

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(\cos 4x + \cos 3x) + (\sin 4x - \sin 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cancel{2 \cos 5x \cos 2x} +$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\cos 5x + \cos(\frac{\pi}{4} + 2x) = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -1$$

$$\cos 5x = -\cos(\frac{\pi}{4} + 2x)$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 5x = \cos(\frac{3\pi}{4} - 2x)$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \pm(\frac{3\pi}{4} - 2x) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \quad 3x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}; \quad x = -\frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

N5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ ((|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

~~Пусть $(x_0; y_0)$ - решение, тогда $(x_0; -y_0)$ - тоже решение~~

~~Выяснить~~

Графиком 1 ур-ия является квадрат с центром в точке $(-8; 0)$ и с сторонами || осям координат (сторона = 16)

Графиком 2 ур-ия являются 4 окр с центрами в точках $(\pm 8; \pm 15)$, $r = \sqrt{a}$

В) первый раз окр. пересекутся с квадратом, когда левые окр. коснутся горизонт. сторон кв.;

Г) правые окр. будут $= 15 - 8 = 7$

В этом случае правые окр. не будут пересекать кв.

$$7^2 + 8^2 = 105 > 49 \Rightarrow 2 \text{ точки}$$

Когда ~~они~~ касания $\Rightarrow a = 49$ - подходит

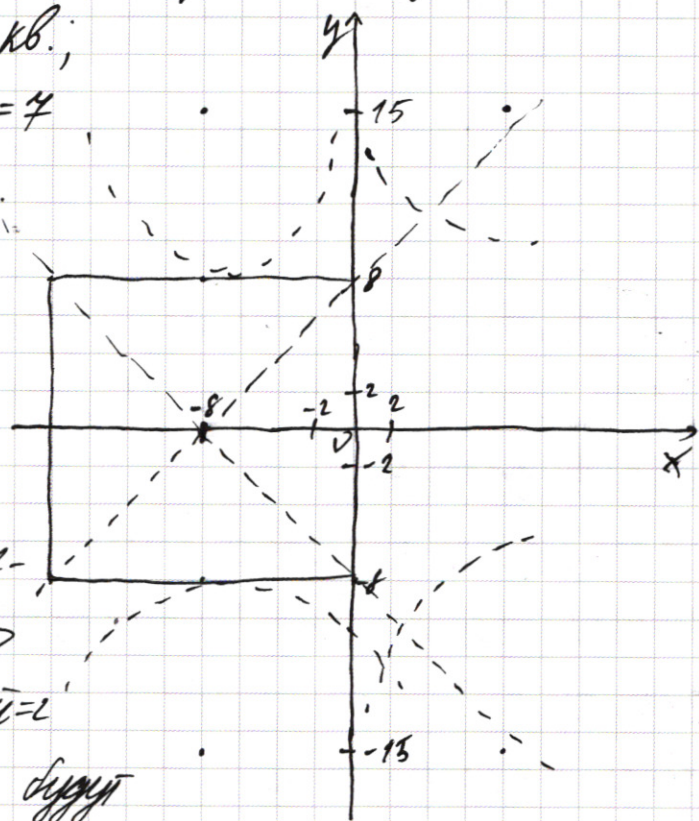
Далее левые окр. будут пересекать кв. > 2 точек $\Rightarrow$

в следующих раз решений $= 2$

будут, когда правые окр. будут

внутренним образом касаться с квадратом. Это возможно только если окр. правые окр. проходят через ~~те~~ противоположные вершины: $(8 - (-46))^2 + (15 - 8)^2 = a$

(при $a = 289$ т. перес. лев. окр. ~~совпадают~~, но прав. окр. уже пересек. кв.)
 $a = 24^2 + 4^2 = 625$
 Ответ: $a = 49; 625$



$$\begin{cases} \left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \\ (y^2 - xy + 4y) + (3xy - 3x^2 + 12x) = 0 \\ y(y - x + 4) + 3x(y - x + 4) = 0 \\ y = 3x \quad y = x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ (y+3x)(y-x+4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(x)} \cdot x^{2\ln(y^2)} \\ (y+3x)(y-x+4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{3\ln(-y)} = e^{2\ln^2 x + 8\ln^2(-y)} \\ (y+3x)(y-x+4) = 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3\ln x \cdot \ln(-y) = 2\ln^2 x + \ln^2(-y) \\ (y+3x)(y-x+4)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\ln^2(-y)}{\ln^2(x)} - 3 \frac{\ln(-y)}{\ln(x)} + 2 = 0 \\ (y+3x)(y-x+4)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\ln^2(-y)}{\ln^2(x)} - 3 \frac{\ln(-y)}{\ln(x)} + 2 = 0 \\ (y+3x)(y-x+4)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\ln^2(-y)}{\ln^2(x)} - 3 \frac{\ln(-y)}{\ln(x)} + 2 = 0 \\ (y+3x)(y-x+4)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\ln(-y)}{\ln(x)} - 1\right)\left(\frac{\ln(-y)}{\ln(x)} - 2\right) = 0 \\ (y+3x)(y-x+4)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+3x)(y-x+4)=0 \\ (-y-x)(-y-x^2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+3x)(y-x+4)=0 \\ (-y-x)(-y-x^2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+3x)(y-x+4)=0 \\ (-y-x)(-y-x^2)=0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (3; -9); (2; -2)$$

№ 7

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{24} - 1)x \end{cases}$$

Для каждого x будут подходить
 $(93 + 3(3^{24} - 1)x) - (3^x + 4 \cdot 3^{28})$ y

Заметим, что для $x \leq 4$ и $x \geq 31$ $y \leq 0 \Rightarrow$ нужно
посчитать сумму всех y при $x \in (5; 30)$:

$$93(30-5+1) + 3(3^{24} - 1)(5+6+7+\dots+30) - (3^5 + 3^6 + \dots + 3^{30}) = 4 \cdot 3^{28} \cdot (30-5+1)$$

$$5+6+7+\dots+30 = \frac{30+5}{2} \cdot 26 = 13 \cdot 35$$

$$3^5 + 3^6 + \dots + 3^{30} = \frac{3^5(3^{26} - 1)}{2}$$

$$S = 93 \cdot 26 + 3(3^{24} - 1) \cdot \frac{13 \cdot 35}{2} - \frac{3^5(3^{26} - 1)}{2}$$

$$S = 93 \cdot 26 + 3(3^{24} - 1) \cdot 13 \cdot 35 - \frac{3^5(3^{26} - 1)}{2} = 4 \cdot 26 \cdot 3^{28}$$

$$S = 863 + 455 \cdot 3^{28} - 104 \cdot 3^{28} - \frac{24(3^{28} - 9)}{2} = 863 + 3^{28}(455 - 104 - 13,5) +$$

$$\frac{3^5}{2} = 984,5 + 339,5 \cdot 3^{28}$$

Ответ: $984,5 + 339,5 \cdot 3^{28}$

N1

$64824 = 4^4 \cdot 3^3 \Rightarrow$ возможны следующие наборы цифр:

~~4444~~ 4444 93 11; 4444 33 31

I сл.: Существует $\frac{8!}{4! \cdot 4!}$ способов расставить 4 и $\frac{4!}{2!}$ способов расставить оставшиеся ~~четыре~~ цифры. Итого:

$$\frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

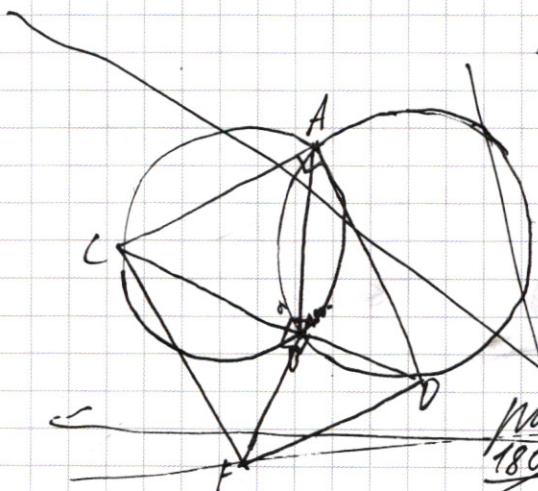
II. сл.: Существует $\frac{8!}{4! \cdot 4!}$ способов расставить 4 и $\frac{4!}{3!}$ способов расставить оставшиеся числа. Итого:

$$\frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 1 \cdot 7 \cdot 5 = 280$$

Складываем: $840 + 280 = 1120$

Ответ: 1120

N6



Дано: $R = 14$; $\angle CAD = 90^\circ$; $BF = BD$

Найти: а) CF; б) S_{ACF} , если $BC = 16$

Решение: $\angle CAD$ $R_1 = R_2$; $\angle CAD$ и

$\angle AOC$ ~~опираются на одну дугу~~ они

~~равны на одну дугу $AB \Rightarrow \angle CAD = \angle AOC =$~~

~~$\frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$; $R_1 = R_2$; $\angle ABC$ и $\angle ABD$ опираются~~

~~на равные дуги ($AC = AD = \frac{CD}{\cos 45^\circ}$) $\Rightarrow \angle ABC = \angle ABD$; $\angle ABC + \angle ABD =$~~

~~$180^\circ \Rightarrow \angle ABC = \angle ABD = 90^\circ \Rightarrow AC = 2R \Rightarrow CD = 2\sqrt{2}R \Rightarrow CB = BD = \sqrt{2}R \Rightarrow CF^2 =$~~

~~$CB^2 + BF^2 = 2R^2 + 2R^2 \Rightarrow CF = 2R = 28$~~

~~б) $\angle ACF = \angle ADF = \angle ADB + \angle FDC = 90^\circ$; S_{ACF}~~

N6

Дано: $R = 14$; $\angle CAD = 90^\circ$; $BF = BD$

Найти: а) CF - ? б) S_{ACF} , если $BC = 16$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

64+225

289

$$7^2 + 8^2$$

Q-225

$$|x+8| = 8$$

$$x=0 \quad x=-16$$

$$d-45$$

135~2

$$\begin{array}{r} 45 + 3 = 48 \\ R = 16 \end{array}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = k^{\frac{R}{35 \ln(135-2)}} = \left(\frac{16}{9}\right)$$

$$\frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} \text{ cm}^2$$

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\frac{x_1}{\sin \alpha} = \frac{x_2}{\sin \beta}$$

$\frac{4}{3}$

$$x_1 \sin \alpha = x_2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\frac{x_1}{\sin 15^\circ} = \frac{x_2}{\sin 25^\circ}$$

$$a = \sqrt{2} R$$

$$\tan(45^\circ) = \frac{x}{(BD + BC)} = \frac{x}{2x} = 1$$

$$BD^2 + PC^2 = 2x^2 - 2 \cdot BD \cdot PC$$

$$R\sqrt{2} \quad \frac{R^2}{\sqrt{2}R} \quad \frac{R}{\sqrt{2}}$$

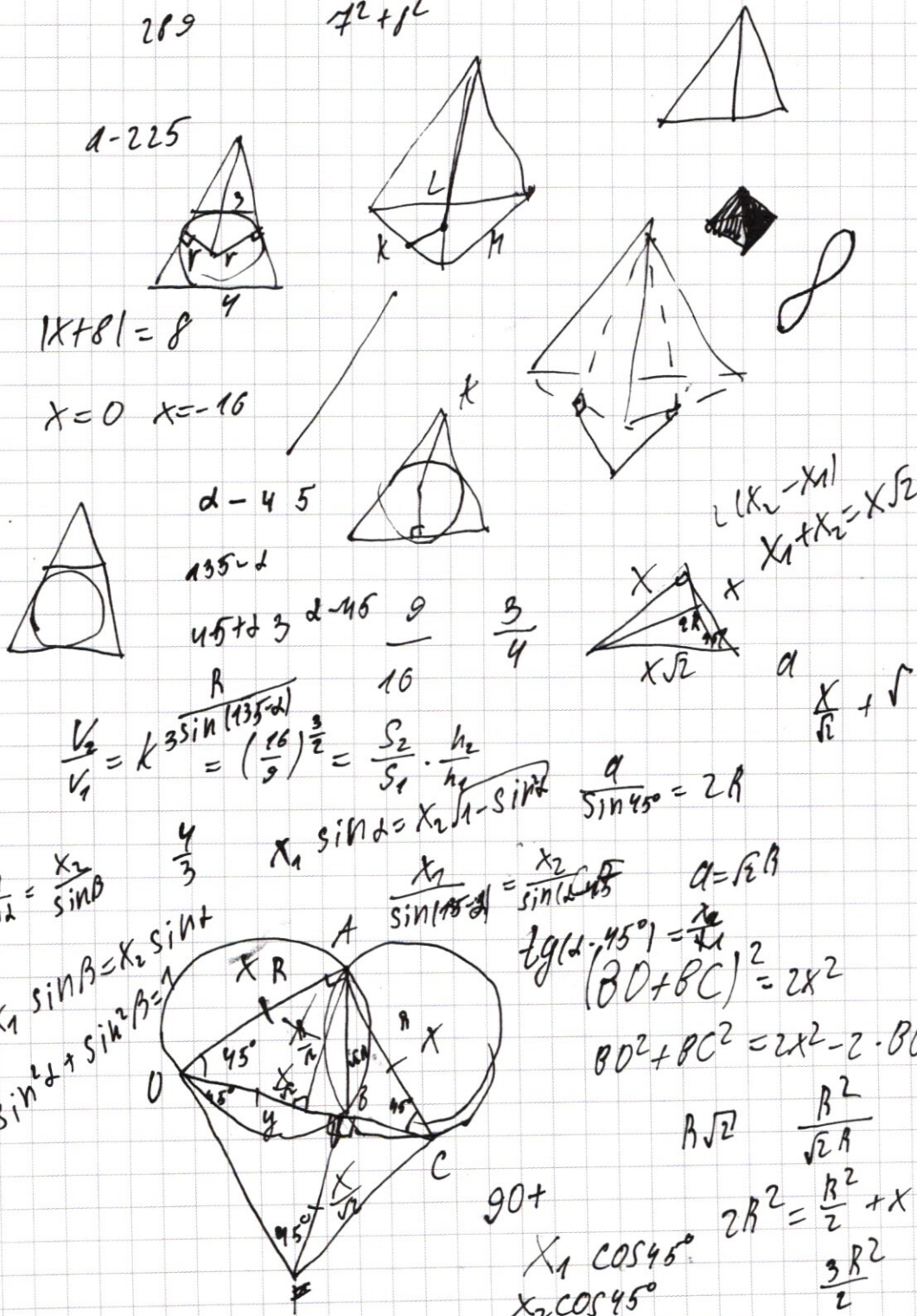
90+

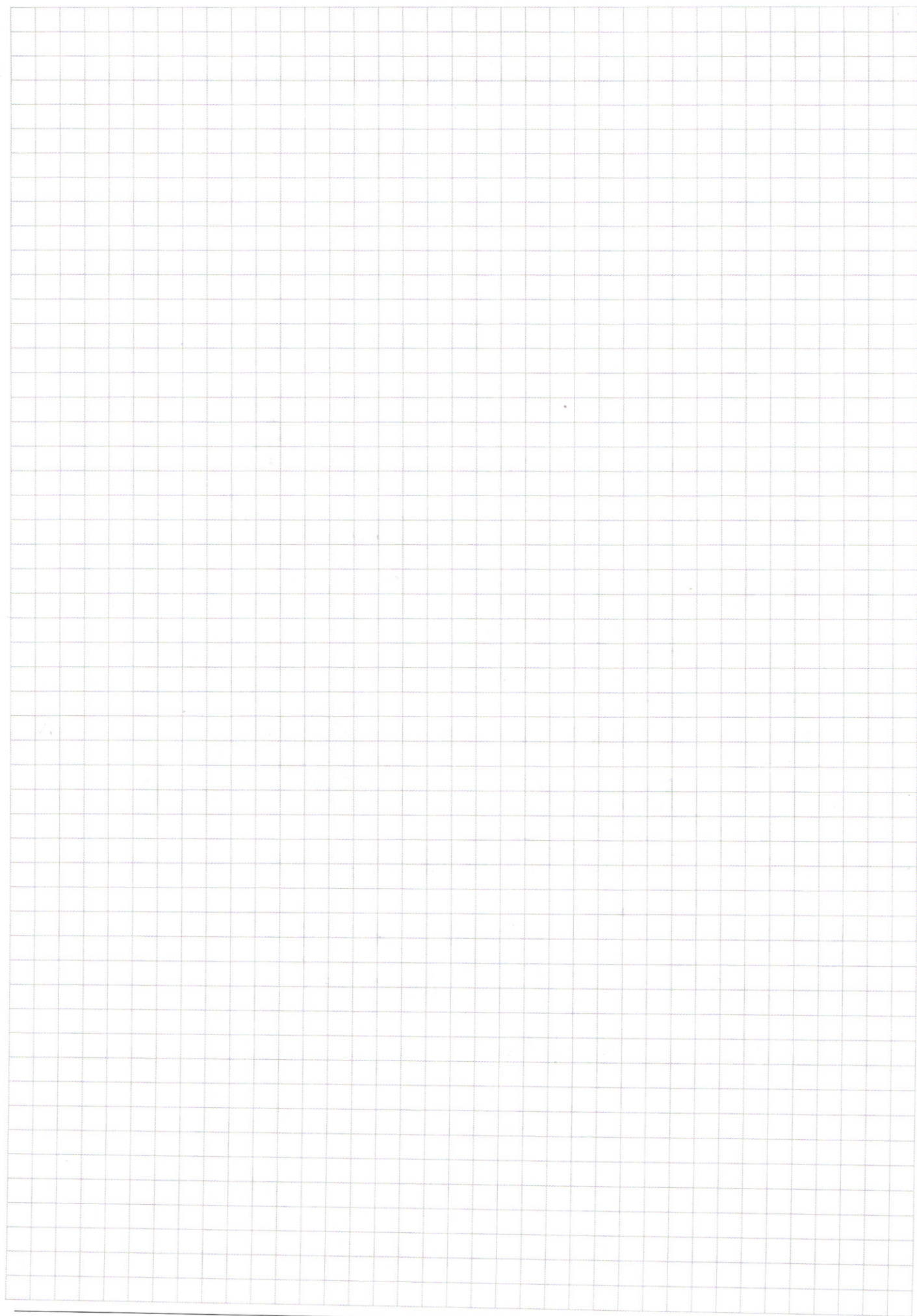
$$X_1 \cos 45^\circ$$

$x_2 \cos 45^\circ$

$$2R^2 = \frac{R^2}{2} + x$$

$$\frac{3R^2}{2} \quad \sqrt{\frac{3}{2}} R$$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$64824 = 4^4 \cdot 3^3$

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{2}$$

35

15 $y > 81 + 4 \cdot 3^{28}$

$y \leq 81 + 4 \cdot 3^{28}$

$y (3^{28} - 3) \cdot 5$

$y > 243 + 4 \cdot 3^{28}$

$y \leq 48 + 5 \cdot 3^{28} -$

(4; 31)

$y \leq 93$

$y < 93 + 3^{28}x - 3x$

$x = 28$

$x = 31$

$30 + 5$

$93 + 3^{28}x - 3x - 3x - 4 \cdot 3^{28}$

$3^{28}(x - 4) - 3x - 3x + 93$

$81 + 4$

85

$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$

$1 \quad 2 \quad 4$

$1(2^3 - 1)$

1

$\frac{t - 1}{t}$

$\frac{4 \cdot 3^{28} - 93}{3^{28} - 3}$

$13 \cdot 35 - 4 \cdot 26 \quad 402 - 243$

$390 + 65$

$455 - 104 = 351$

$$93 \cdot \frac{100}{4} - 93$$

$$\begin{array}{r} 9300 \overline{) 14} \\ 8 \\ 13 \\ 12 \\ 10 \\ 8 \\ 10 \end{array}$$

$$4^4 \cdot 3^3$$

$$39 \cdot 35$$

$$2325 - 93 \overline{) 1365} \quad // \quad 3 \quad 6 \quad 9 \quad 4$$

$$37^2 - 2^2$$

$$1000 - 40 \cdot 93$$

$$3; 6 \quad 9 \quad 4$$

$$(35+2)^2$$

$$1000 - 134 \quad 4^4 \cdot 3^3$$

$$1225 + 140 + 4 - 4$$

$$163$$

$$3 \quad 3 \quad 3$$

$$1365$$

$$9 \quad 9$$

$$(3; 6) \quad (3; 6) \quad (3; 6)$$

$$\begin{array}{r} 1365 \overline{) 3} \\ 12 \\ 16 \\ 15 \end{array}$$

$$390 + 85$$

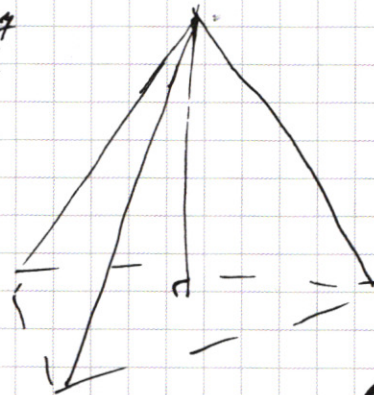
$$455 - 104 - \frac{27}{2}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{array}$$

$$\frac{3^5}{2}$$

$$4 \cdot$$

$$4 \cdot 120$$



$$70$$

$$\frac{243}{2} = 121,5$$

$$455 - 104 - 13$$

$$4^4 \cdot 3^3$$

$$455 - 115 \quad 11 \quad 3 \quad 9$$

$$4444 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1$$

$$1234$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$$

$$340$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \quad 7$$

$$339,5$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$9 \quad 3 \quad 11$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64827 \\ 63 \overline{) 18} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 723 \\ 66 \overline{) 6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 723 \\ 6 \overline{) 12} \end{array}$$

$$3^4 \cdot 241$$

$$212 \cdot 3^4 = 7^2$$

$$\begin{array}{r} 64827 \\ 63 \overline{) 18} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \\ 6 \overline{) 12} \end{array}$$

$$27 \cdot 2401$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ 3 \overline{) 01} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{array}$$

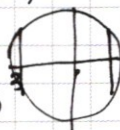
$$70$$

$$84$$

$$\phi$$

$$3$$

$$\begin{array}{r} 2401 \\ 24 \\ 16807 \\ 4 \overline{) 802} \\ 64824 \end{array}$$



$$343 \cdot 4 \cdot 3$$

$$7^4 \cdot 3^3$$

$$\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos 5x = -\cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

0	1	3
---	---	---

$$\cos(5x+2x) + \cos(5x-2x)$$

$$\sin(5x+2x) - \sin(5x-2x)$$

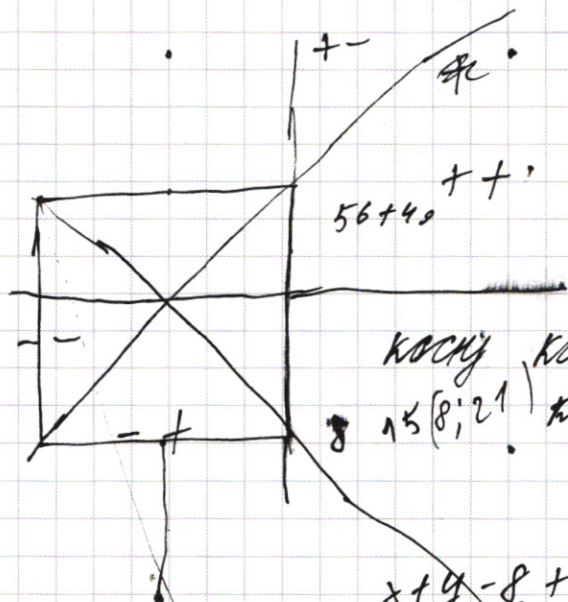
$$\sin 5x \sin 2x$$

$$\cos 5x \cos 2x - \cos 5x \cos 2x + \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x$$

$$\sin 5x \cos 2x + \cos 5x \sin 2x - \sin 5x \cos 2x + \cos 5x \sin 2x$$

$$2 \cos 5x \sin 2x + 2 \cos 5x \cos 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$



$$2x + 16 = 16$$

$$x = 0$$

$$2x + 16 = -16$$

$$x = -16$$

$$x + y - 8 + x - y$$

$$x + y + 8 - x + y - 8 = 16$$

$$2y = 16 \quad y = 8$$

$$(y + 3x)(ay + bx + c)$$

$$a = 1 \quad 3b = -3$$

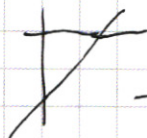
$$b = -1 \quad c = 4$$

$$(25 - 1)^2 = 625 - 50 + 1$$

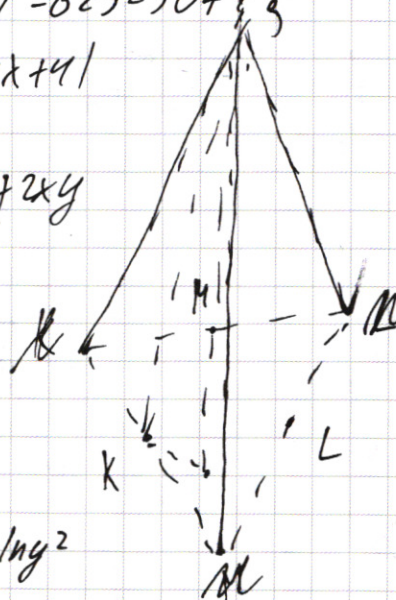
$$(y + 3x)(y - x + 4)$$

$$y^2 - 3x^2 + 2xy$$

$$\ln e^5 + \ln e^7$$



$$-\frac{x^7}{y} > 0$$



$$\frac{x}{(1-y)\ln(1-y)}$$

$$= x^{2\ln(y^2)} = x^{2\ln x} \cdot x^{2\ln y^2}$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$1 + 16$$

$$-1 \pm \sqrt{17}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$