

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① Вар. 8.

$$64827 = 3 \cdot 21609 = 3 \cdot 3 \cdot 7203 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2401 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 343 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1$$

$$n_{\text{max}} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot 8 = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 = 31360$$

②

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} (\cos^2 x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \cos (2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos (2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 \cos (\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) \cos (\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\cos (\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\cos (\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

③

$$\begin{cases} (-\frac{x^2}{y})^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\ln(-y) \cdot \ln(-\frac{x^2}{y}) = 2 \ln(xy^2) \cdot \ln x$$

$$\ln(-y) (2 \ln x - \ln(-y)) = 2 \ln x + 2 \ln(-y) \cdot \ln x \quad \text{Замечание: } \ln(-y) = a; \ln x = t$$

$$a(2t - a) = 2t + 2a \ln(-y) \cdot \ln x$$

$$2at - a^2 = 2t^2 + 4at$$

$$a^2 - 3at + 2t^2 = 0$$

$$(\frac{a}{t})^2 - 3(\frac{a}{t}) + 2 = 0$$

$$\frac{a}{t} = 1$$

$$\frac{a}{t} = 2$$

$$\frac{\ln(-y)}{\ln x} = 1 \Rightarrow x = -y$$

$$\frac{\ln(-y)}{\ln x} = 2 \Rightarrow x^2 = -y$$

$$1) x = -y \Rightarrow y^2 - 2y^2 - 3y^2 - 12y + 4y = 0$$

$$4y^2 + 8y = 0$$

$$y = 0$$

$$y = -2$$

$$x = 2$$

$$2) y = -x^2 \Rightarrow (-x^2)^2 + 2x(-x^2) - 3x^2 - 12x + 4(-x^2) = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$

$$x = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = 3$$

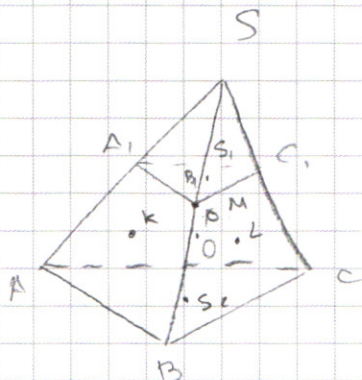
$$1 \quad -2 \quad -7 \quad 12 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = -9$$

$$3 \quad 1 \quad 1 \quad -4 \quad 0$$

$$y = -x^2 = -(\frac{\sqrt{17}-1}{2})^2 = -\frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}-9}{2}$$

$$\text{Ответ: } (2, -2), (3, -9), (\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{\sqrt{17}-9}{2})$$



(4)

(O, R) - сфера

$$S_{ABC} = 16$$

$$S_{AB_1C_1} = 9$$

$$(O, R) \cap ABC = K$$

$$(O, R) \cap BCS = L$$

$$(O, R) \cap ASC = M$$

$$(O, R) \cap ABC = S_2$$

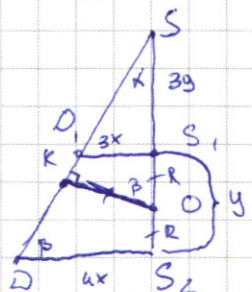
$$(O, R) \cap AB_1C_1 = S_1$$

$$SO \perp ABC$$

$$SO \perp AB_1C_1$$

Найти: $\angle KSO$, S_{KLM} (площадь сечения) - ?

7. S, K, O, S_1 и S_2 лежат в одной плоскости. $\triangle SO, S_1 \sim \triangle SS_2O$, $\triangle SS_2O \sim \triangle SKO$, $\triangle SKO \sim \triangle S_1O, S_1$.



$$OK = OS_1 = OS_2 = R$$

$$SK \cap AB_1 = D_1$$

$$SK \cap AB = D$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{DS_2}{DS_1} = \frac{4}{3} = \frac{SS_2}{SS_1} \Rightarrow \frac{S_1S_2}{SS_1} = \frac{1}{3}$$

$$y = 2R \Rightarrow \text{в } \triangle SKO: \sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{3y + \frac{y}{2}} = \frac{R}{6R + R} = \frac{1}{7}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$$

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{SK}{SS_2} \right)^2, \quad SS_2 = 4y = 8R, \quad SK = \sqrt{(7R)^2 - R^2} = R\sqrt{48} = 4R\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{4\sqrt{3} \cdot R}{28R} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{7} \right)^2 = \frac{3}{49} \Rightarrow S_{KLM} = \frac{3}{49} S_{ABC} = \frac{3 \cdot 16}{49} = \frac{48}{49}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}; S_{KLM} = 12$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$2\cos 5x \cdot \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$2\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$\sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x) = 0$

$\cos 2x + \sin 2x = 0$ 2) $\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0$

$\sqrt{2} (\cos(2x - \frac{\pi}{4})) = 0$ $\sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$

$\sqrt{2} \cdot 2 \cos(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$

$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ 2) $\cos(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$ 3) $\cos(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$

$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$ $\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ $7x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ $3x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$ $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

$x^2 + x - 4 = 0$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

$y = -(\frac{\sqrt{17}-1}{2})^2 = -(\frac{17+1-2\sqrt{17}}{4})$

$y = \frac{\sqrt{17}-9}{2}$

③ $\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$(1 - \frac{x^2}{y})^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$

$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

$y^2 + 2y(x+2) - 3x^2 + 12x = 0$

$\frac{D}{4} = x^2 + 4x + 4 + 8x^2 - 12x \geq 0$

$9x^2 - 8x + 4 \geq 0$

$x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$(x-1)^2 \geq 0$

$x = 1$

$\frac{(a/t)^2}{t} - 3\frac{(a/t)}{t} + 2 = 0$

$\frac{a}{t} = 1$ $\frac{a}{t} = 2$

$\frac{\ln(-y)}{\ln(x)} = 2$ $\frac{\ln(-y)}{\ln x} = 2$

1) $x = -y$ 2) $x^2 = -y$

$y = -x^2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2, 1$

$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

1) $y^2 - 2y^2 - 3y^2 - 12y + 4y = 0$

$-4y^2 - 8y = 0$

$-4y(y+2) = 0$

$y_1 = 0$ нет $y_2 = -2$

$x_2 = 2$

2) $(-x^2)^2 + 2x(-x^2) - 3x^2 + 12x + 4(-x^2) = 0$

$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$

$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0$

$x(x^3 - 2x^2 - 7x + 12) = 0$

$x = 0$ нет $x_1 = 3$ $y_1 = -9$

$-8 - 8 + 12 = -4$

$27 - 18 - 21 + 12 = 39 - 39 = 0$

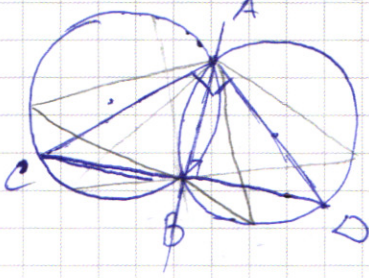
$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 & 12 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

$x^2 + x - 4 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$

$$3+5+5+5+5+6+6$$

$$3+70+12 \quad 35$$



⑥

$$R=17$$

$$(W_1; R) \cap (W_2; R) = A, B$$

$$C \in (W_1; R)$$

$$D \in (W_2; R)$$

$$BE \perp CD$$

$$\angle CAW = 90^\circ$$

$$FB \perp CD$$

$$BF = BD$$

$$AF > BA$$

$$1) CF = ?$$

$$2) BC = 16, S_{ACF} = ?$$

$$CA^2 = CB^2 + BA^2$$

$$CD = CB + BD$$

$$CB^2 = CF^2 + BF^2$$

$$BD^2 = BF^2 + FD^2$$

$$CD^2 = CF^2 + BF^2 + FD^2 + 2 \cdot (CF \cdot BF + BF \cdot FD)$$

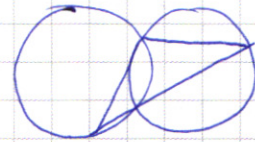
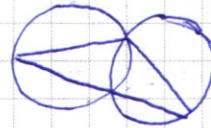
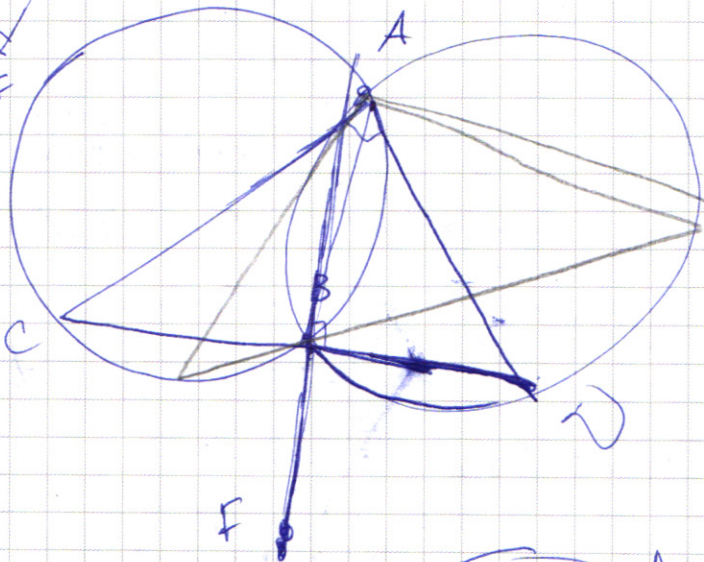
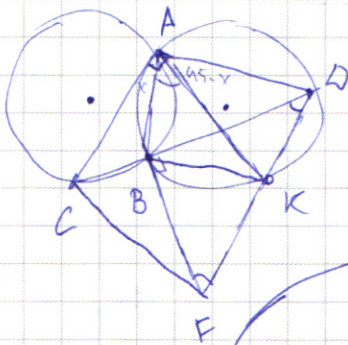
$$CD^2 = CF^2 + FD^2$$

$$CF = ?$$

$$CB = CD - BD$$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CD^2 + BD^2 - 2 \cdot CD \cdot BD + BF^2 =$$

$$CF^2 = CA^2 + AD^2 - 2 \cdot \sqrt{CA^2 \cdot AD^2} + BF^2$$



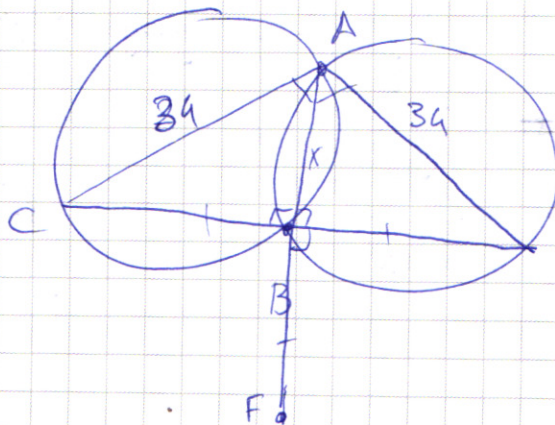
$$4BD^2 = 36^2 - x^2$$

$$\begin{aligned} 36\sqrt{2} &= 2 \cdot 36^2 - 4x^2 \\ 36\sqrt{2} &= 2 \cdot 36^2 - 4x^2 \\ \frac{36\sqrt{2}}{2} &= 36^2 - 2x^2 \\ x^2 &= \frac{36^2 - 36\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

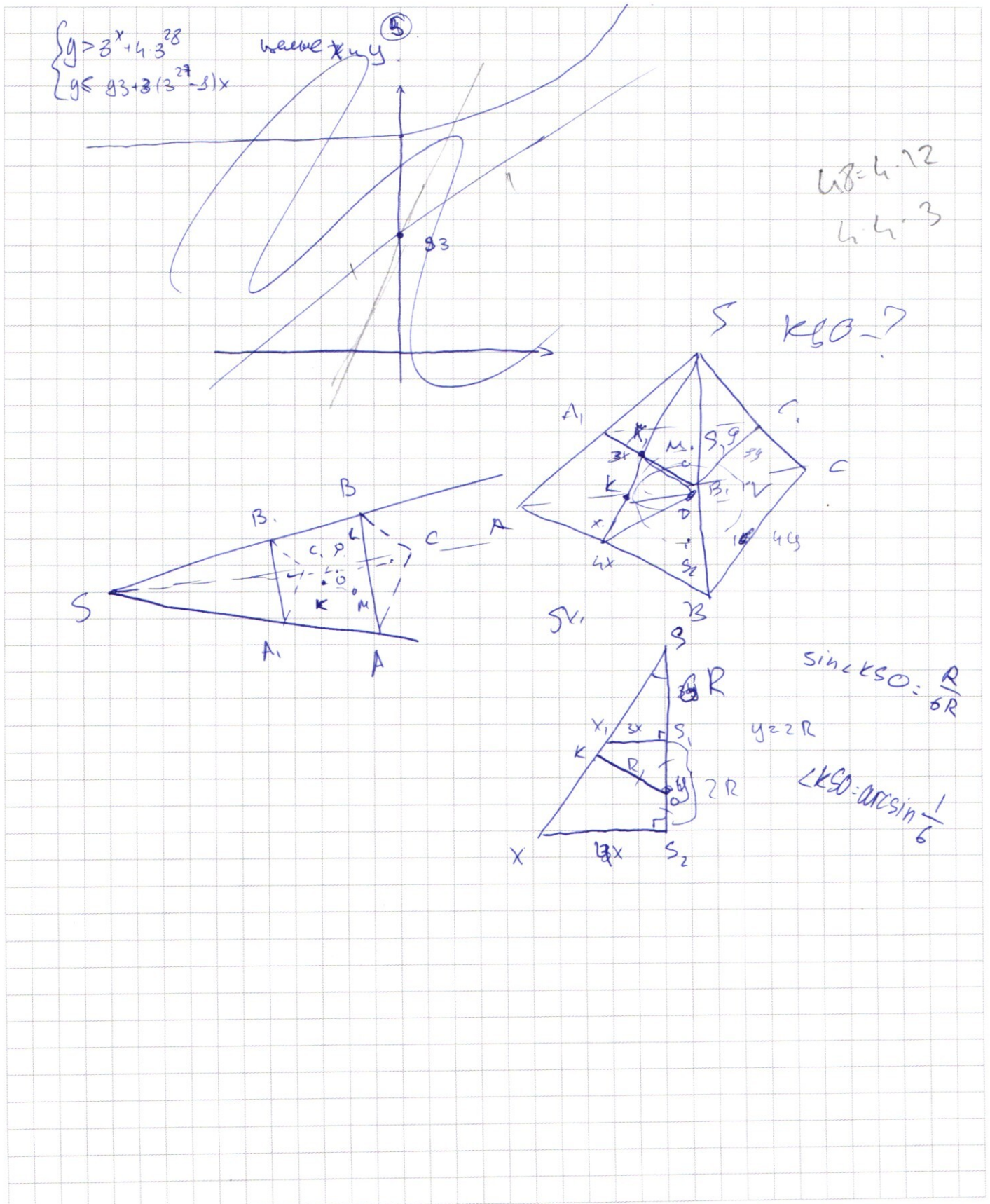
$$x = \frac{36\sqrt{2}}{2}$$

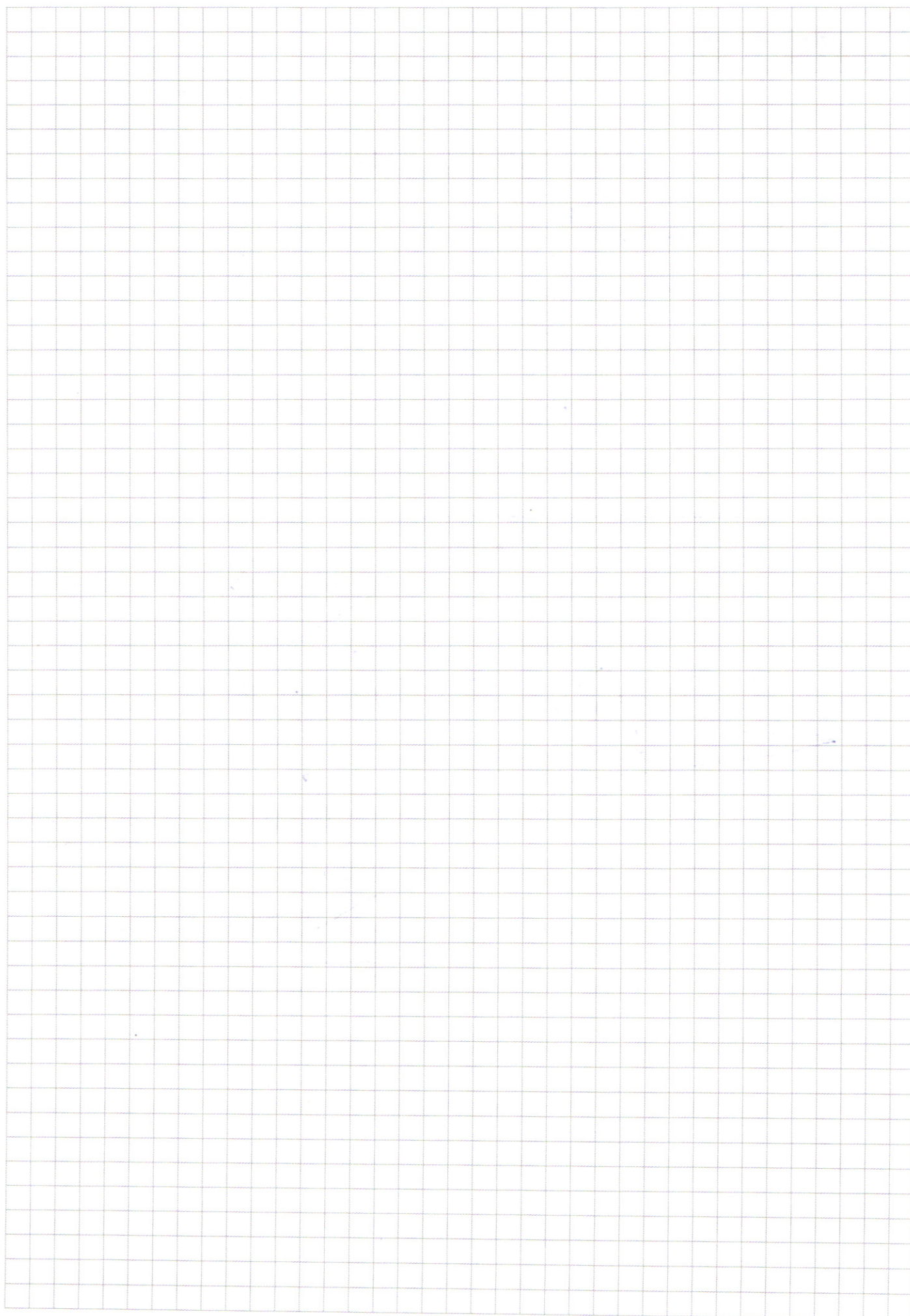
$$CB = \sqrt{36^2 - \frac{36^2}{2}} = \frac{36}{\sqrt{2}}$$

$$36 = CF$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 решения ⑤

$$\begin{cases} |x+8| + |y+8| = 16 \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = 25 \end{cases}$$

$|x+8| + |x-y+8| = 16$

$$x^2 + y^2 + 64 + 2xy + 16x + 16y + x^2 + y^2 + 64 + 16x - 16y - 2xy - 2((x+8)^2 - y^2) = 256$$

$$2x^2 + 2y^2 + 128 + 32x + 2x^2 + 32y + 128 - 2y^2 = 256$$

$$4x^2 + 64x = 0 \quad |y+8| + |8-y| = 16 \quad \begin{cases} y < -8 \\ -y-8+8-y=16 \\ -2y=16 \\ y=-8 \text{ не подходит} \end{cases}$$

$$4x(x+16)=0 \quad \begin{cases} 64 + (y-15)^2 = 25 \\ y^2 - 30y + 113 = 0 \\ D = 113 \end{cases}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -16$$

$$y = -8, \quad D = 113$$

$$2x^2 + 2y^2 + 128 + 32x - 2x^2 - 32x - 128 + 2y^2 = 256$$

$$4y^2 = 256$$

$$y^2 = 64$$

$$y = \pm 8$$

1) $y = 8$ $|x+16| + |x| = 16$
 $x = 0, x = -16$

$y = -8$

$A = 113$ $x = 0, y = 8$
 $x = 0, y = -8$
 $x = -16, y = 8$
 $x = -16, y = -8$ 4 решения

$256 \div 16 = 16$

$y^2 - (x+8)^2 = 256$

$x = 0$ - не есть $x = -16$ - аналогично

$y^2 \geq (x+8)^2$

$34 - 10(34 + 46)$

$28.50 = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 =$

F_1 5.6
 $FB = 30$

$$\frac{10}{35} = \frac{2}{7} \approx 29\%$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 7} \\ 2 \overline{) 0.285} \\ 20 \\ 74 \\ 60 \\ 36 \\ 40 \\ 35 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 8^{28} \\ y \leq 93 + 13(3^{23} - 1) \cdot x \end{cases}$$

$$93 + 13(3^{23} - 1) \cdot x = 3 \cdot 81 + 13(3^{23} - 1) \cdot x$$

$$2 = 13 - 1 / (3^6 + 3^3 + 1)$$

$$y \leq 93 + 26 \cdot 734 \cdot x$$

$$\frac{13}{35}$$

$$27 \cdot 27 + 27 + 1$$

$$S = 6 \cdot (a^n - 1) / (a - 1)$$

$$\begin{array}{r} 122 \\ 222 \\ 183 \\ 5x \\ 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 759 \\ 31 \\ 134 \\ 134 \end{array}$$

$$210 + 35$$

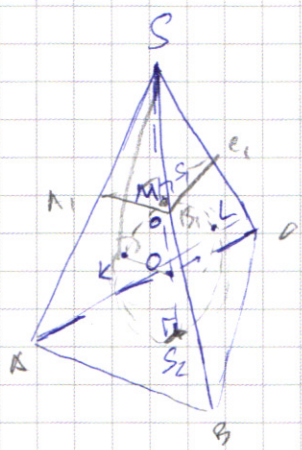
$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 35} \\ -1050,31 \\ \hline 250 \\ 250 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$S_{ABCC} = 3416$$

$$S_{A_1B_1C_1} = 9$$

$$ABC \perp SO$$

$$ABC_1 \perp SO$$



$$OS_1 = OS_2 = R = OK = OM = OL$$

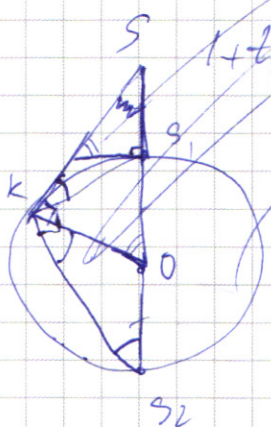
$$SK = SL = SM$$

$$SR^2 = SS_1 \cdot SS_2 = (SS_2 - 2R) \cdot SS_2$$

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{SS_2 - R}$$

$$\cos^2 \angle KSO = \frac{SK^2}{SO^2} = \frac{(SS_2 - 2R) \cdot SS_2}{(SS_2 - R)^2} = \frac{SS_2^2 - 2R \cdot SS_2}{SS_2^2 - 2R \cdot SS_2 + R^2}$$

$$\cos \angle KSO = \frac{OK}{SK} = \frac{R}{SS_2 - 2R}$$



$$1 + \cos^2 \angle KSO = \frac{1}{\cos^2 \angle KSO} = 1 + \frac{R^2}{SS_2^2 - 2R \cdot SS_2}$$

$$a_1 \dots a_8 = 64827 \cdot 3 \cdot 21609 = 9 \cdot 7203 = 27 \cdot 2601 = 27 \cdot 7 \cdot 343 = 27 \cdot 49 \cdot 29$$

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 3} \\ 2 \overline{) 1609} \\ 2 \overline{) 18} \\ 18 \\ 02+ \end{array}$$

$$343 = 280 + 63 = 29 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 21609 \overline{) 3} \\ 2 \overline{) 7203} \\ 2 \overline{) 12} \\ 12 \\ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 3} \\ 2 \overline{) 343} \\ 2 \overline{) 28} \\ 28 \\ 06 \end{array}$$

29 = простое число

0.

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 7 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \overline{) 149} \end{array}$$

$$333 \cdot 77 = 33377721$$

$$29 \cdot 7 = 31 \cdot 360$$

$$\begin{array}{c} 8! \cdot 8! \cdot 8! \\ 3! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 4! \end{array}$$

$$8 \cdot 4 \cdot 3$$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 56 \cdot 7^2$$

$$10 \cdot 49 \cdot 64$$

$$31 \cdot 360$$



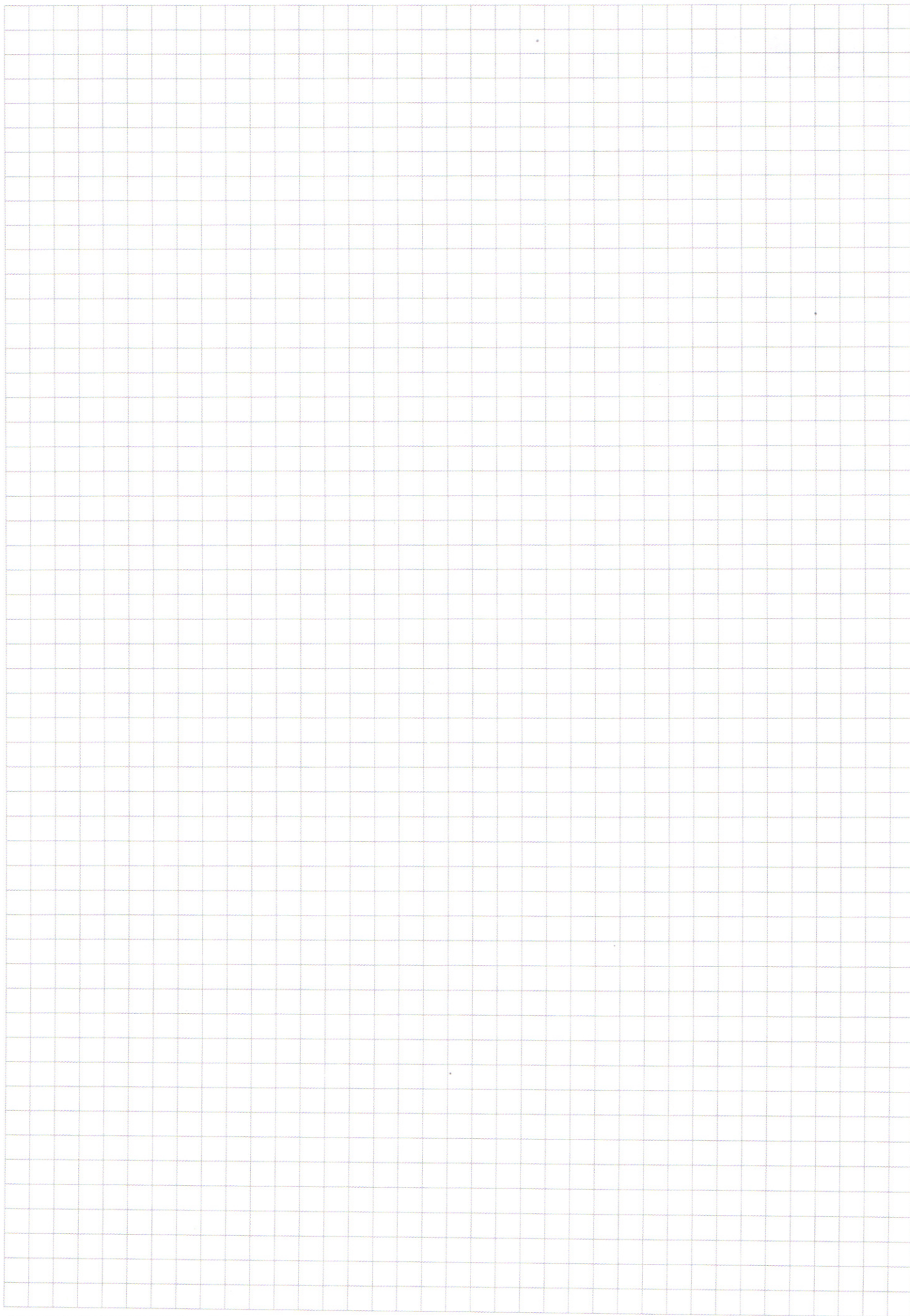
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)