

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $64827 = 3^3 \cdot 7^4$

Покажем число восьмизначное, в него входит: 1) 4 по 7, 3 по 3, 1 по 1

2) 4 по 7, 1 по 3, 1 по 9, 2 по 18

Найдем количество комбинаций этих цифр. 1) $C_5^3 \cdot C_8^1 = 80$

2) $C_5^2 \cdot C_7^1 \cdot C_8^1 = 560$

Ответ: 640.

№2. $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x + \cos 4x = 0$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x + \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0 \quad | \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \quad *$$

$$\cos 5x \cdot 2 \cos(2x - \frac{\pi}{4}) \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos 5x \cdot \sin(4x - \frac{\pi}{2}) + \cos 4x \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$- \cos 5x \cos 4x + \cos 4x \cos(\frac{3}{4}\pi - 2x) = 0$$

$$\cos 4x (\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 4x = 0 \\ \cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 4x = 0 \\ 2 \cos(\frac{7x + \frac{\pi}{8}}{2}) \cos(\frac{3x - \frac{\pi}{8}}{2}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 4x = 0 \\ \cos(\frac{7x + \frac{\pi}{8}}{2}) = 0 \\ \cos(\frac{3x - \frac{\pi}{8}}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{7x + \frac{\pi}{8}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x - \frac{\pi}{8}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \\ x = \frac{3\pi + 8\pi n}{7} \\ x = \frac{5\pi + 8\pi m}{3} \end{cases}$$

* Заметим, что при делении число ответов не должно измениться, тогда

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, l \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \frac{3\pi + 8\pi n}{7}, \frac{5\pi + 8\pi m}{3}, k, n, m \in \mathbb{Z}$.

$$53. \begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$003: \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$x^2 \ln(-y) = -x^2 \ln x \cdot x^4 \ln(-y) \cdot y^{\ln(-y)}$$

$$x^3 \ln(-y) = -x^2 \ln x \cdot y^{\ln(-y)} \quad \text{Обе части положительные} \Rightarrow \text{прологарифмируем.}$$

$$\ln x^3 \ln(-y) = \ln x^2 \ln x + \ln(-y) \ln(-y)$$

$$3 \ln x \ln(-y) = 2 \ln^2 x + \ln^2(-y)$$

$$(\ln(-y) - \ln x)(\ln(-y) - 2 \ln x) = 0$$

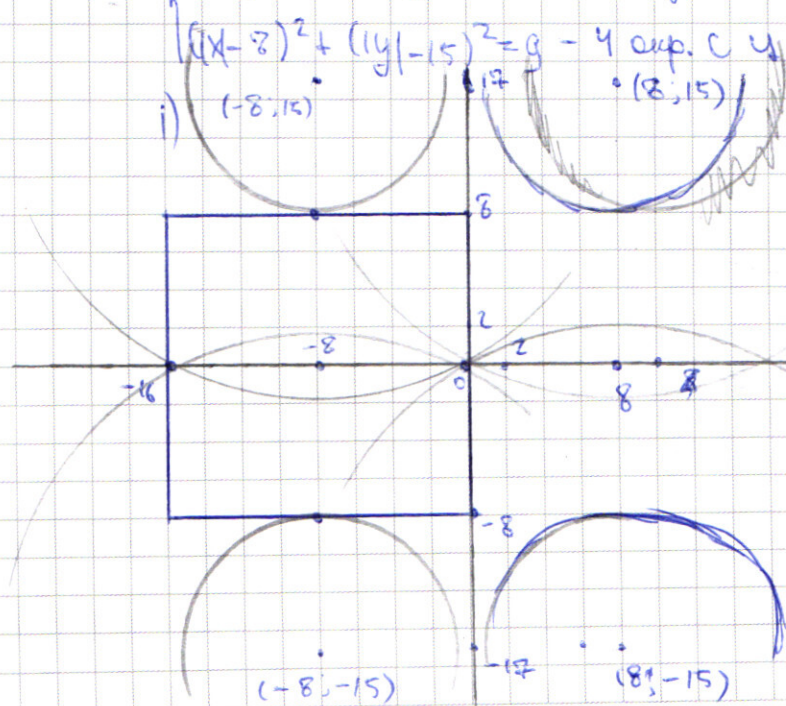
$$\begin{cases} \ln(-y) = \ln x & \begin{cases} -y = x \\ -y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0 \\ x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0 \end{cases} \end{cases} \begin{cases} 4x^2 - 8x = 0 \\ x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \text{ (не в } 003) \\ x=2 \\ x=3 \\ x=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x=\frac{-\sqrt{17}-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \\ x=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ y=-4 \\ x=3 \\ y=-3 \\ y=-9 \\ x=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y=\frac{-\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{17}-9}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (2; -2), (2; -4), (3; -3), (3; -9), \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{-\sqrt{17}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2}\right).$$

$$54. \begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & \text{— квадрат со сторонами 16.} \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = 9 & \text{— 4 окр. с ц. } (8; 15), (-8; 15), (-8; -15), (8; -15) \text{ и рад. } \sqrt{a} \text{ (при } a \geq 0) \end{cases}$$



Первое решение получится, когда радиус окружностей — 3. ($a=49$) — две окружности касаются квадрата.

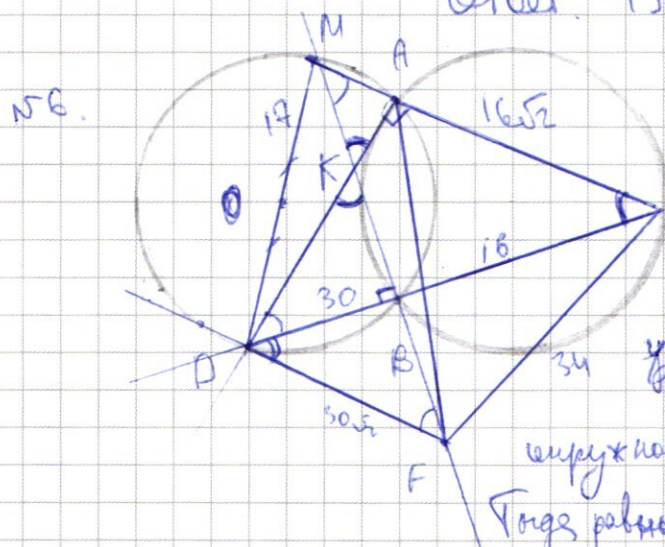
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Второе решение - когда все окружности проходят через одну и ту же точку квадрата. Это происходит в пределах его вертикальных сторон.*
(с абсциссой 0). Найдём требуемый радиус по Т Пифагора:

$$r^2 = 8^2 + 15^2 = 289 = 17^2$$

* эти точки находятся на одинаковом расст. от центров окружностей.

Ответ: 17; 289.



а) Продлим BF до пересечения с окр., на которой лежит т. D, в т. M.

С Тогда прямоуг. $\angle DBM$ вписан в эту окр. $\Rightarrow DM$ - диаметр.

Угол $\angle BMC$ и $\angle BCM$ прилегают равны окружностям и опираются на дугу $AB \Rightarrow$ они равны.

Тогда равны все углы: $\angle KMA = \angle MKA = \angle KCB = \angle KDB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = \angle MCB = 45^\circ$ - как прил. ~~равноб.~~ тр., вертик., окр.

из одну точку и т.д.

Тогда $MC \parallel DF$ ($\angle DFM = \angle FMC$ как соотв. при перес. MF).

Уг. $MDFC$ - трапеция. Угол между диагоналями и основаниями соотв. равны $\Rightarrow$ они равны $\Rightarrow CF = DM = 34$.

а) Ответ: 34.

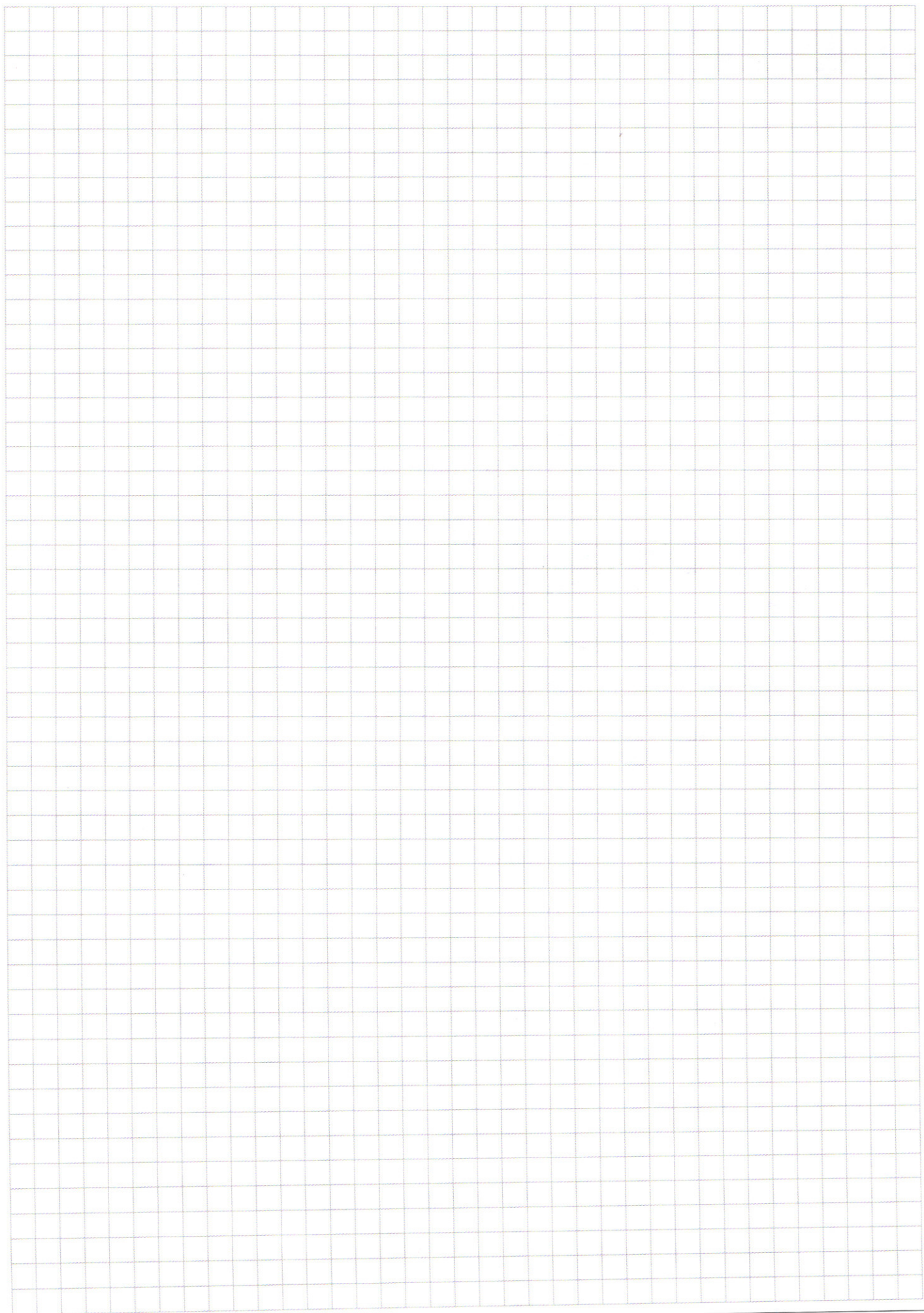
б) ~~Расс.~~ рассл. прил. тр. BCF: по Т Пифагора $BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 30$

$$CD = 16 \text{ По } T_{\cos}: \cos \angle DCF = \frac{CD^2 + CF^2 - DF^2}{2 \cdot CD \cdot CF} =$$

$$\text{проб. прил. } DA \perp CM. \angle A = \frac{CM + DF}{2} = 23.52$$

не ушел!

$$\cos \angle ACF = \cos(\angle MCF + \angle DCF) = \dots$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



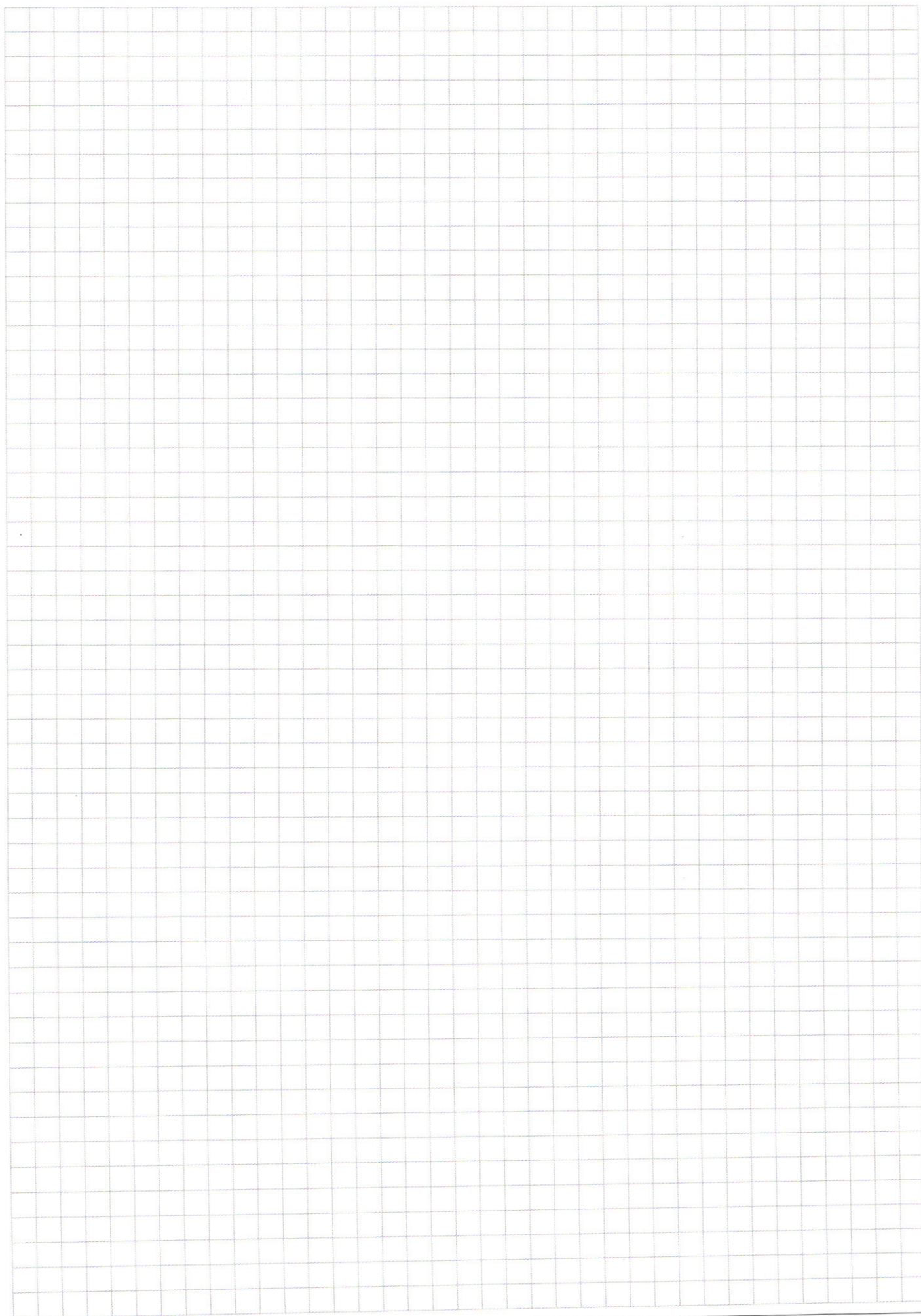
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1. 64827 = 27 \cdot 2401 = 3^{3 \cdot 7}$$

у нас 7 простых множителей $\Rightarrow$ 1 ст., 3 ст., 4 ст.;

2 ст., 1 ст., 1 ст., 4 ст.

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 49} \\ 196 \\ \hline 641 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \overline{) 3} \\ 12401 \\ \hline 641 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 9} \\ 63 \\ \hline 18 \\ 027 \\ \hline 27 \\ 0 \end{array}$$

$$1) C_5^3 \cdot C_8^1 = \frac{120}{2 \cdot 6} \cdot 8 = 80$$

$$2) C_5^2 \cdot C_7^1 \cdot C_8^1 = 10 \cdot 7 \cdot 8 = 560 \quad \Rightarrow 640$$

$$2. \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x + \cos 4x = 0$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0 \quad \begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = \alpha + \beta \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \alpha - \beta \end{cases}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\alpha = 5x$$

$$\beta = 2x - \frac{\pi}{4}$$

$$2 \cos 5x \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cos 2x + \sqrt{2} \cos 5x \sin 2x + \cos^2 2x - \sin^2 2x = 0$$

$$\cos 2x (\cos 2x + \sqrt{2} \cos 5x) + \sin 2x (\sqrt{2} \cos 5x - \sin 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0 \quad | \cdot \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 5x \sin \left(4x - \frac{\pi}{2} \right) + \cos 4x \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

замечим, что $\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \neq 0$, т.е.

$$2x - \frac{\pi}{4} \neq \pi k$$

$$x \neq \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi k}{4} + \frac{\pi}{8} \quad k \neq 2n$$

3. $\int \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(x)} \quad y < 0, x > 0$ $27-18-21+12$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + (2x + 4y) = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{-x^3 - 2x^2 - 7x + 12}{x^3 - 3x^2}$$

$$\frac{17+1-2\sqrt{17}}{4}$$

$$\frac{-x^2 - 7x}{x^3 - 3x^2}$$

$$\frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 3x^2}$$

$$\frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{-4x + 12}{-4x + 12}$$

$$0$$

$$-x^{2\ln(-y)} = x^{2\ln x} \cdot x^{y\ln(-y)} \cdot y^{\ln(-y)}$$

$$-x^{2\ln(-y) - 2\ln x - y\ln(-y)} = y^{\ln(-y)}$$

$$x^{3\ln(-y)} = y^{\ln(-y)} \cdot x^{2\ln x}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$\ln(x^{3\ln(-y)}) = \ln y^{\ln(-y)} + \ln x^{2\ln x}$$

$$3\ln(-y)\ln x = \ln(-y) + 2\ln^2 x$$

$$\ln^2 y - 3\ln(-y)\ln x + 2\ln^2 x = 0$$

$$(\ln(-y) - \ln x)(\ln(-y) - 2\ln x) = 0$$

$$\begin{cases} \ln(-y) = \ln x \\ \ln(-y) = 2\ln x \end{cases} \begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0 \\ x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq -8 \\ y \leq 8 \end{cases} \quad |x| + |y| = 16$$

$$\begin{cases} -x-y-8 - x+y-8 = 16 \\ x+y+8 < 0 \\ x-y+8 < 0 \end{cases} \begin{cases} x = -16 \\ y < 8 \\ y > -8 \end{cases}$$

$$x=1: (1-8)^2 + (y-15)^2 = 9$$

$$1) r=8: x = \pm 8$$

$$x = \pm 14$$

$$|y|=15$$

$$(y-15)^2 = 0$$

$$|y|-15 = 8$$

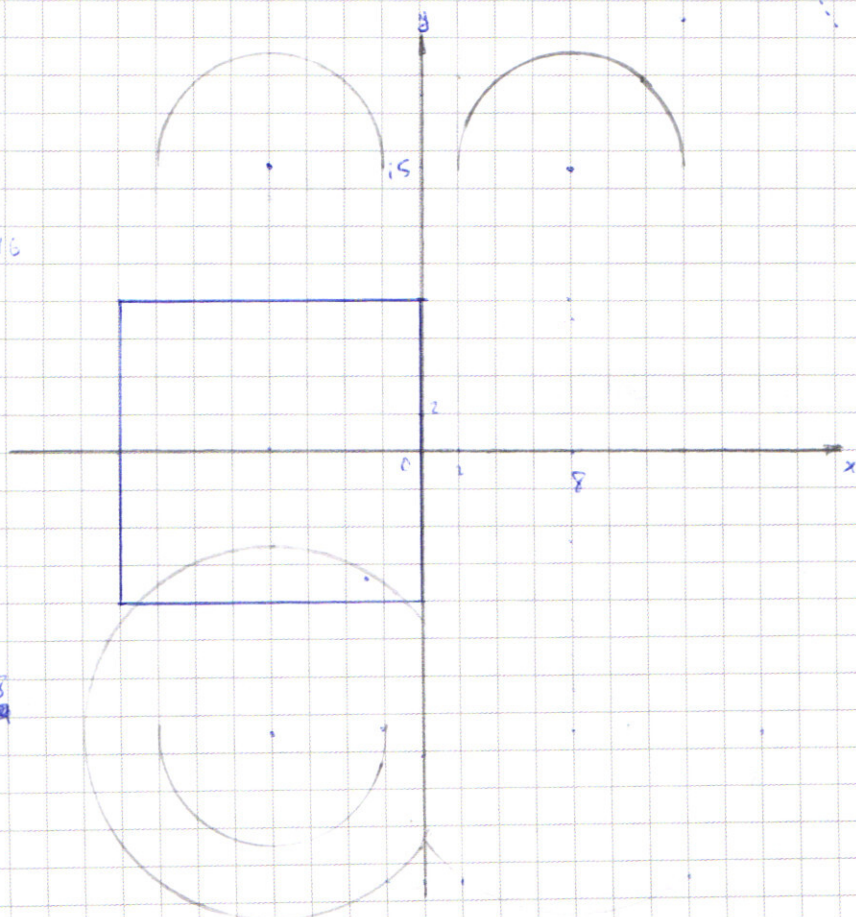
$$\begin{cases} r=10, \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$|y|=23$$

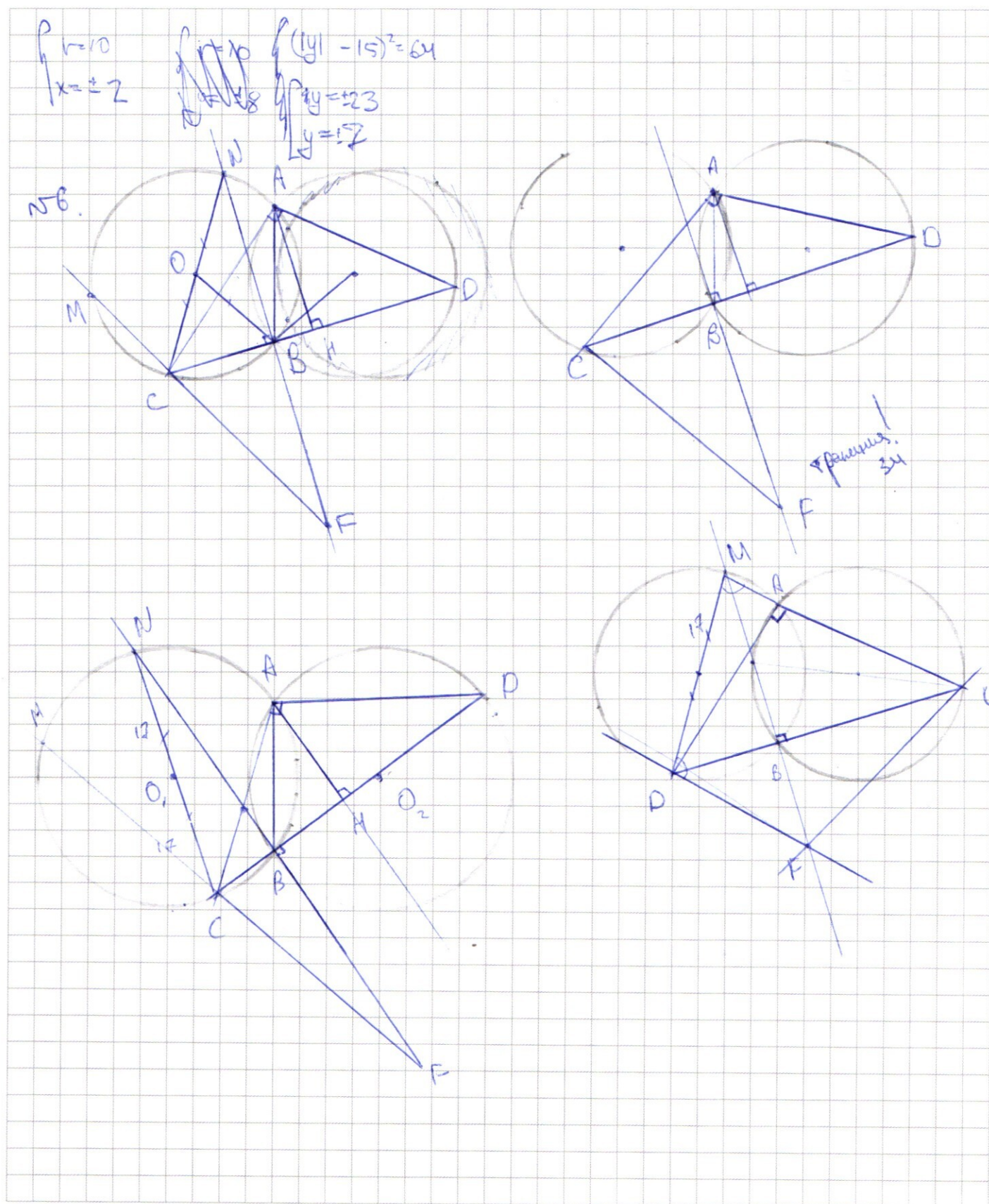
$$y = \pm 23$$

$$x = \pm 18$$

$$|y|=15$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{28} - 1)x \end{cases} \quad \begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 3^{28} + 93 - 3x \end{cases}$$

$$3^{28} + 93 - 3x = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$3^x + 3x + 3^{29} - 93 = 0 \quad -30 < x < 30$$

$$x_1 \in (-3^{28}, -3^{28})$$

