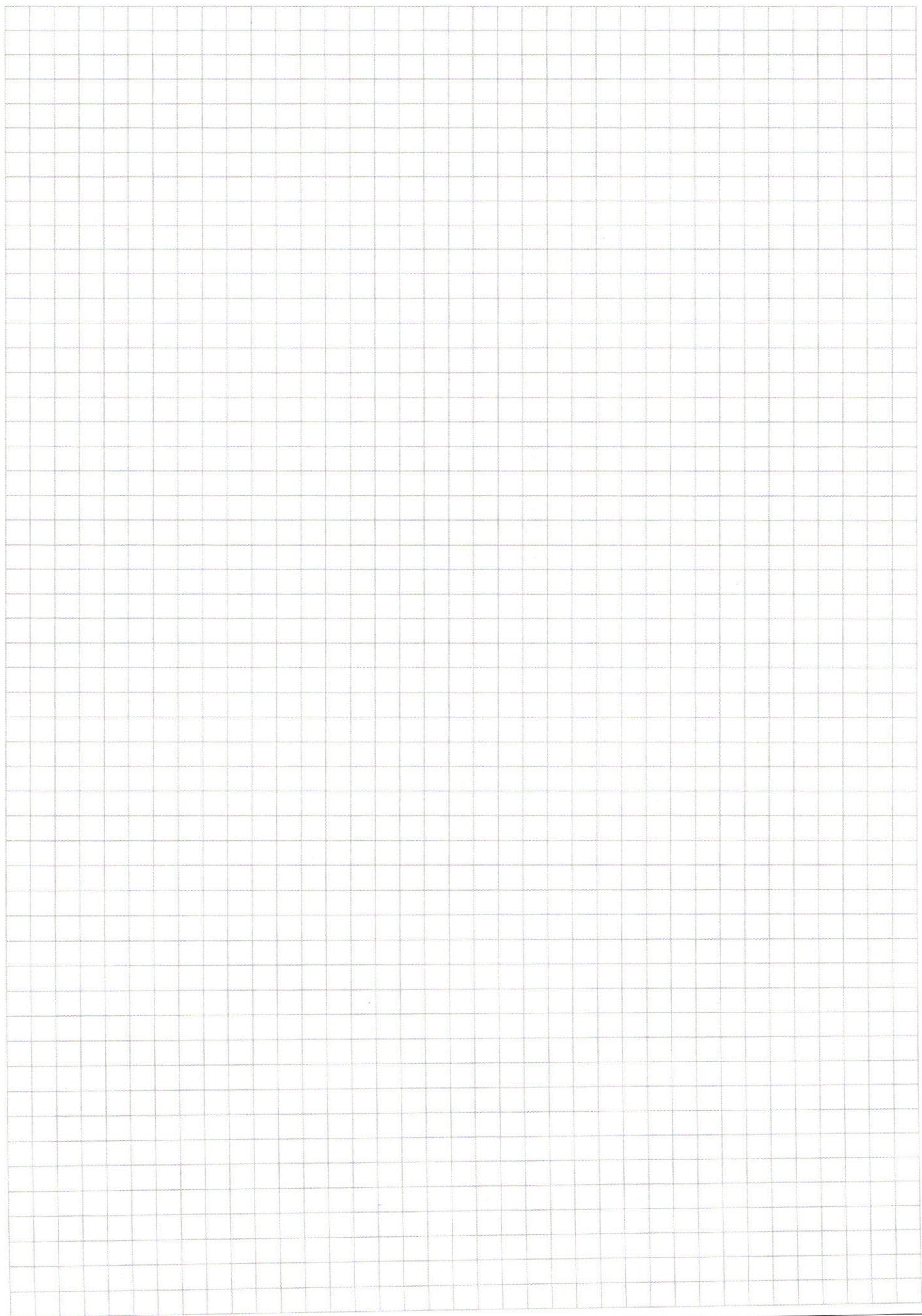
$$2 \cdot \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m; m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \frac{7x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi m; m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi m; m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi m; m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k; k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

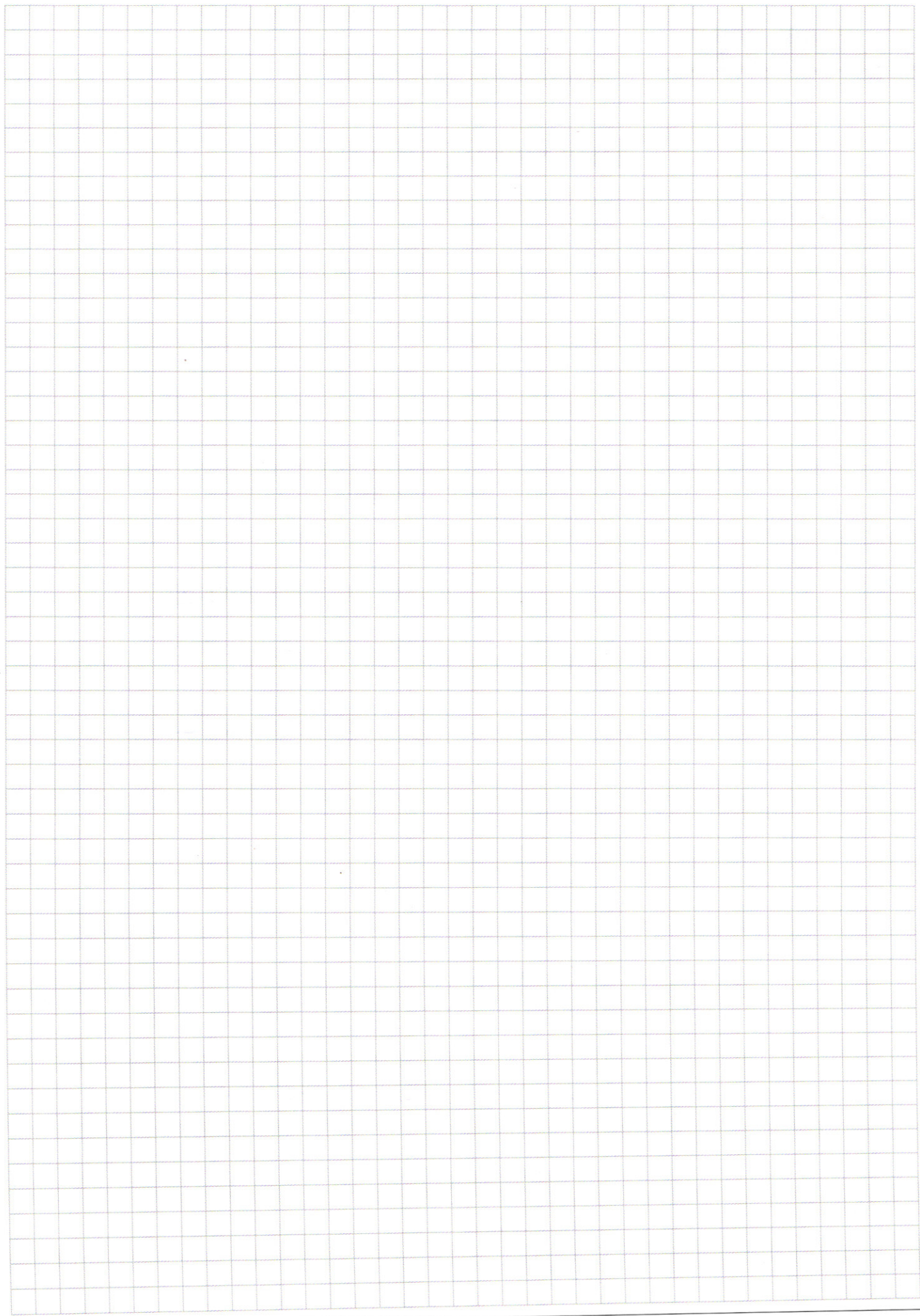
$$1) \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{\sqrt[3]{2} \ln(xy^2)}$$

$$2) y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$2) (y+3x)(y-x) + 4(y+3x) = 0$$

$$(y+3x)(y-x+4) = 0$$

$$\begin{cases} 1. y = -3x \\ 2. y = x - 4 \end{cases}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1. \begin{cases} y = -3x \\ \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \end{cases}$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$x^{6\ln 3x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$x > 0 \Rightarrow x^{2\ln(9x^3)} > 0 \Rightarrow \text{логарифмируем}$$

$$\ln x^{6\ln 3x} + \ln \left(\frac{1}{3}\right)^{\ln 3x} = \ln x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\frac{x^{6\ln 3x}}{x^{2\ln 9x^3}} = 3^{\ln 3x}$$

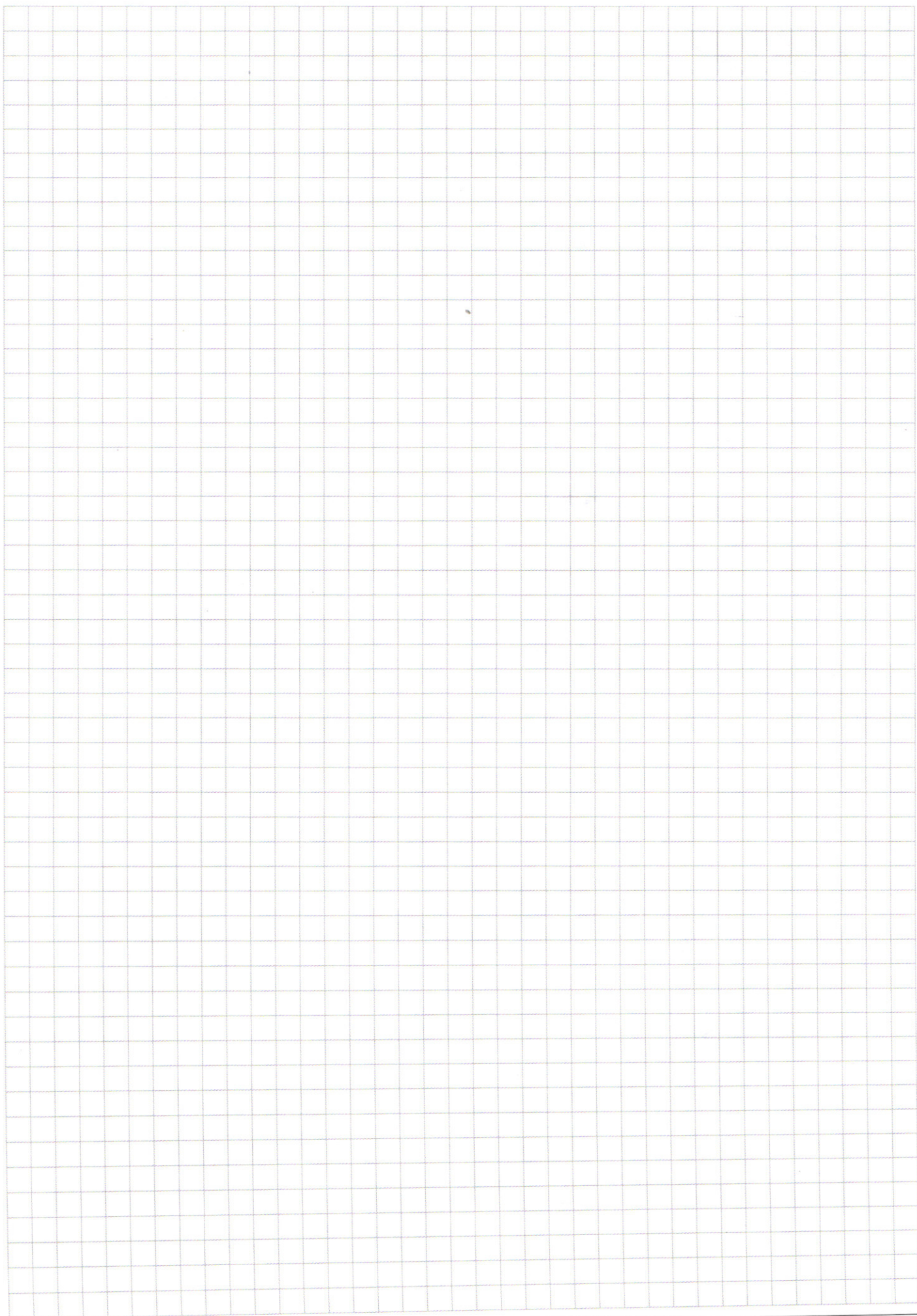
$$x^{6\ln 3x - 2\ln 9x^3} = 3^{\ln 3x}$$

$$x^{2(\ln 27x^3 - \ln 9x^3)} = 3^{\ln 3x}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^{2\ln 3} = 3^{\ln 3x} \end{cases}$$

$$\frac{(\log_3 x) \cdot 2\ln 3}{3} = 3^{\ln 3x}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \log_3 x \cdot \ln 3 = \ln 3x$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

решить как $\ln 3 \Rightarrow$

$$\log_3 x^2 = \frac{\ln 3x}{\ln 3}$$

$$\begin{cases} \log_3 x^2 = \log_3 3x \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3x \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \text{ не экв. реш.} \end{cases}$$

2. $y = x - 4$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(x \cdot y^2)} \end{cases}$$

$$\left(\frac{-x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x \cdot (x-4)^2)}$$

$$\left(\frac{-x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x \cdot (x-4)^2)}$$

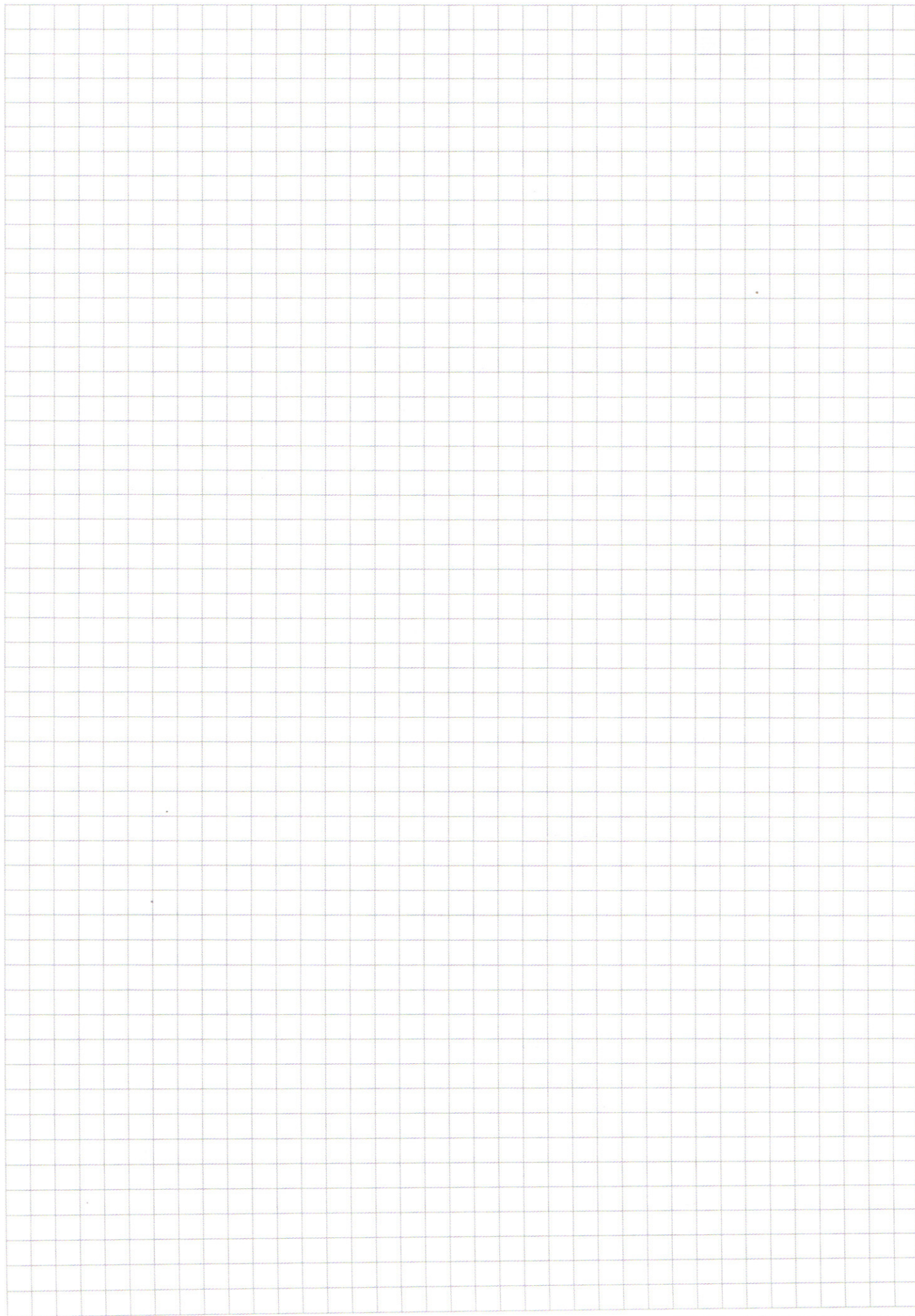
решить как $x^{2\ln(x \cdot (x-4)^2)}$

как $\left(\frac{1}{x-4}\right)^{\ln(4-x)}$

$$\left(\frac{-x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)}$$

$$x^{2\ln(x \cdot (x-4)^2)} = (x-4)^{\ln(4-x)}$$

$$\begin{cases} x < 4 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ln(4-x) < 0 \\ \ln(4-x) > 0 \end{cases}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\begin{matrix} (-x) \ln \left(\frac{-(x-4)^3}{x^2} \right) \\ x < 4 \\ x > 0 \end{matrix} \right) = (x-4) \ln(4-x)$$

$$\begin{aligned} & (x-4) \log(x-4) \ln \left(\frac{-(x-4)^3}{x^2} \right) = (x-4) \ln(4-x) \\ & \ln \left(\frac{-(x-4)^3}{x^2} \right) \cdot \log(x-4) = \ln(4-x) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{x^2}{4-x} \right) \ln(4-x) = x \ln(x^2(x-4)^4)$$

$\begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \end{cases}$

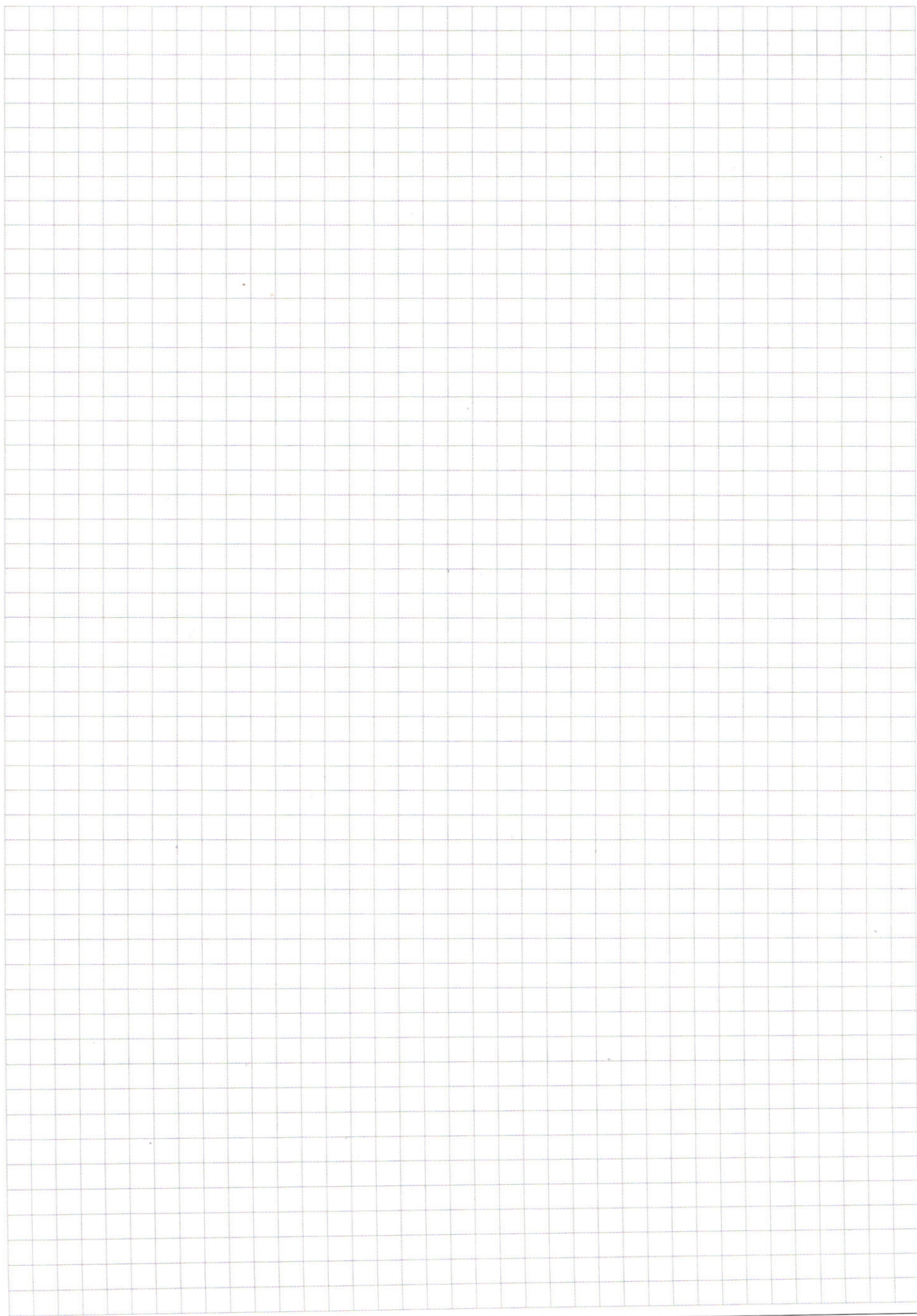
↓
решить уравн.:

$$x^2 \ln(4-x) \cdot (4-x)^{-\ln(4-x)} = x \ln(x^2(x-4)^4)$$

делим на $x^2 \ln(4-x)$ т.к.
он не равен 0 при
допустимых $x \Rightarrow$

$$(4-x)^{-\ln(4-x)} = x \ln(x^2(x-4)^4) - \ln(x^2(x-4)^4)$$

$$(4-x)^{-\ln(4-x)} = x \ln \left(\frac{x^2}{(4-x)^3} \right)$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (4-x)^{-\ln(4-x)} \\ x > 0 \\ x < 4 \end{cases} = (4-x)^{\log_{(4-x)} x} \cdot \ln \left(\frac{x^2}{(4-x)^3} \right)$$

$$-\ln(4-x) = \log_{(4-x)} x \cdot \ln \left(\frac{x^2}{(4-x)^3} \right)$$

$$-\log_{\frac{x^2}{(4-x)^3}} (4-x) = \log_{(4-x)} x$$

$$\frac{-1}{\log_{4-x} \frac{x^2}{(4-x)^3}} = \log_{(4-x)} x$$

$$\begin{cases} \frac{-1}{2 \log_{4-x} x - 3} = \log_{(4-x)} x \\ x > 0 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \log_{4-x} x - 3 \neq 0 \\ 2 \log_{4-x} x - 3 \log_{4-x} x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(2 \log_{4-x} x - 1) (\log_{4-x} x - 1) = 0$$

$$1) \log_{4-x} x^2 = 1$$

$$\log_{4-x} x^2 = \log_{4-x} 4-x$$

$$x^2 = 4-x$$

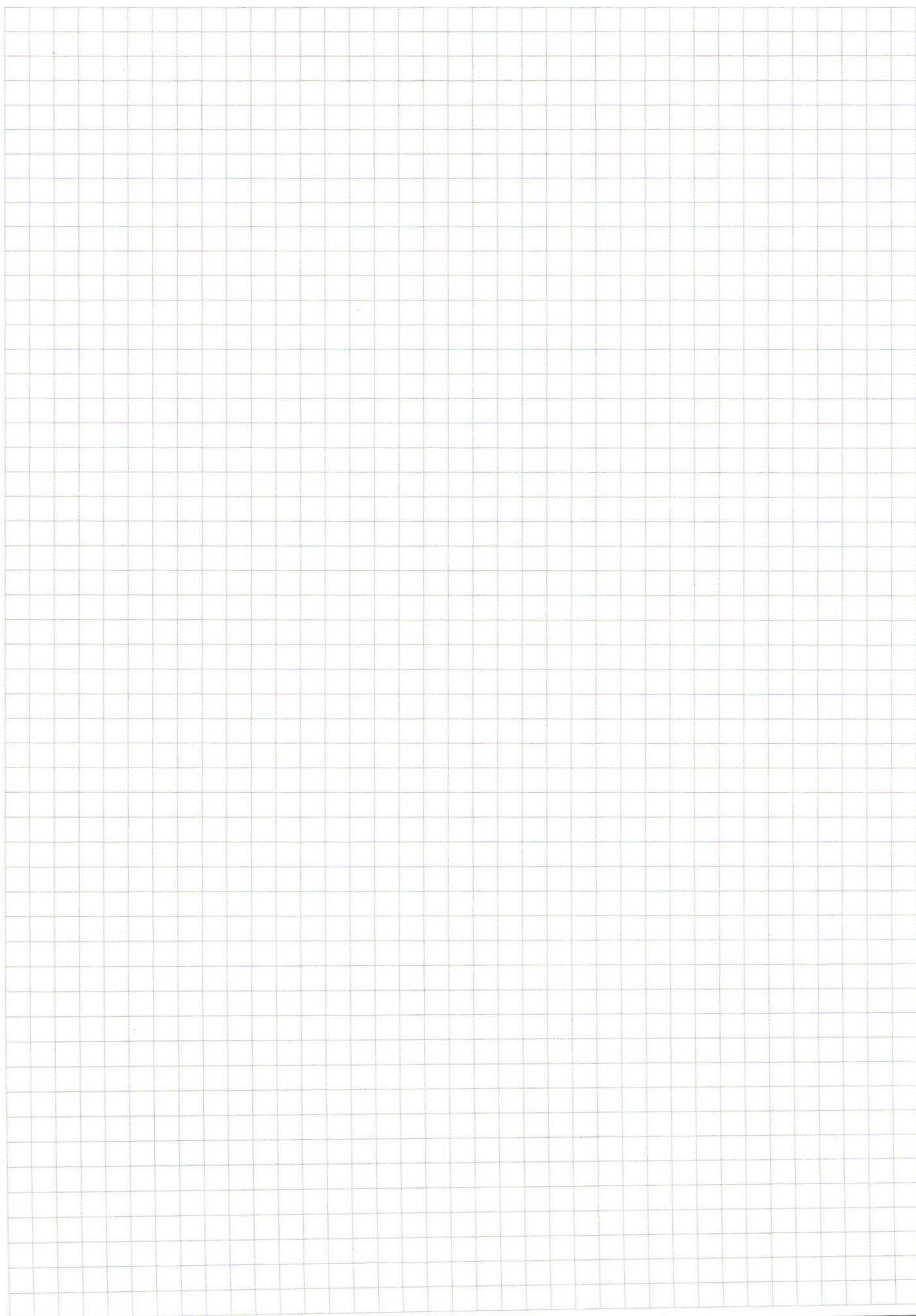
$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \text{ не удов. усл.}$$

$$\text{так } x \in (0, 4)$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad \text{сравним с } 4 \Rightarrow$$

$$4 \sqrt{5} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{9}{2} \sqrt{5} \quad \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$81 \sqrt{5} 17$$

$$81 > 17 \Rightarrow 4 > \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad \text{или решение} \Rightarrow$$

2. $\log_{4-x} x = 1$

$$\begin{cases} \log_{4-x} x = \log_{4-x} 4-x \\ x \geq 0 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$x = 4-x$$

$$2x = 4 \quad x = 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} - 4 = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2}\right); (2; -2); (3; -3)$

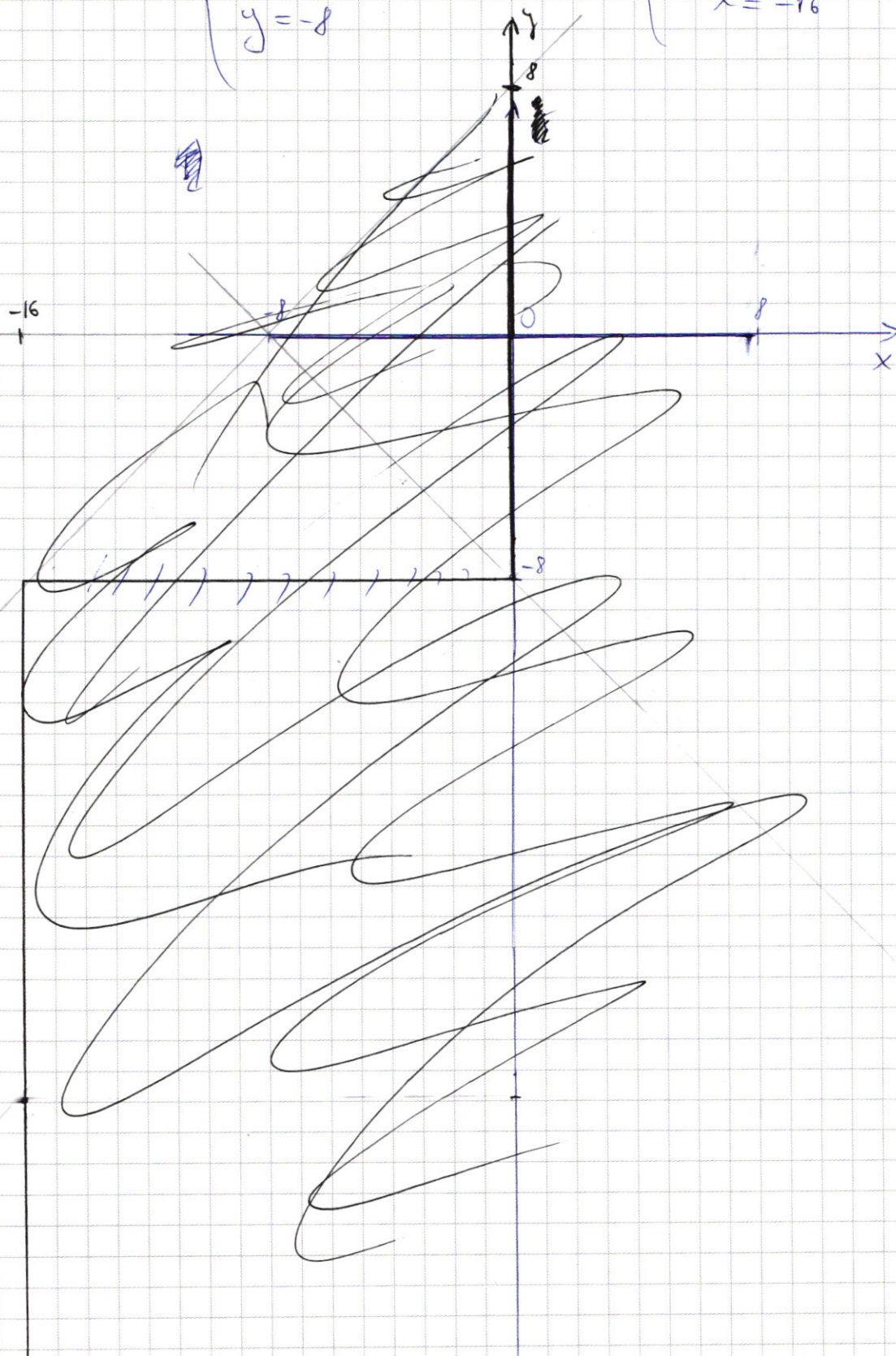
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

построим верхнее уравнение $\Rightarrow$

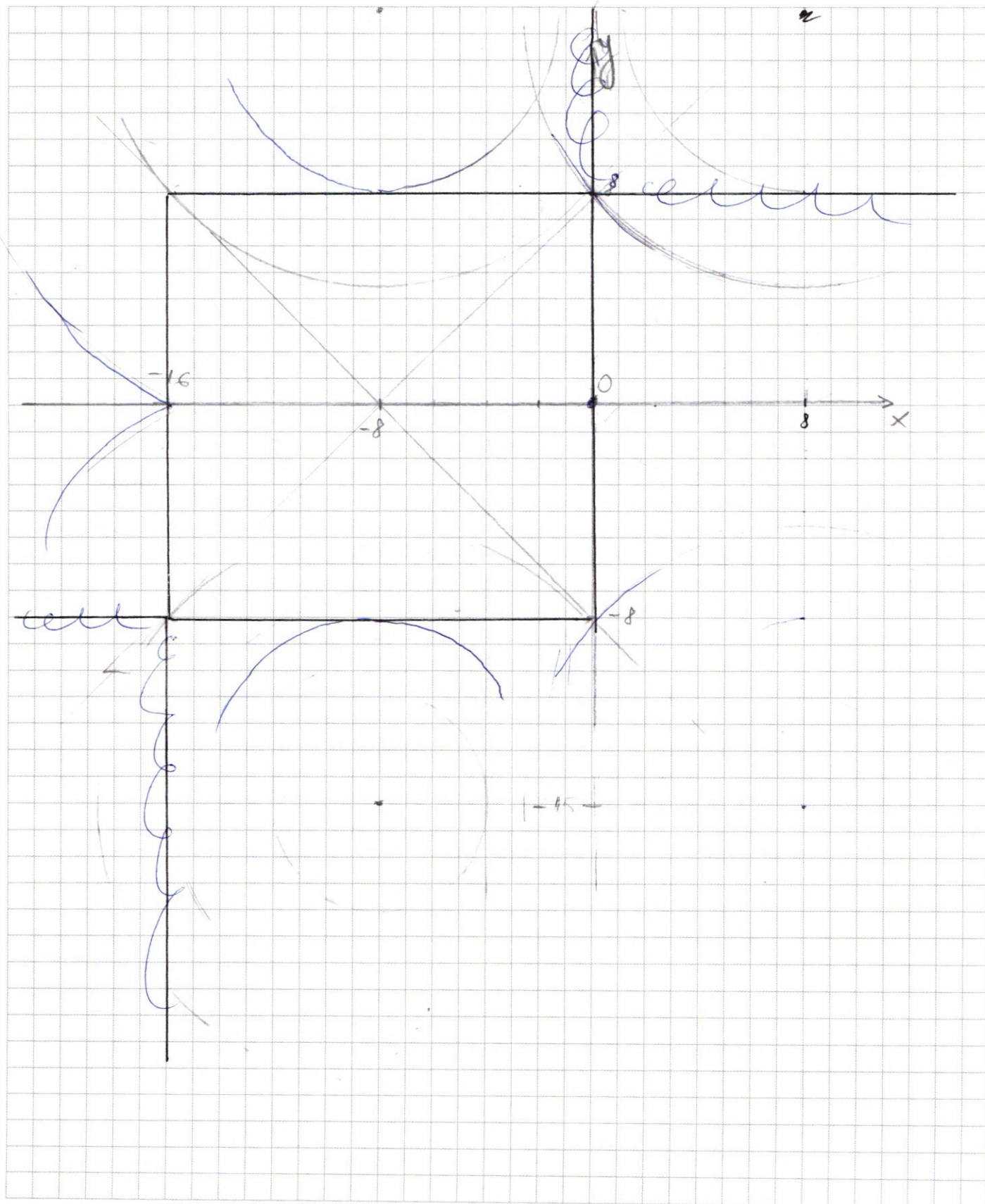
$$1) \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ x=0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 < 0 \\ 2y=16 \rightarrow y=8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ y = -8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 < 0 \\ -2x = 32 \\ x = -16 \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



заданное значение $\sqrt{a}$
 радиуса или наименьшее окружное значение
 от параметра a т.к. $r = \sqrt{a}$

четыре т.к.: $(8; 15); (-8; 15); (-8; -15);$
 $(8; -15) \Rightarrow$

наименьшее значение $\sqrt{a}$ значение

1) при $\sqrt{a} < 7$ решений нет т.к. ~~наименьшее~~ $\sqrt{a}$

при $\sqrt{a} = 7$ (наименьшее значение $\sqrt{a}$)

II) при $a < 49$ при $\sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 49$

проходящих касание окруж.

в т.ч.

$x = 0$ и $x = 16$ и значения

(наименьшее значение $x = -16$ и

$y = 8$)

$\Rightarrow$ решений 3

~~Вариант 2~~ при

прохождении т.к. $(0; 8)$ окруж.

$(x - 8)^2 + (y - 15)^2 = a$:

$64 + 49 = a \Rightarrow$

$a = 113 \quad \sqrt{a} = \sqrt{113} \Rightarrow$

при этом радиусе касание

левой окр. проходит через т.к. $(-16; -8)$

(т.к.) а верхнее

имеет 3 решения $\Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

полученная фигура - это квадрат
со стороной 16

первое касание будет

при $\bar{a}$ - радиусе $\bar{a} = 7 \rightarrow a = 49$ мм.

расстояние от $(-8; 15)$ и $(-8; -15)$ до

$y = 8$ и $y = -8$ соответственно $\Rightarrow 7$

то есть при $\bar{a} < 7$ решений нет

при $\bar{a} = 7 \rightarrow a = 49$ - 2 р-та.

при $a = 113$ две прямые

огибающей пройдут через

~~точки~~ точки $(0; 8)$ одна и другая

через точку $(0; -8)$ и $\Rightarrow$ две левые огибающие проходят

через $(-16; -8)$ $(-16; 8)$ $\Rightarrow$ 4 решения
~~вертикали~~

при $a \in (49; 113)$ 4 р-та. с

2 р-та $y = 8$ и 2 р-та с $y = -8 \Rightarrow$

~~решения~~ решения будут больше 2 до

момента пока радиус не достигнет ~~15 мм~~.

$\bar{a} = 17$

в этот момент ~~касание~~

огибающей проходит ~~через~~ ~~через~~ $(0; 0)$, но огибающая осевая,

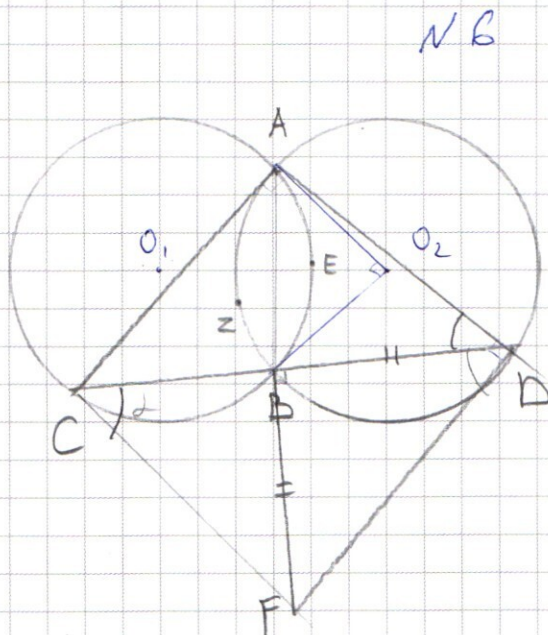
также точка $(0; 0)$ входит в график и

еще одно решение $(-16; 0) \Rightarrow$ 2 р-та.

и при радиусе больше 17 решений ~~нет~~ нет

~~плоская~~ ~~как~~ ~~пересечение~~
~~очень~~ ~~продолжения~~ ~~длина~~ ~~мощи~~
Окружность: $a = \frac{283}{4}$; $a = 49$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$R_1 = R_2 = 17$$

gryze $A \geq B =$ gryze $A \leq B$
mk. okryzowanie

С равными радиусами

$$\Rightarrow \angle ADC = \angle ACB$$

(определенная как
равные доли и
для суммы из них,

$$\angle C = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$



$$AD = AC \Rightarrow$$

$$\Delta CO_1A = \Delta AO_1D_{MK}$$

$$O_1C = O_1A = AO_2 = O_2D = R = 17 \text{ rayon}$$

$\sim AB = CA \text{ m.k. } \Delta \text{ pabnoy } (CAB) \Rightarrow$

$\angle AOB = 2\angle ADB = 90^\circ$ тк. центр, а $\angle AOB$ вписан. $\Rightarrow$

$$AB = 17\sqrt{2}$$

$$\angle ADF = 2 \angle BDF = 90^\circ \Rightarrow$$

CADF применяется используется $=$

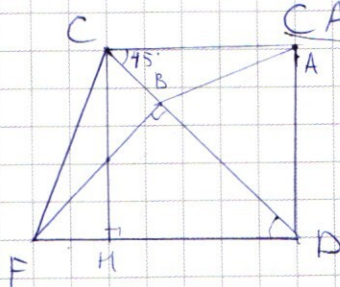
$$AB = 17\sqrt{2}$$

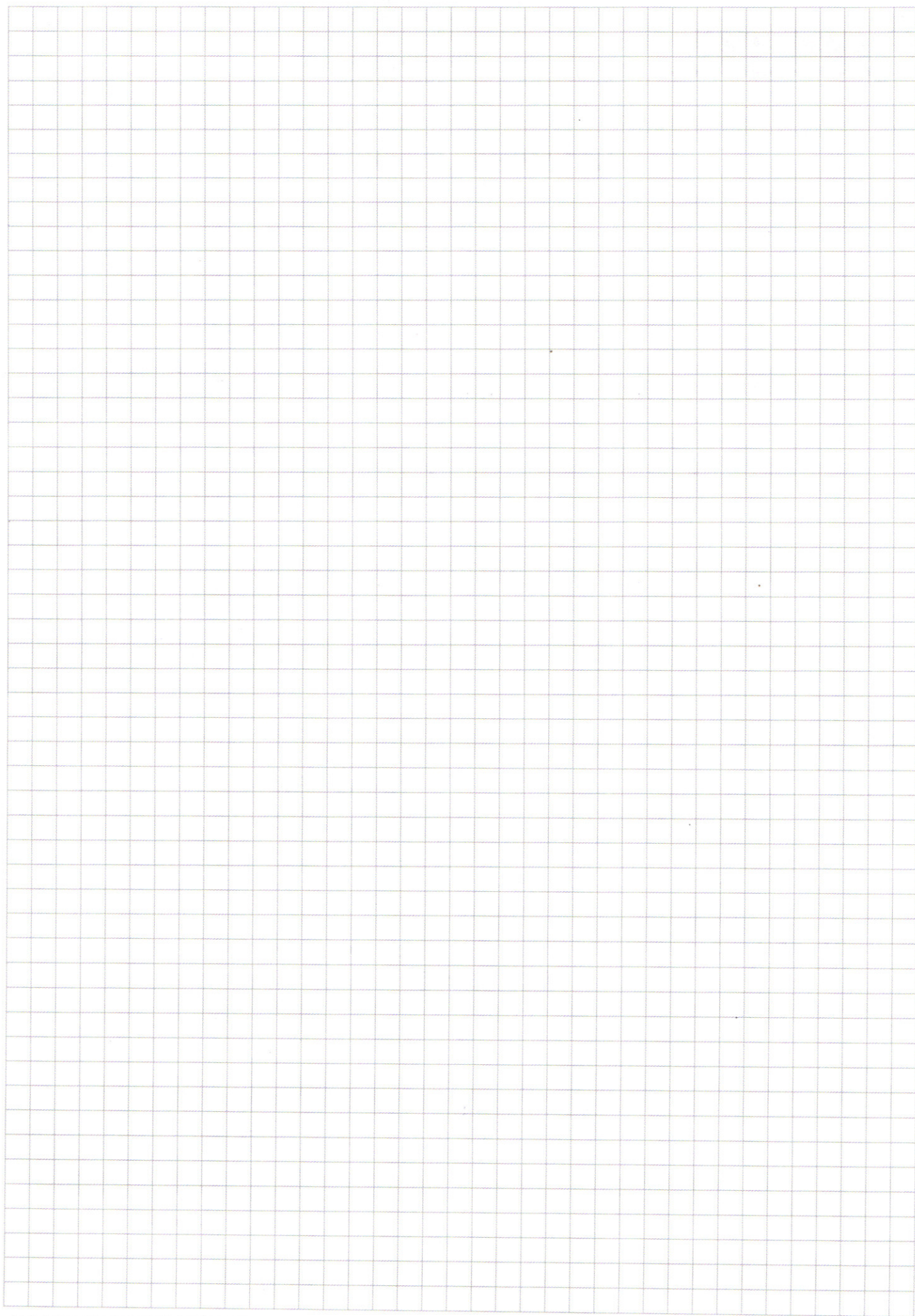
Пусть $CA = x \Rightarrow$

$$AC = AD = HD = x$$

$$CP = \sqrt{2}x$$

$$r_F = 17\sqrt{2}$$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)