

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

т.к. нужны 8-значные числа, то рассмотрим все комбинации цифр: 1, 1, 3, 3, 7, 7, 7, 7

всего таких комбинаций $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^4 = 420$

Ответ: 420 чисел

~5

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

I. $\begin{cases} y \geq -x-8 \\ y < x+8 \end{cases} : x+y+8+x-y+8=16 ; x=0$

II. $\begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \geq x+8 \end{cases} : x+y+8-x+y-8=16 ; y=8$

III. $\begin{cases} y < -x-8 \\ y < x+8 \end{cases} : -x-y-8+x-y+8=16 ; y=-8$

IV. $\begin{cases} y < -x-8 \\ y \geq x+8 \end{cases} : -x-y-8-x+y-8=16 ; x=-16$

$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 9$ — части окружности
(по четвертям) с радиусом 3 и центрами в:

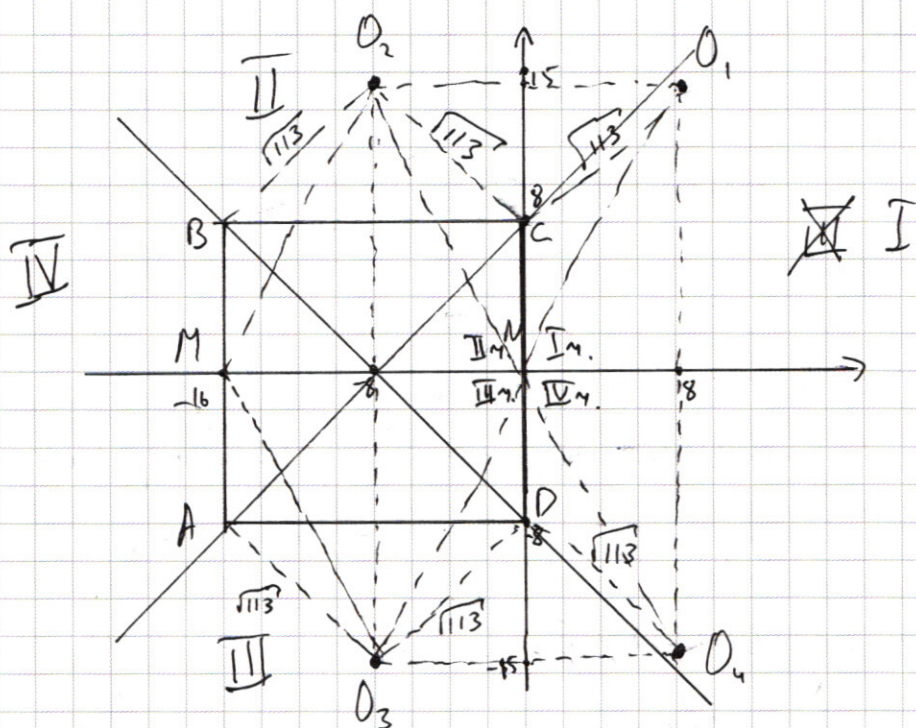
I четверть: (8; 15)

III четверть: (-8; -15)

II четверть: (-8; 15)

IV четверть: (8; -15)

см. на об.



$$BO_2 = O_2C = CO_1 = AO_3 = O_3D = DO_4 = \sqrt{113}$$

$$O_2M = MO_3 = O_3N = NO_2 = NO_1 = NO_4 = \sqrt{289}$$

$$a < 49 : \emptyset$$

$$a = 49 : \text{всего 2 реш.}$$

$$a \in (49; 113) : \text{всего 4 реш.}$$

$$a \in [113; 289) : \text{всего 4 реш.}$$

$$a = 289 : 2 \text{ реш.}$$

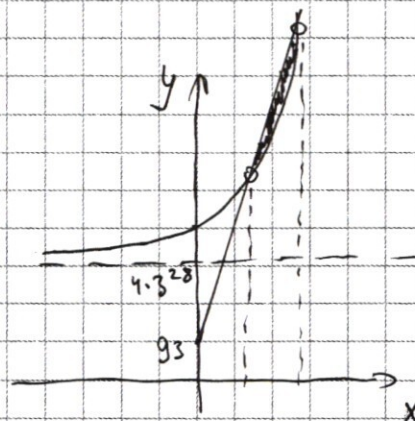
$$a > 289 : \emptyset$$

$$O_{\pm v}: \text{при } \begin{cases} a = 49 \\ a = 289 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3^{28}x - 3x \end{cases}$$

~ 7



$x \in \mathbb{Z}$

$y \in \mathbb{Z}$

$$\text{Для } x = 4: 81 + 4 \cdot 3^{28} = 93 - 12 + 4 \cdot 3^{28} \text{ не парн.}$$

$$\text{Для } x = 5: 3^5 + 4 \cdot 3^{28} < 93 - 15 + 5 \cdot 3^{28} \text{ парн.}$$

$\vdots$

$$\text{Для } x = 30: 3^{30} + 4 \cdot 3^{28} < 93 - 90 + 30 \cdot 3^{28} \text{ парн.}$$

$$\text{Для } x = 31: 31 \cdot 3^{28} = 93 - 93 + 31 \cdot 3^{28} \text{ не парн.}$$

$$\underline{\hspace{10cm}} \\ x \in [5; 30]$$

Теперь найдём, сколько сущ. y для каждого x :

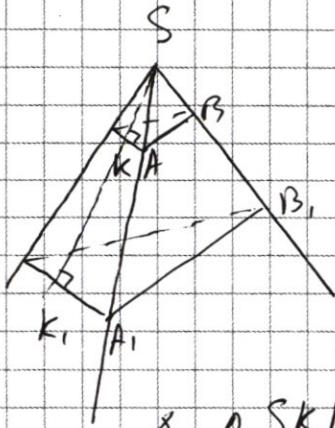
$$\sum_{x=5}^{30} (92 + x \cdot 3^{28} - 4 \cdot 3^{28} - 3^x) = 26 \cdot (92 - 4 \cdot 3^{28}) + 445 \cdot 3^{28} -$$

$$- \frac{3^5 (3^{26} - 1)}{3 - 1} = 341 \cdot 3^{28} + 2932 - \frac{3^5 (3^{26} - 1)}{2}$$

$$\underline{\text{О.т.в.: } 341 \cdot 3^{28} + 2932 - \frac{3^5 (3^{26} - 1)}{2}}$$

~ 4

$$\angle KSO = \alpha$$



2 плоскости $\perp SO \Rightarrow$ они
параллельны н/у собой; при этом
т.к. $A, B, A_1, B_1 \in (SA, B_1)$, то
 $AB \parallel A_1B_1$;
ан. $KB \parallel K_1B_1$;

$\triangle SKB$ и $\triangle SK_1B_1$:

$\angle S$ - общ.

$$\angle B_1K_1S = \angle BKS \text{ т.к. } KB \parallel K_1B_1$$



$$\triangle SKB \sim \triangle SK_1B_1; k = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$\triangle SMH_1 \sim \triangle SMH \text{ по общ. } \angle \text{ и } \angle 90^\circ$$

$$\frac{z}{z+2r} = \frac{3}{4} \quad k = \frac{3}{4}$$

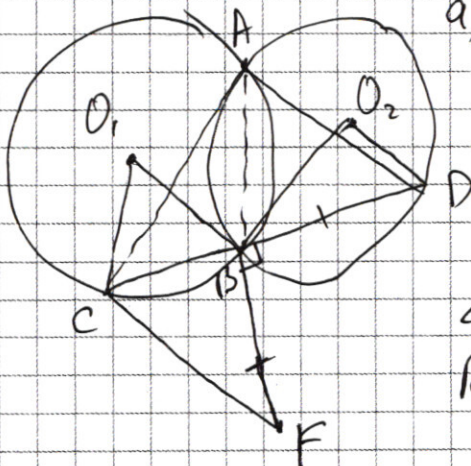
$$4z = 3z + 2r$$

$$z = 2r$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$$

Отв: $\frac{1}{3} \sin \alpha = \frac{1}{3}$

~ 6



a) $\angle CAP = 90^\circ = \angle CAB + \angle BAD$

$\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$

$\angle CO_1B = 2\alpha$, т.к. центральный,

отпр. на ту же дугу

$\angle BO_2D = 180^\circ - 2\alpha$ впис. угол.

$R_1 = R_2 = 17$

или, на сл. листе

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 6 проп.

$$CB^2 = 2 \cdot 17^2 - 2 \cdot 17^2 \cos 2\alpha \quad \text{по т. кос.}$$

$$FB^2 = BD^2 = 2 \cdot 17^2 - 2 \cdot 17^2 \cos(180 - 2\alpha) = CB^2$$

⇓

$$CB^2 = BF^2 \Rightarrow CF = CB \cdot \sqrt{2} \quad \text{при } \alpha = 45^\circ$$

$$\text{т.к. } 2\alpha = 90^\circ; \text{ тогда } CB = 17\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF = 17\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 17 \cdot 2 = 34$$

Отв: 34

~ 2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + \cos 4x = 0$$

...

~ 3

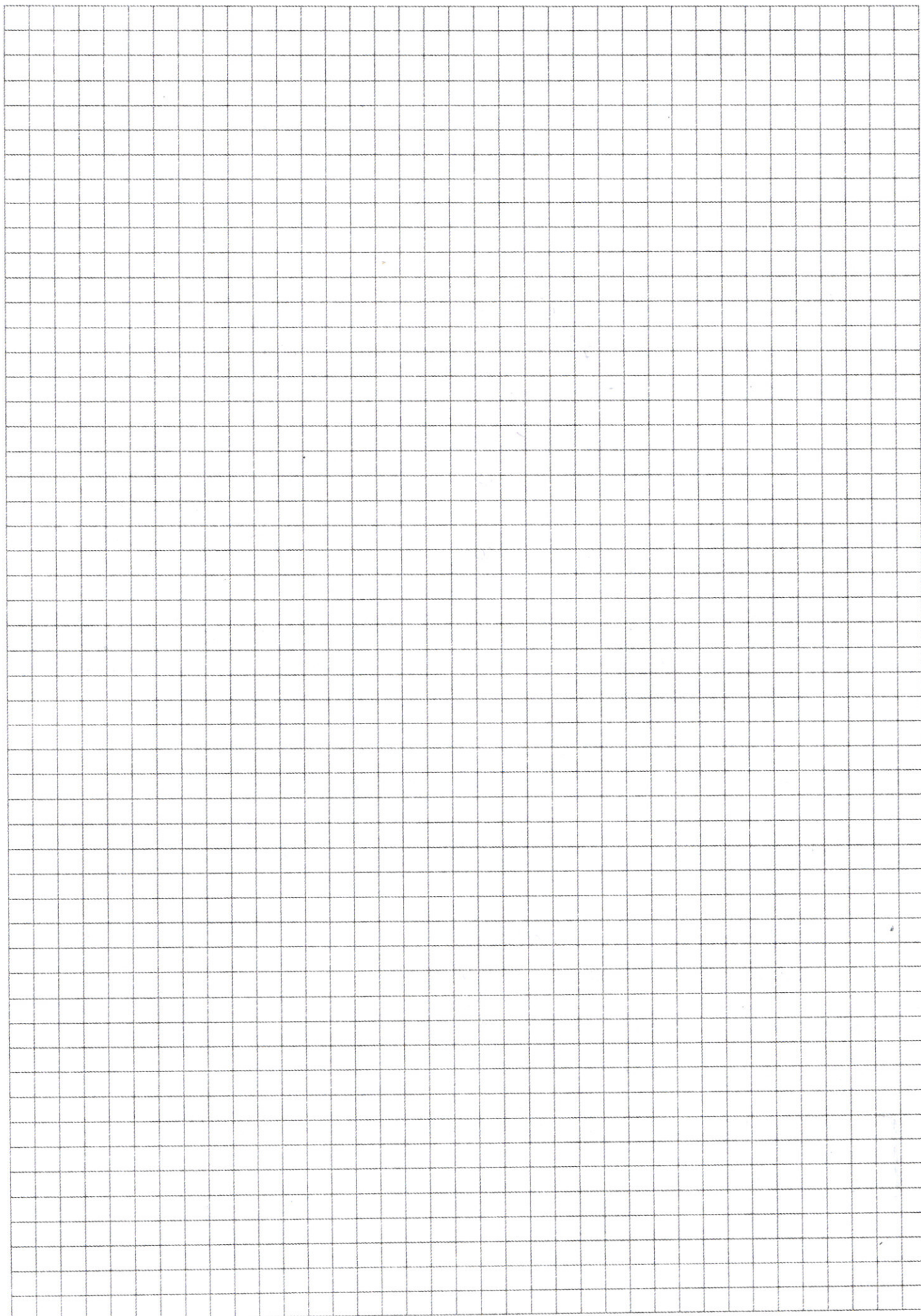
$$y^2 + 3xy - xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y(y + 4 - x) + 3x(-x + 4 + y) = 0$$

$$(y + 3x)(y - x + 4) = 0$$

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{x^2}{4-x} \right)^{\ln(4-x)} \right] &= x^2 \ln(x(x-4)^2) \\ \left[\left(\frac{x^6}{3} \right)^{\ln(3x)} \right] &= x^6 \ln(9x^3) \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

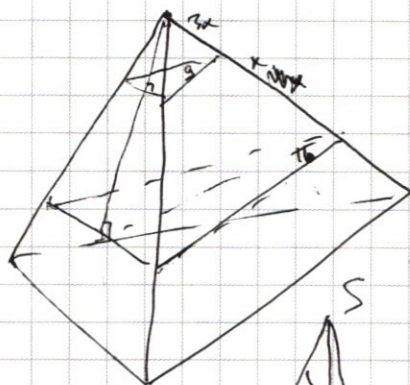
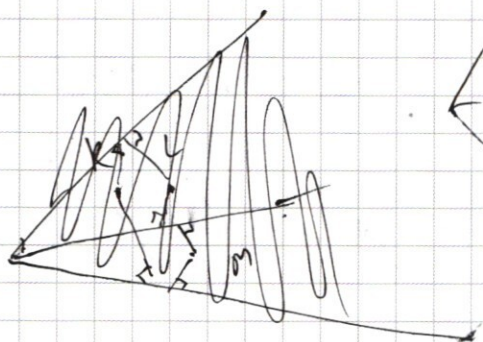
0.0. $y < 0$; $x > 0$

// $x=1$
 $y=1$

~~$2x^2 + 4xy + 2y^2$~~

~~$y^2 + 2xy + x^2 = (x+y)^2$~~

$2y^2$



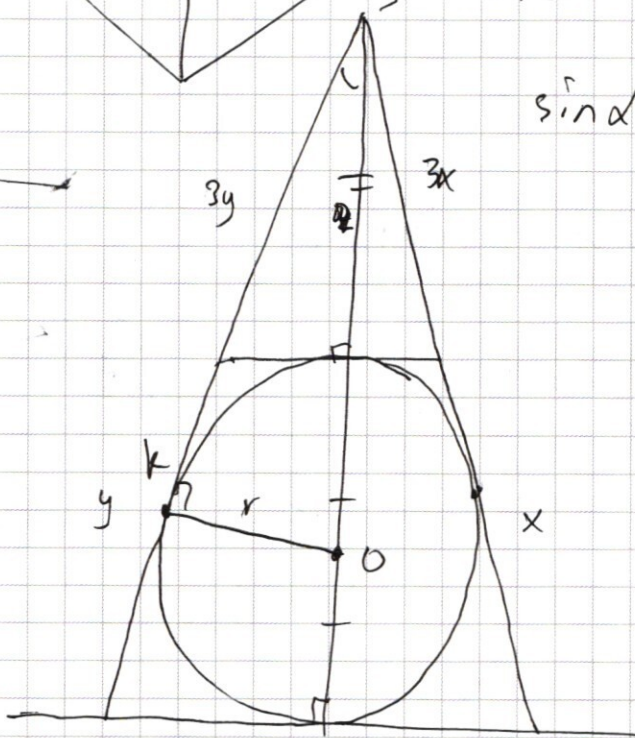
$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

$\frac{z \cdot 2424}{z+2r} = \frac{3}{4}$

$\sin \alpha = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$

$4z = 3z + 2r$

$z = 2r$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+8)^2 + (y-15)^2 = a$$

$$64 + 49 = 113$$

I ч. ~~так~~ $a \in [113; 289]$ - 1 реш.

$$225 + 64 = 289$$

IV ч. $a \in [113; 289]$ - 1 реш.

II; III ч. : $a = 15 - 8 = 7$: но 1 реш.
 $a \in (7; 113)$ - 2 реш.

$$a < 49 : \emptyset$$

$a = 49$ - всего 2 реш.

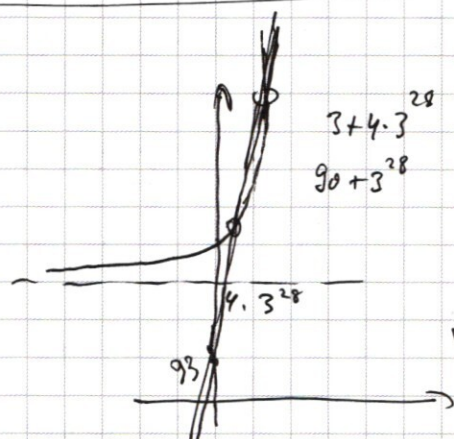
$a \in (49; 113)$ - всего 4 реш.

$a \in [113; 289]$: 4 реш.

$a = 289$: 2 реш.

$a > 289$: $\emptyset$

$$93 - 3x + 3^{28}x$$



$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$0 \cdot 0$$

$$2 : 9 + 4 \cdot 3^{28} \geq 93 - 6 + 7 \cdot 3^{28}$$

$$3 : 27 + 4 \cdot 3^{28} > 93 - 9 + 3 \cdot 3^{28}$$

$$4 : 81 + 4 \cdot 3^{28} = 93 - 12 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$x > 4$$

$$R = \frac{2}{(1-\frac{2}{3})^2} = 62 = 42 + 6 + 2$$

$$\frac{2}{243} - \sum_{82} \frac{2}{27 \cdot 27} \quad \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} = 41 = 8 + 4 + 2$$

$$\frac{1-b}{(1-b)^2} \quad \sum_{s=9}$$

$$\sum_{242}$$

$$\text{for } \sum_{s=x}^s - 2 \sum_{82} 2 + \sum_{82} 1 \cdot 1 \cdot 2 =$$

$$= \sum_{s=x}^s - \sum_{82} 5 \cdot 4 \cdot 4 + \left(\sum_{82} 5 \cdot 4 - 2 \cdot 6 \right) 92 =$$

$$= \sum_{s=x}^s - \sum_{82} 3 \cdot x + \sum_{82} 3 \cdot 4 - \cancel{2 \cdot 6} + 2 \cdot 6 \sum_{s=x}^s$$

$$= \sum_{s=x}^s - \sum_{82} (4-x) + 2 \cdot 6 =$$

$$= 92 \cdot \frac{2}{35}$$

$$\begin{array}{r} 92 \cdot 2 \\ 35 \\ \hline 184 \\ 35 \\ \hline 149 \\ 35 \\ \hline 114 \\ 35 \\ \hline 79 \end{array}$$

$$= 1 - \sum_{82} 4 - \sum_{s=x}^s - x \left(\sum_{82} 3 - \sum_{s=x}^s \right) + \sum_{82} 6$$

$$\sum_{82} 5 + 4 \cdot 4 + 1$$

$$x \in [5, 30]$$

$$\sum_{82} 3 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 - 5 \cdot 6 = \sum_{82} 3 \cdot 1 \cdot 5 : 1 \cdot 5 = x$$

$$\sum_{82} 3 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 - 5 \cdot 6 < \sum_{82} 3 \cdot 5 \cdot 5 : 2 \cdot 5 = x$$

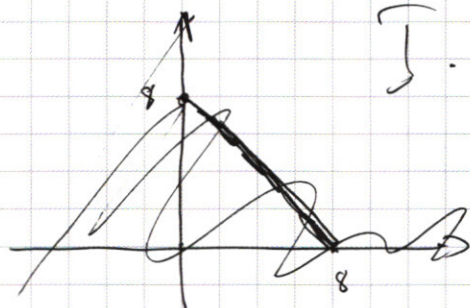
$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 2}{2 \cdot 5}$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 5 \cdot 2 \\ 2 \cdot 5 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$\sum_{82} 3 \cdot 8 \cdot 2 + 2 \cdot 8 \cdot 2 - 5 \cdot 6 : \sum_{82} 3 \cdot 8 \cdot 2 : 8 \cdot 2 = x$$

25

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$



$$\text{I. } \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \leq x+8 \end{cases}$$

$$y \leq x+8$$

$$x+y+8 + x-y+8 = 16 \quad x=0$$

$$\text{II. } \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \geq x+8 \end{cases}$$

$$x+y+8 - x+y-8 = 16$$

$$y = 8$$

$$\text{III. } \begin{cases} y < -x-8 \\ y < x+8 \end{cases}$$

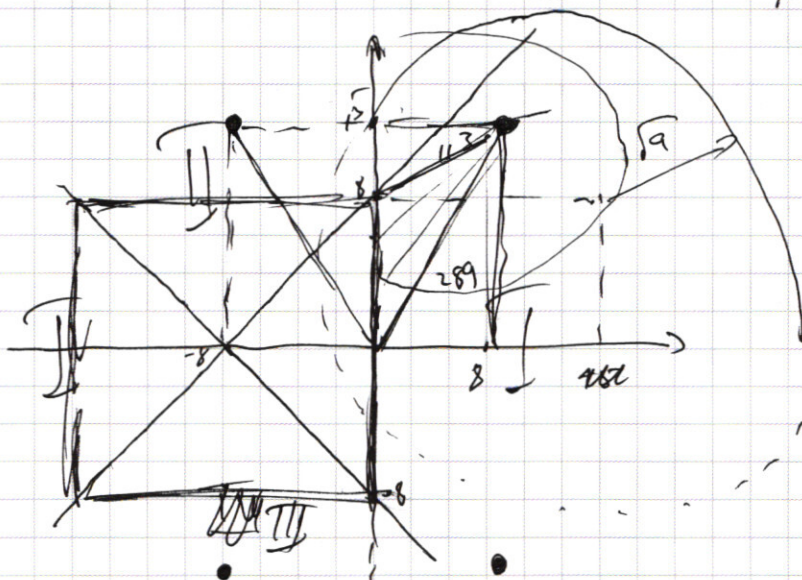
$$-x-y-8 + x-y+8 = 16$$

$$y = -8$$

$$\text{IV. } \begin{cases} y < -x-8 \\ y \geq x+8 \end{cases}$$

$$-x-y-8 - x+y-8 = 16$$

$$-2x = 32 \quad x = -16$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r}
 64827 \overline{) 9} \\
 \underline{63} \\
 18 \\
 \underline{18} \\
 027 \\
 \underline{3} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7203 \overline{) 3} \\
 \underline{6} \\
 12 \\
 \underline{12} \\
 003 \\
 \underline{3} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2401 \overline{) 7} \\
 \underline{21} \\
 30 \\
 \underline{28} \\
 21 \\
 \underline{21} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 343 \overline{) 7} \\
 \underline{28} \\
 63 \\
 \underline{63} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 49 \overline{) 7} \\
 \underline{49} \\
 0
 \end{array}
 = 7.7$$

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

разложить на простые множители: $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$$= \frac{7 \cdot 82 \cdot 5 \cdot 6}{\pi} = 420$$

$$2) \cos 7x + \cos 3x + \sin 2x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\left.
 \begin{aligned}
 \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
 \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta
 \end{aligned}
 \right\} +$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

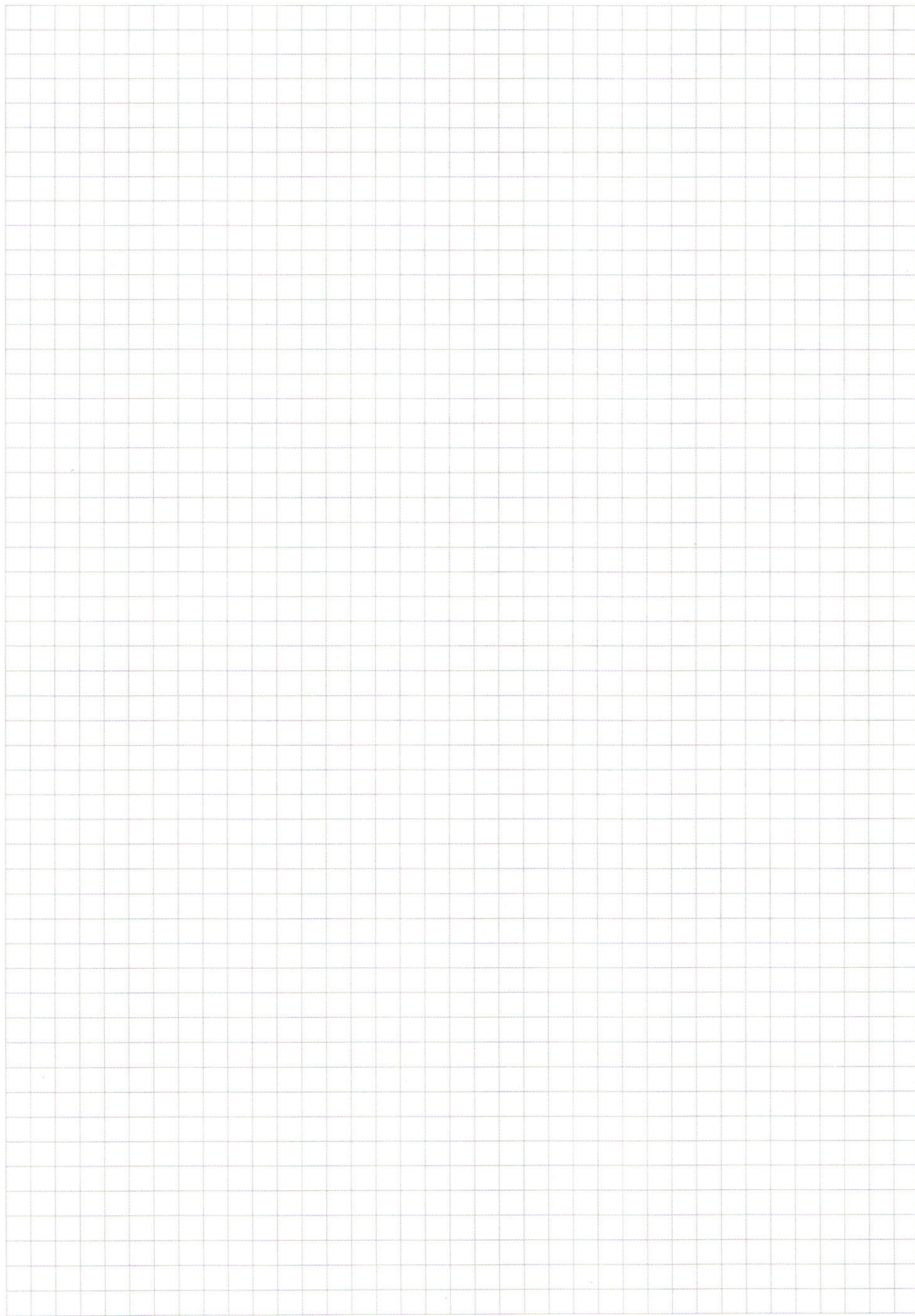
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta = 2 \cos(5x) \cos(2x)$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta = 2 \cos(5x) \sin(2x)$$

$$\cos(5x) (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(4x) = \cos 5x \cos x + \sin 5x \sin x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{4} + 7x)}{1 + \cos(\frac{\pi}{4} + 3x)} \cdot \frac{1 + \sin(\frac{\pi}{4} + 3x)}{1 + \cos(\frac{\pi}{4} + 7x)}$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} + 2x) + \cos(\frac{\pi}{4} + 2x)$$

$$\cos(x + \beta) + \cos(x - 2\beta) = 2\cos x \cos \beta - \cos(x - \beta)$$

$$2\cos(\frac{\pi}{4} - 2x) \cos 5x + \cos 5x \cos x + \sin 5x \sin x$$

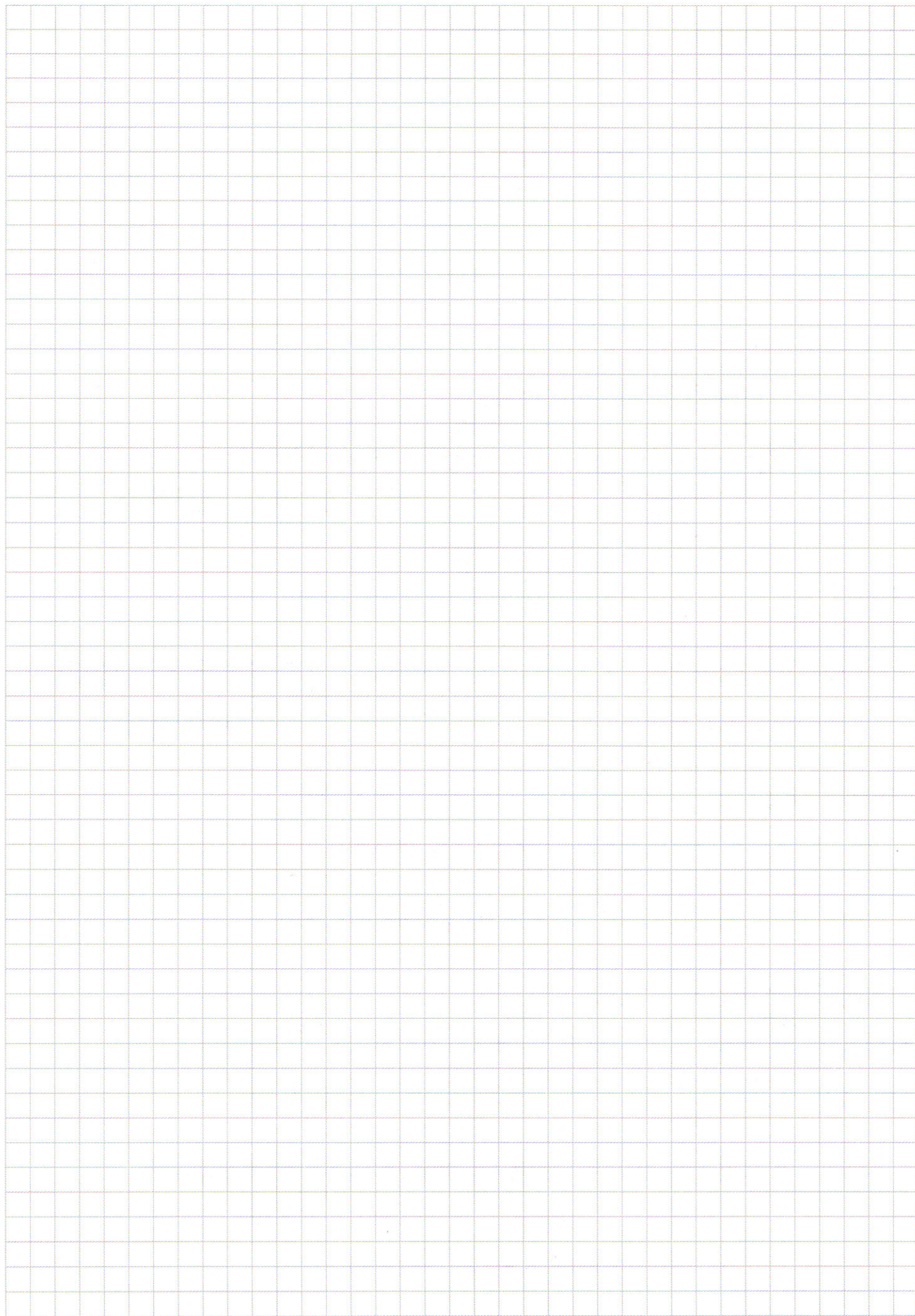
$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\sin(\frac{\pi}{4} + 2x) \cos(\frac{\pi}{4} + 5x) \right)$$

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{4} + 7x)}{1 + \cos(\frac{\pi}{4} + 7x)} - \frac{\cos(\frac{\pi}{4} + 3x)}{1 + \sin(\frac{\pi}{4} + 3x)}$$

$$c^2 = 2 \cdot 17^2 - 2 \cdot 17^2 \cos 2\alpha$$

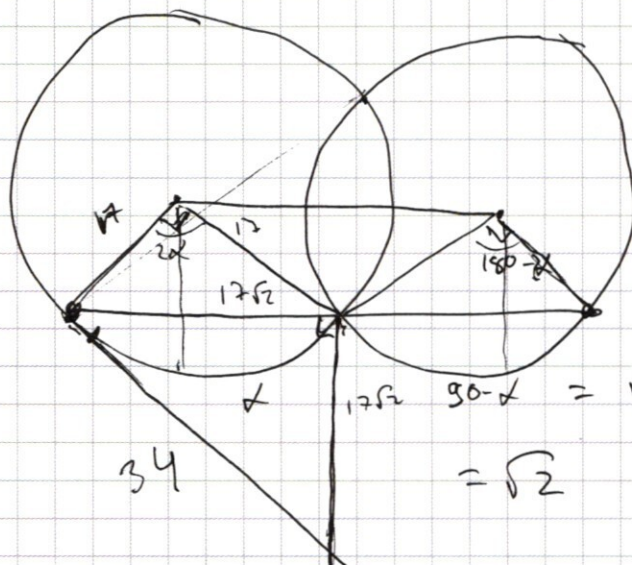
$$d^2 = 2 \cdot 17^2 - 2 \cdot 17^2 \cos(180 - 2\alpha) = c^2$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned}\cos x - \sin x &= \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = \\ &= \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x + \cos \beta &= \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \beta \right) \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) \equiv ①$$

$$\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x \right) \equiv ②$$

$$① \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) ; \sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right)$$

$$② \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) ; \cos \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right) + \cos 4x = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right) = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 4x = \cos (7x - 3x) = \cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x$$

$$\begin{aligned}&= \cos \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right) + \\ &+ \sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right)\end{aligned}$$