

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} \sqrt{1} \\ 64827 \div 3 \\ 21609 \mid 3 \\ 7203 \mid 3 \\ 2401 \mid 7 \\ 343 \mid 7^3 \end{array}$$

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4 \Rightarrow \text{число состоит из } 4 \times "7"$$

$$1) \text{ из } 3^3 \text{ и } 7^4$$

$$2) \text{ из } 1 \text{ "9", } 1 \text{ "3" и } 2 \text{ "1"}$$

1. Вариант

Всего будем сдвигать по одной тройке вправо, если это невозможно, сдвигаем вправо б.т. тройку

$$1) 3337777 \rightarrow 5 \text{ переходов} \rightarrow 3377773 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 8 \text{ (нужно вставить ещё 1 единицу на л.б. место)}$$

2) по аналогии получаем

$$\begin{array}{lll} \text{I. } 8 \cdot (5+4+3+2+1) & \text{III. } 8 \cdot (3+2+1) & \text{V. } 8 \\ \text{II. } 8 \cdot (4+3+2+1) & \text{IV. } 8 \cdot (2+1) & \end{array}$$

$$S_{\text{итого}} = 8 \cdot (15+10+6+3) = 8 \cdot (34)$$

$$3337777 \rightarrow 7777333$$

2. вариант

сдвигаем по аналогии с 1 вариантом

397777, чтобы вставить две "1" у нас есть 49 возможных для первой "1" у нас 7 возможных мест, $S_{\text{итого}} = 49 \cdot (5+4+3+2+1) = 49 \cdot 15$ а для второй 8, но если поставим вторую "1" после 1, то этот вариант идентичен варианту, если мы поставим её после 1, $\Rightarrow$ 49 вариантов. Но мы рассмотрим случаи, когда "3" идёт перед "9" $\Rightarrow S_{\text{итого}} = 2 \cdot S_{\text{итого}} = 49 \cdot 30$

$$\text{Всего вариантов } 6 = 49 \cdot 30 + 8 \cdot 34 = 1470 + 352 = \underline{\underline{1822}}$$

Ответ: 1822

✓2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$\left[\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \right]^{(1)}$$

$$\textcircled{1} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\textcircled{2} \cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\left[\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \right]^{(2)}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos(\frac{2x + \frac{\pi}{4}}{2}) \cdot \cos(\frac{2x - \frac{\pi}{4}}{2}) = 0$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \cos(\frac{2x + \frac{\pi}{4}}{2}) = 0^{(3)} \\ \cos(\frac{2x - \frac{\pi}{4}}{2}) = 0^{(4)} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \cos(\frac{2x + \frac{\pi}{4}}{2}) = 0$$

$$\textcircled{4} \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{5\pi}{8} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}n, \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi l; k, n, l \in \mathbb{Z}.$$

✓3

$$\left(\left(-\frac{x}{y} \right)^2 \right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \textcircled{1} \quad -y > 0 \Rightarrow y < 0; x \geq 0$$

$$\left[y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \right]^{(2)}$$

$$\textcircled{2} y^2 + 2(x+2)y - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\frac{D}{4} = (x+2)^2 + 3x^2 - 12x = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x =$$

$$= 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2$$

$$y_1 = \frac{-x-2 \pm 2|x-1|}{2}$$

$$1) \text{ при } x \geq 1$$

$$2) \text{ при } 0 \leq x < 1$$

$$y_1 = x - 4$$

$$y_1 = -3x$$

$$y_2 = -x - 2 - 2|x-1|$$

$$y_2 = -3x$$

$$y_2 = x - 4$$

$$(y+3x)(y-x+4) = 0$$

$$1) y = -3x$$

$$\left(+ \frac{x^2}{3x} \right)^{\ln 3x} = x^2 \ln 3x^3$$

$$\left(\frac{1}{3} x^6 \right)^{\ln 3x} = x^2 \ln 2x^3$$

$$\ln 3x / (\ln x^6 - \ln 3) = 2 \ln 3x^3 \cdot \ln x$$

$$\text{Замени } t = \ln x, a = \ln 3$$

$$(t+a)(6t-a) = 4a+t+6t+2$$

$$6t^2 - at + 6at - a^2 = 4a+t+6t+2$$

$$at = a^2 \quad t = a \Rightarrow \ln x = \ln 3 \quad x = 3; y = -9$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2) y = x - 4$$

$$\left(\frac{x^2}{x^2 - 4 - x}\right)^{\ln(4-x)} = x^2 \ln(x(16-2x+x^2))$$

$$\ln(4-x)(2\ln x - \ln(4-x)) = 2(\ln x + 2\ln(x-4)) \cdot \ln x$$

Заменим
 $t = \ln(4-x)$
 $a = \ln x$

$$7at - t^2 = 2a^2 + 4at$$

$$2a^2 - 3at + t^2 = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = t \\ a_2 = \frac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = \ln 4 - x \\ \ln x = \ln \sqrt{4-x} \end{cases}$$

$$X = 4 - X; X = 2; y = -2$$

$$X = \sqrt{4-x}; X^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 - 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} - 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0$$

Ответ: $(3; 9); (2; -2); \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} - 4$

№5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & ① \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & ② \end{cases}$$

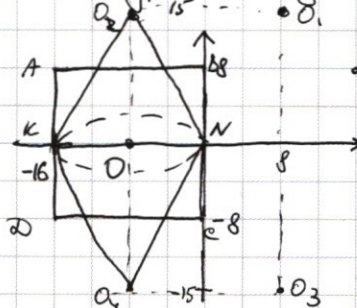
по оси OX

② Окр отраж. приг. к OX
и отраж. по оси OY
 $r = \sqrt{a}$

у нас 4 окр

чтобы

① квадрат с центром $(-8; 0)$



$$S(O, B) = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{49 + 64} = \sqrt{113}$$

2 два решения, когда окр с центрами O_1 и O_2 касаются
CD и AB по отв. или окр пересекаются в 2х точках или на BC и AD.

1) $DS \neq y \Rightarrow S_{O_1}(DC; O_1) = |-15 - (-8) - 15| = 7 \Rightarrow \sqrt{a} = 7; a = 49$
 $\sqrt{113} \Rightarrow$ окр с O_1 и O_2 не пересекаются.

2) т.к. окр симметричны отгос OX, то $r = O_1 N = O_2 K = O_2 M = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = \sqrt{a}$
 $a = 225 + 64 = 289$

из-за симметрии окр. из точек O_1 и O_2 , точка будет пересек в точке K , но это уже новых решений не будет.

3) Когда окр. с центр. O_1 и O_3 пересек A и D соответствует верно

$$\rho(O_1; D) = \rho(O_3; A) = \sqrt{(15+8)^2 + (8+10)^2} = \sqrt{(23)^2 + (18)^2} \Rightarrow 5a$$

$$a = 23^2 + 18^2 = 529 + 324 = 853$$

Ответ: $a = \{40; 1105\}$

✓7

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27} < 31 + (3^{27} - 1)x$$

3^{x-1} возраст быстрее $(3^{27} - 1)x$
стен возраст быстрее линейной $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{5 < x < 31} \quad (4 < x < 31)$$

$$\begin{aligned} x=5 \\ 3^4 + 4 \cdot 3^{27} < 31 + (3^{27} - 1) \cdot 5 \\ 81 + 4 \cdot 3^{27} < 31 + 5 \cdot 3^{27} - 5 \\ 50 - 5 < 3^{27} \text{ верно} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=4 \\ 3^3 + 4 \cdot 3^{27} < 31 + (3^{27} - 1) \cdot 4 \\ 27 + 4 \cdot 3^{27} < 31 + 4 \cdot 3^{27} - 4 \\ 27 - 31 + 4 < 0 \text{ неверно} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=32 \\ 3^{31} + 4 \cdot 3^{27} < 31 + (3^{27} - 1) \cdot 32 \\ 3^{31} + 4 \cdot 3^{27} < 31 + 32 \cdot 3^{27} - 32 \\ 3^{31} < 32 \cdot 3^{27} - 1 \text{ неверно} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=31 \\ 3^{30} + 4 \cdot 3^{27} < 31 + (3^{27} - 1) \cdot 31 \\ 3^{30} + 4 \cdot 3^{27} < 31 + 31 \cdot 3^{27} - 31 \\ 3^{30} < 31 \cdot 3^{27} \text{ неверно} \end{aligned}$$

$x=30$ верно

$$\Delta y = \underbrace{3(3^{27} - 1) \cdot 5 + 3(3^{27} - 1) \cdot 30}_{S_1} - \underbrace{3^5 - 3^4 - \dots - 3^2 - 3^1}_{S_2} - 4 \cdot 3^{28} \cdot (30 - 5 + 1) +$$

$$S_1 = \frac{3(3^{27} - 1) \cdot 5 + 3(3^{27} - 1) \cdot 30}{2} \cdot 26 = \left(\frac{3(3^{27} - 1) \cdot 35}{2} \right) \cdot 13$$

$$S_2 = \frac{3^5 \cdot (3^2 - 1)}{3 - 1} = \frac{3^5 - 3^1}{2}$$

Ответ:

$$\text{кон-во} \Delta y = 13 \left(3(3^{27} - 1) \cdot 35 - 8 \cdot 3^{28} + 93 \cdot 2 \right) - \left(\frac{3^5 - 3^1}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

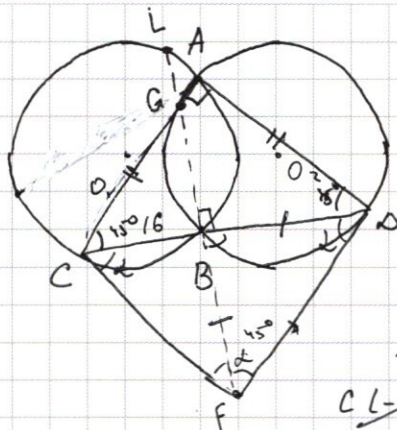
№ 6

Дано:

$$r = 17$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$CB = 16$$



Решение

$$\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow CA - \text{кас к 2 окр.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD - \text{кас к 1 окр.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = AD - \text{диаметры} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB - \text{высота и мед} \Rightarrow AB = \frac{1}{2} CD = CB$$

$$CB = AC \cdot \sin 45^\circ = 17 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$$

$$CL - \text{диаметр } (\angle CBL = 90^\circ)$$

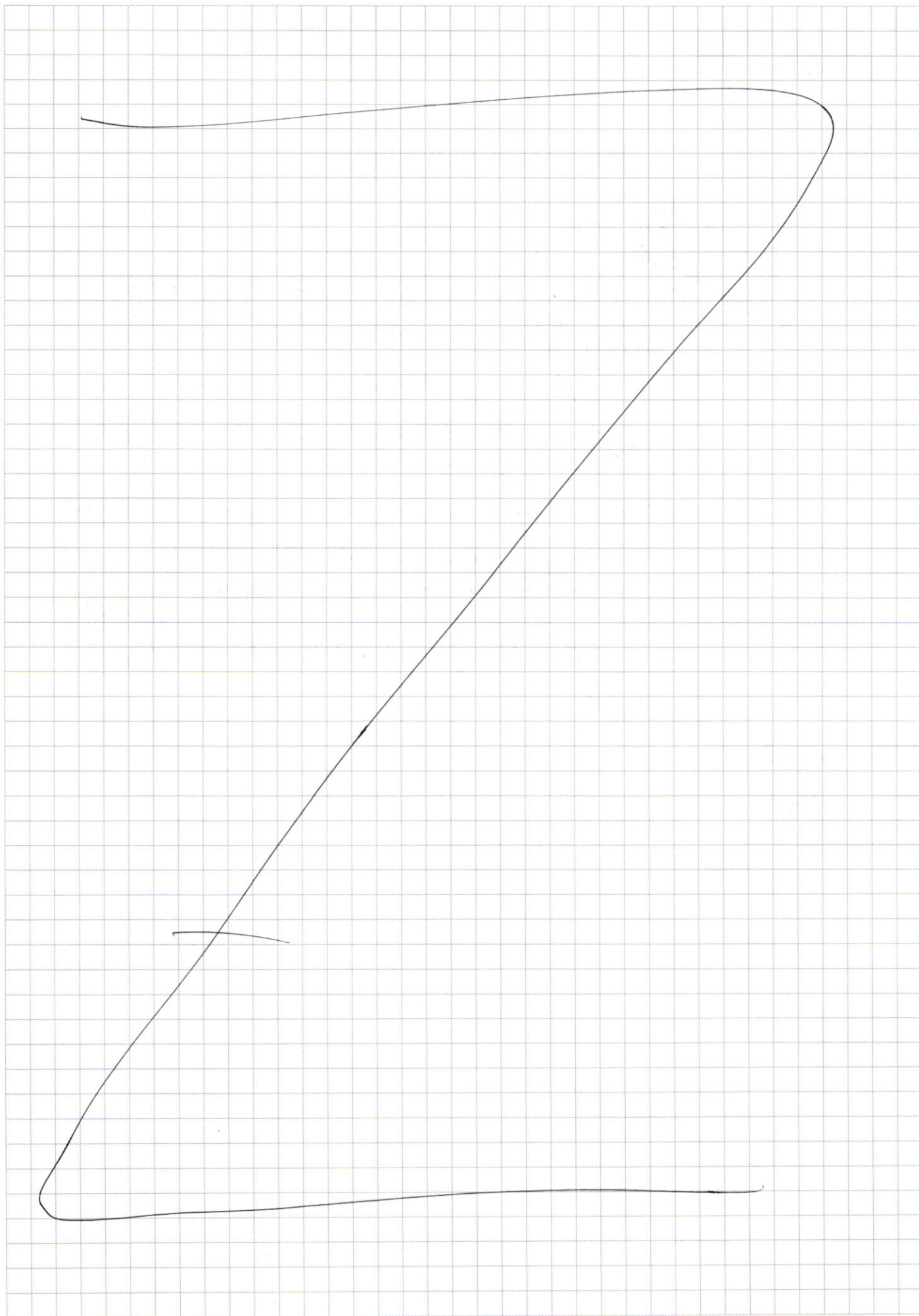
$$\angle C = \angle D \text{ (отв отпр на равные дуги)} \Rightarrow \angle C = \angle D = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB - \text{мед и высота}; AB = CB = BD \Rightarrow CF = 16/\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle ACF} = CB \cdot AF \cdot \frac{1}{2} = CB \cdot FB = \frac{1}{2} AC \cdot CF = 17\sqrt{2} \cdot 2/\sqrt{2} = 256$$

Отв: 1) $16\sqrt{2}$

2) 256



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№ 3

$$\begin{matrix} y < 0 \\ x > 0 \end{matrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} &= x^2 \ln(xy^2) \\ y^2 - 3x^2 &= 4(3x^2 + y^2) \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} y^{\ln - \frac{x^2}{y}} &= x^2 \ln(xy^2) = y^{\ln - \frac{x^2}{y}} = (xy^2)^{2 \ln x} \\ t^2 = 3x^2 + y^2 + 8xy \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (y^2 + 2)^2 - 4 - 3(x-2)^2 + 12 + 2xy = 0 \end{cases}$$

$$(y+x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0 / \ln(-y) \quad (7 \ln(-x) - \ln y) = (\ln x + 2 \ln y) \ln x$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \quad y^2 + 2(x+2)y - 3x^2 + 12x = 0 \quad \frac{D}{4} = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x-1)^2$$

$$(-y)^{2 \ln x - \ln(-y)} = (xy^2)^{2 \ln x} = x^{2 \ln x} \cdot y^{4 \ln x} = x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln(-y)} = x^{2 \ln x + 4 \ln(-y)}$$

$$+ x^{2 \ln(-y)} \cdot y^{-\ln(-y)} = (-y)^{2 \ln x - \ln y} = x^{2 \ln x + 4 \ln(-y)}$$

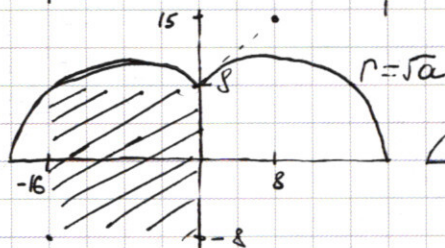
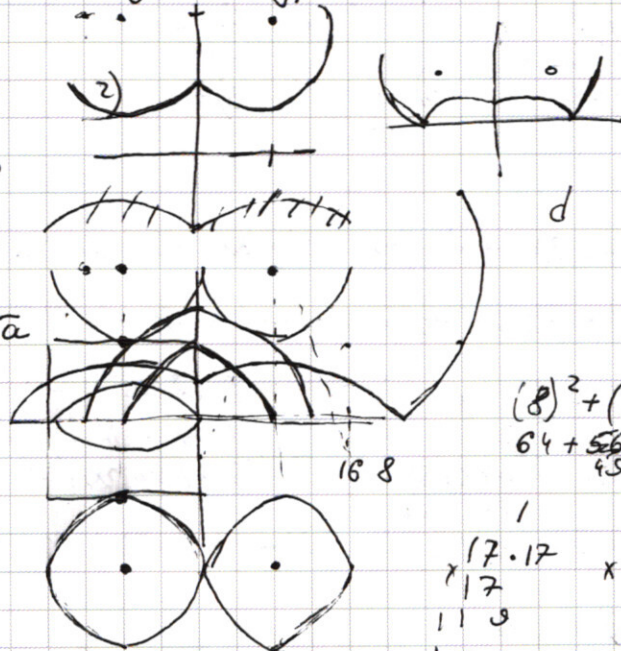
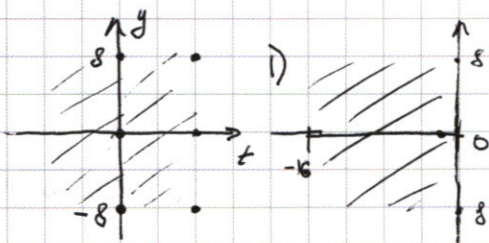
№ 5

$$x + 8 = t$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$|t+y| + |t-y| = 16$$

$$(|x|-8)^2 - a = (|y|-15)^2$$



$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x} > 4 \cdot 3^{2x} \\ y \leq 93 + 3(3^{2x} - 1) \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{2x} \leq 93 + 3(3^{2x} - 1) \quad x = 32$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{2x} \leq 31 + (3^{2x} - 1) \quad -28 < 31$$

$$27 + 4 \cdot 3^{2x} < 31 + (3^{2x} - 1) \quad x = 31$$

$$4(3^{2x} - 3^{2x} + 1) < 31 - 27$$

$$4 \cdot 3^{2x} - x(3^{2x} - 1) < 31 - 3^{x-1} \quad \text{youb}$$

$$4 \cdot 3^{2x} < 31 \quad x = 32$$

$$3^{2x}(4-x) - x < 31 - \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{youb}$$

$$-3^{2x} - 5 \quad -50$$

$$-7 \quad 15$$

$$x \geq 5$$

$$x \leq 28$$

$$381$$

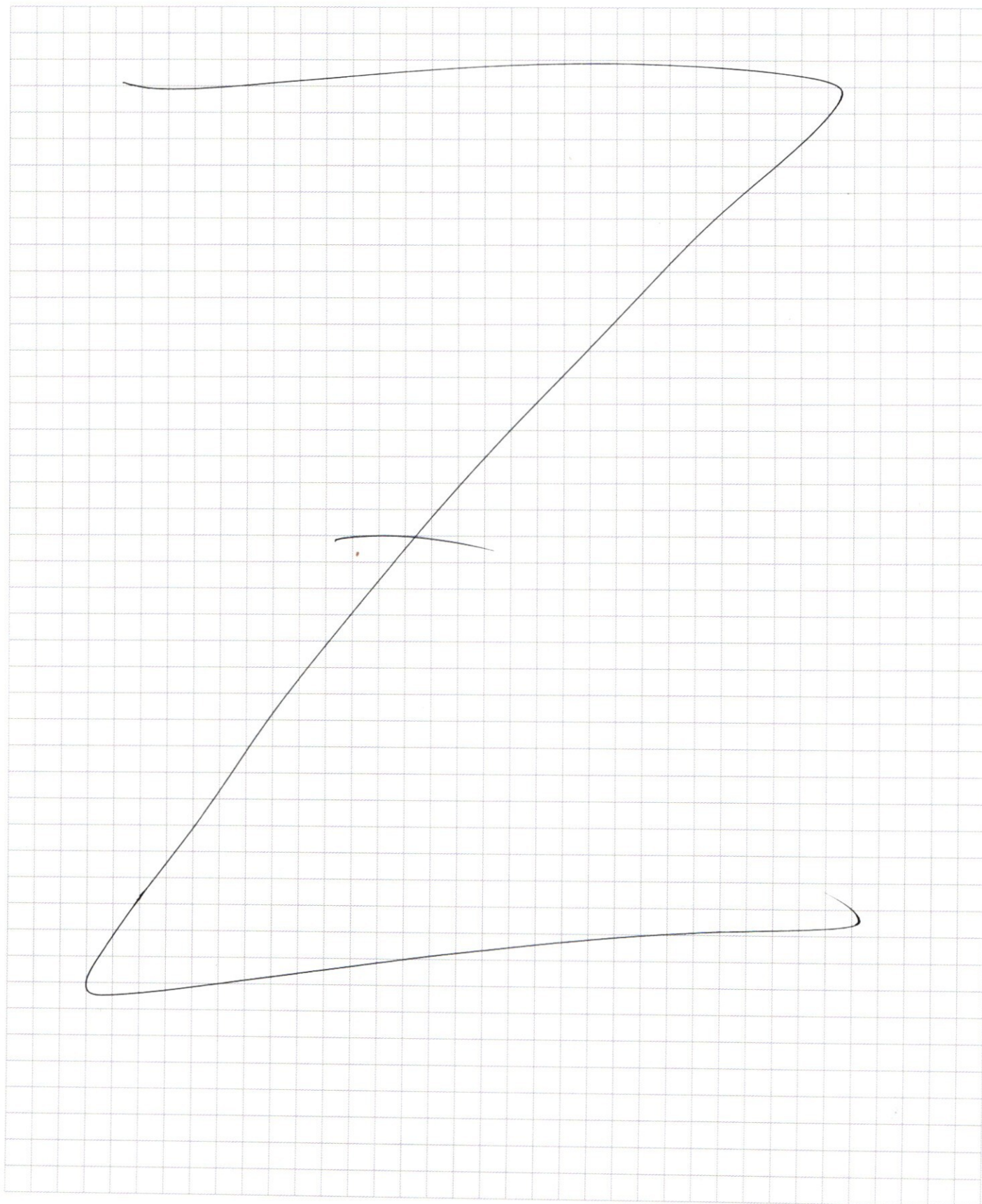
$$\begin{aligned} 3^{x+1} + 43 - 31 - (3^{2x} - 1) &= x \\ 3^{x+1} + 3^{2x}(4-x) - 31 + x &= 0 \\ 3^{x+1} - 3^{2x} - 31 + 5 &= 0 \end{aligned}$$

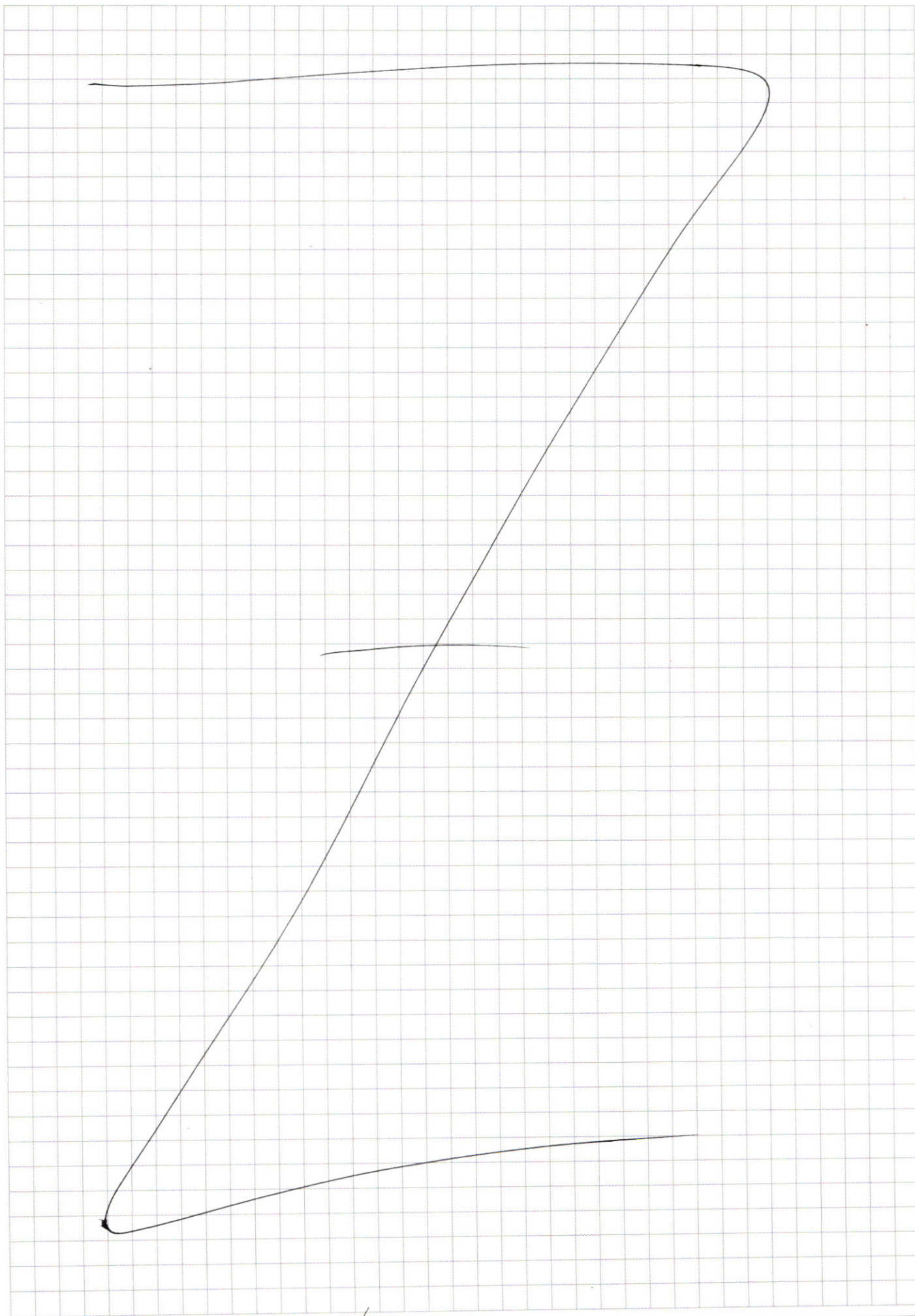
$$(8)^2 + (7)^2 = 64 + 49 = 113$$

$$\begin{array}{r} 17 \cdot 17 \\ 17 \\ 113 \\ 17 \\ 289 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ 69 \\ 46 \\ 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ 96 \\ 48 \\ 576 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)