

Рег. №: М/11-ТУ-0051

Класс участия: 11

Место проведения: ТУЛА

Дата проведения: 22 февраля 2020 г.

Время начала (местное): 11:00

ШК

(заполняется секретарём)



Олимпиада школы

по математике
Название предмета

Заключительный этап 2020 г.

Анкета участника

Данная анкета предъявляется участником вместе с документом, удостоверяющим личность, при входе на олимпиаду. По окончании написания олимпиады анкета обязательно вкладывается в работу. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется. Анкета без подписей недействительна.

<u>Мельникова</u>	<u>Лада</u>	<u>Сергеевна</u>	<u>23.01.2003</u>	<u>17</u>
Фамилия	Имя	Отчество	Дата рождения	Возраст
<u>Россия</u>	<u>Ярославская область</u>	<u>г. Мытиск</u>	Населенный пункт	
Страна	Регион			
<u>паспорт</u>	<u>5416</u>	<u>443755</u>	<u>02.02.2017</u>	<u>570-033</u>
Документ, удостоверяющий личность	Серия	Номер	Дата выдачи	Код подразделения
<u>Россия</u>	<u>Ярославская область</u>	<u>г. Мытиск</u>	Населенный пункт школы	
Страна школы	Регион школы			
<u>11</u>	<u>МБОУ г. Мытиска, Средняя школа №4</u>			
Класс обучения	Полное название образовательного учреждения			
<u>79307770800</u>	<u>—</u>	<u>Lada-Melnikova-2003@mail.ru</u>		
Мобильный телефон	Доп. телефон	E-mail		

Согласие на обработку персональных данных

Я согласен(-на) на сбор, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет". Я согласен(-на), что мои персональные данные будут ограничено доступны организаторам олимпиады для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирован(а), что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Федерального закона №152 от 27 июля 2006 г., конфиденциальность персональных данных соблюдается в рамках исполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласен(-на) на получение информационных писем от организаторов олимпиады на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати дипломов олимпиад в случае их получения. Я согласен(-на) на передачу данных в государственный информационный ресурс о детях, проявивших выдающиеся способности, созданный во исполнение Постановления Правительства Российской Федерации № 1239 от 17 ноября 2015 г.

Я подтверждаю, что ознакомлен с Положением и Регламентом проведения олимпиады школьников «Физтех», а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«22» февраля 2020 г.

Подпись участника олимпиады

Мельникова Ирина Евгеньевна

ФИО законного представителя

мать

Степень родства

Подпись законного представителя

Анкета без подписи недействительна.

Анкета обязательно должна быть вложена в работу!

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

64827	3
21609	3
7203	3
2401	3
343	7
49	7
7	7
1	1

$64827 = 3^3 \cdot 7^4$. П.к. в записи числа встречаются именно цифры, то в записи
данных восьмизначных чисел будут обязательно 4 семерки (т.к. $7 \cdot n > 10$ при
 $n \in \mathbb{Z}, n > 1$)
а остальные цифры - либо 3, 3, 3, 1, либо $9, 3, 1, 1$.

Сделаем расчет для каждого случая.

а) 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7: $N_a = 8! : 4! : 3! = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 56 \cdot 5 = 280$.

расстановка чисел
4 сем. по 4 цифрам
3 сем. по 3 цифрам

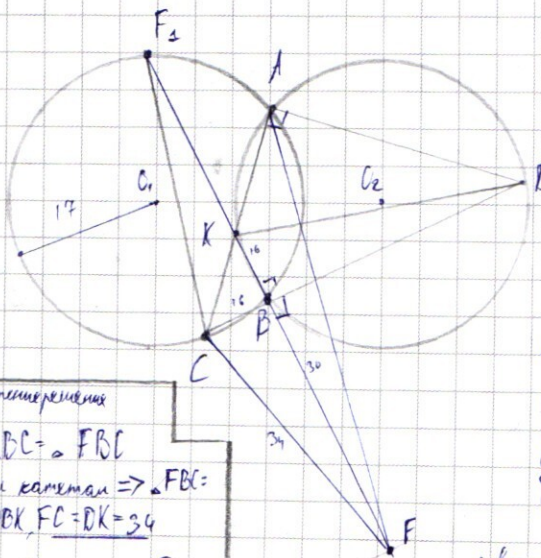
б) 1, 1, 3, 9, 7, 7, 7, 7: $N_b = 8! : 4! : 2! = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 56 \cdot 15 = 280 \cdot 3 = 840$

2 сем. по 2 цифрам

* так как все мы переставляли, например, 4 семерки ($7_1, 7_2, 7_3, 7_4$), то в числе, например, 13337777
есть $4! = 24$ вариантов расстановки семерок, которые будут равнозначны, так как надо исключить. Аналогично
 $N_a \neq N_b = 56 \cdot 20 = 1120$.

Ответ: 1120 чисел

№6



Дано:

ω_1 - окруж. (O_1 ; 17)

ω_2 - окруж. (O_2 ; 17)

$BC = 16$

$E \in \omega_1 \cap \omega_2$

$C \in \omega_1, D \in \omega_2$

$B \in CD, \angle CAD = 90^\circ$

ω_1 пересекает ω_2 в точках
 A и B .

$BF \perp CD, BF = BD$

а) Найти CF

б) Найти $S_{\triangle ACF}$

Имеется окружность, то есть точка K_1 лежит на ω_1 , при этом $\angle F_1BK_1 = 90^\circ$ (т.к.
 $\angle KBD = 90^\circ$ по условию) $\Rightarrow \triangle F_1CB = \triangle DK_1B$ по двум катетам; далее решение строим

Решение: а) Найдем точку пересечения AC с ω_2 -
- K.

Продлим линию BF в сторону, где лежит
точка A, до пересечения с ω_2 , точку обозначим как F_1 .

Поскольку $\angle CAD = 90^\circ$, то и $\angle KAD = 90^\circ$, т.е.

KD - диаметр ω_2 ; $KD = 2R = 34$.

Заметим, что углы при вершине окружностей ω_1 и ω_2 на 90° против часовой стрелки
в BF, т.е. $BF_1 = BD = BF$, а BK - в BC (т.к. идентично)

Продолжим AC на окружность

$\triangle F_1BC = \triangle FBC$
по двум катетам $\Rightarrow \triangle FBC =$
 $= \triangle DK_1B, FC = DK = 34$

Продолжим AC на окружность

$$\textcircled{1} \begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16; \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

2 случая

При $x+y+8 \leq 0, x-y+8 \leq 0$:
 $x+y \leq -8, x-y \leq -8$

$-2x-16=16, x=-16$ - формула
 $-16+y \leq -8 \Rightarrow y \geq 8$

$\begin{cases} -16+y \leq -8; \\ -16-y \leq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 8; \\ y \leq -8 \end{cases} \Rightarrow y \leq 8$

$(16-8)^2 + (|y|-15)^2 = a; 49 \leq a-64 \leq 225; 113 \leq a \leq 289$

3 случаи

При $x+y+8 \geq 0, x-y+8 \leq 0$:
 $x+y \geq -8, x-y \leq -8$

$2y=16, y=8$

$\begin{cases} x+8 \geq -8; \\ x-8 \leq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -16; \\ x \leq 0 \end{cases}$

$(|x|-8)^2 + 49 = a;$

$a-49 = (|x|-8)^2;$
 При $x=8$ - минимально, $x=-16, x=0$ - максимум.

$0 \leq a-49 \leq 64;$

$49 \leq a \leq 113$

4 случаи

При $x+y+8 \leq 0, x-y+8 \geq 0$:
 $x+y \leq -8, x-y \geq -8$

$-2y=16, y=-8$

$\begin{cases} x-8 \leq -8 \\ x+8 \geq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0; \\ x \geq -16 \end{cases}$

$(|x|-8)^2 + 49 = a$

$49 \leq a \leq 113$

1 случай

При $x+y+8 \geq 0, x-y+8 \geq 0$: $2x+16=16; 2x=0, x=0$
 $x+y \geq -8, x-y \geq -8$

$\begin{cases} 0+y \geq -8; \\ 0-y \geq -8 \end{cases}; \begin{cases} y \geq -8; \\ y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow |y| \leq 8$

$64 + (|y|-15)^2 = a; 0-64 = (|y|-15)^2$. Сумма квадратов правой части. При $|y|=0$ значение максимальное, при $|y|=8$ - минимальное.

$a-64 \leq 15^2; a-64 \geq (8-15)^2; a-64 \geq 49.$

$49 \leq a-64 \leq 225; 113 \leq a \leq 289$

При данных значениях a существует либо единственная (при $|y|=0, y=0$, либо $|y|=8$ и (при $|y|=8$ две точки y), либо бесконечное множество, в котором 2 решения - в при $y=0$. При $y=0$ ($a=113$) остальные отбрасываем.

289

~~для проверки для $a=113$, $a=289$ и $a=289$ не подходит.~~

~~не подходит, т.к.~~

Все числа от 49 (не включительно) до 113 тоже

не подходят, т.к. система 4 уравнения невозможна.

Получено 49 подходит, либо решение - $(8; -8)$ и $(8; 8)$

$(|x|-8)^2$ примет одинаковые значения при $x=8$ и $x=-16$ при $y=0$ случаев.

После нахождения ~~каждого~~ 2 значения параметра - 49 и 289.

Ответ: 49, 289

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} &= x^{2\ln(xy^2)}; \rightarrow y < 0, x > 0 \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y &= 0 \end{aligned} \right.$

$$\frac{\lambda}{|y|^{\ln|y|}} = x^{2\ln x + 2\ln y^2}$$

$$x^{2\ln(-y)} \cdot (-y)^{-\ln(-y)} = x^{4\ln(-y)} \cdot x^{2\ln x}$$

№7 $\left\{ \begin{aligned} y &> 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y &\leq 93 + 3(3^{28} - 3)x \end{aligned} \right.$
 $x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z}$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < y \leq 93 + 3^{28}x - 3x;$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} \leq 93 + 3^{28}x - 3x;$$

$$3^x \leq 93 + 3^{28}(x-4) - 3x. \text{ Попробуем оценить } x_{\max}.$$

При $x=24$ условие выполняется.

При $x=31$: $3^{31} \leq 93 - 93 + 3^{28}(31-4)$; $3^{31} \leq 3^{28} \cdot 3^3$; $3^{31} \leq 3^{31}$ - верно.

При $x \geq 4$ всё можно выразить (при $x=4$ $81=93-12$), а при $x < 4$ - не можем, так как 3^{28} уже слишком - и $3^{28}(x-4)$ убывает при уменьшении от 4 к $(-\infty)$ быстрее, чем ~~убывает~~ убывает функция $3^x + 3x - 93$.

Т.е. $x \in [4; 31]$...

№6 (продолжение)

Ответ: а) $FC=34$

б) Т.т. Пирамиды ΔBCF $BF=36$

$$\textcircled{N2} \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0;$$

$$\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x + \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x + \sin 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x - \sin 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0;$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0;$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = \frac{-\sqrt{2}}{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x); \quad \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x);$$

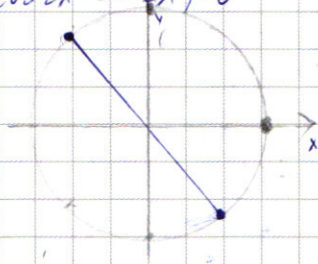
$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0;$$

$$a) \cos 2x + \sin 2x = 0 \text{ или } b) \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$a) \cos 2x + \sin 2x = 0; \quad \cos 2x = -\sin 2x$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$



$$b) \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0; \quad \cos 5x = \frac{-\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x);$$

$$\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 x - 2 \sin x \cos x - \sin^2 x); \quad \sqrt{2} \cos 5x = 2 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x - 1$$

$$\sqrt{2} \cos 4x \cos x - \sqrt{2} \sin 4x \sin x = \sqrt{2} \cos 5x = \sqrt{2} (\cos^2 2x \cos x - \sin^2 2x \cos x - 2 \sin 2x \cos 2x \sin x) =$$

$$= \sqrt{2} (-4 \sin^2 x \cos x \cos 2x - 2 \sin x \cos^2 x + \cos^3 x - \sin^3 x \cos x) \dots$$

$$\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) \text{ — верно, тогда } x = \frac{\pi}{4} \text{ — единственное решение (справим значение на это значение — за два координатных).}$$

$$\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 2x - \cos 2x) \text{ — неверно. Заметим, что при } x \in \frac{\pi}{4} + \pi (n \in \mathbb{Z}) \quad \sin 2x - \cos 2x = \pm 1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin 2x - \cos 2x) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm \cos \frac{\pi}{4}. \text{ Можно ли это нам помочь? Попробуем}$$

$$\text{предположить: } \cos \frac{5\pi n}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi n}{2}. \text{ При } n: 0 \quad \cos \frac{5\pi n}{4} \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{При } n = 4x + 1 \text{ правая часть — положительная, } \cos \left(5\pi x + \frac{5\pi}{4} \right) = \cos \left(\pi x + \frac{5\pi}{4} \right), \text{ при } x: x \neq 2$$

тоже невозможно.

$$\text{При } n = 4x + 3 \text{ правая часть отрицательная, } \cos \left(5\pi x + \frac{15\pi}{4} \right) = \cos \left(\pi x + \frac{15\pi}{4} \right), \text{ при } x: x \neq 2 \text{ тоже}$$

$$\text{отрицательно. Т.е. } x = \frac{\pi}{4} \cdot k, \text{ где } k = 4(2x-1)+1 = 8x-3$$

$$\text{Идем: } \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} \cdot (8n-3); \frac{\pi}{4} \cdot (8n-1), n \in \mathbb{Z}$$

$$k = 4(2x-1)+3 = 8x-1$$

везде x заменим на радианы



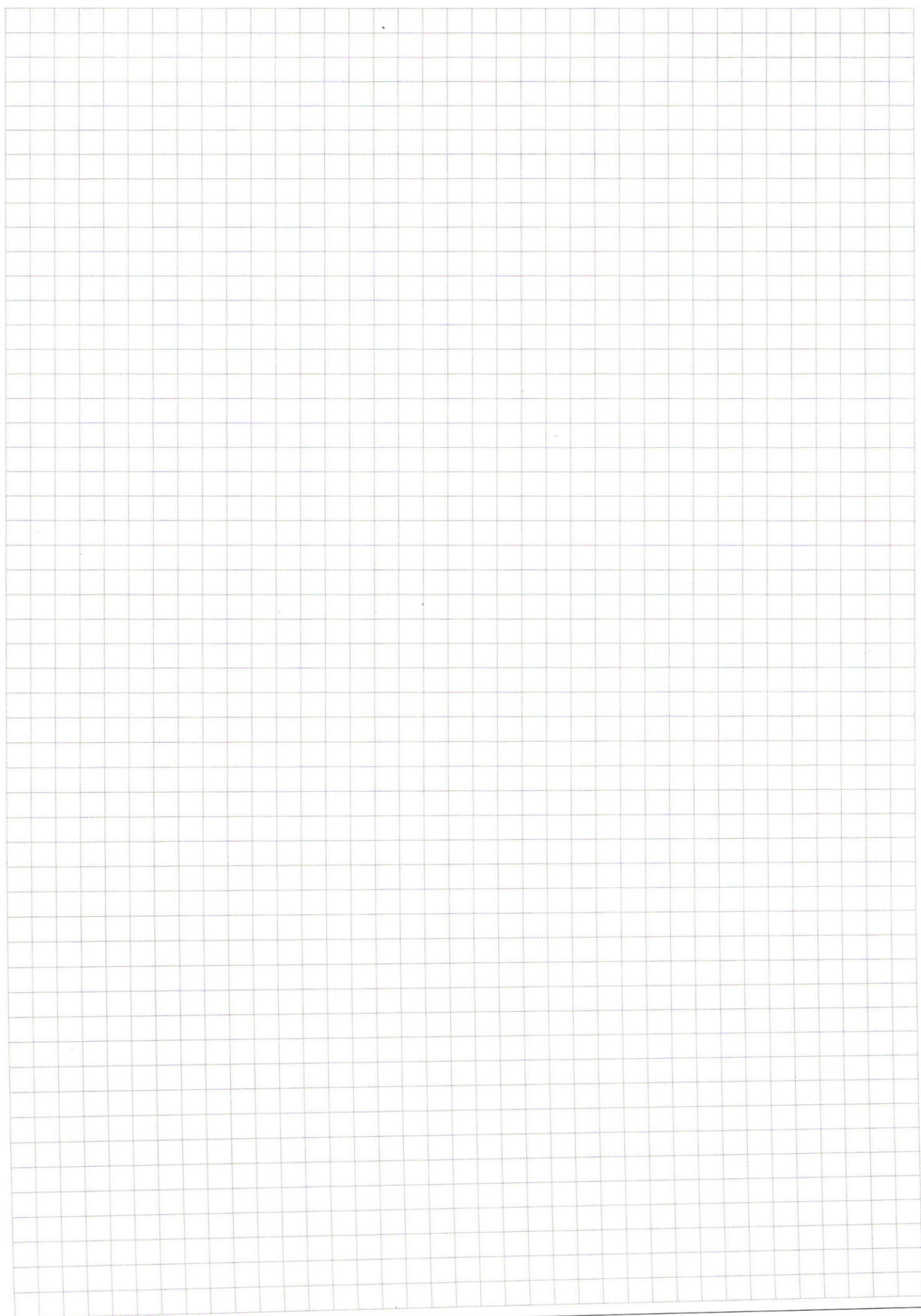
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



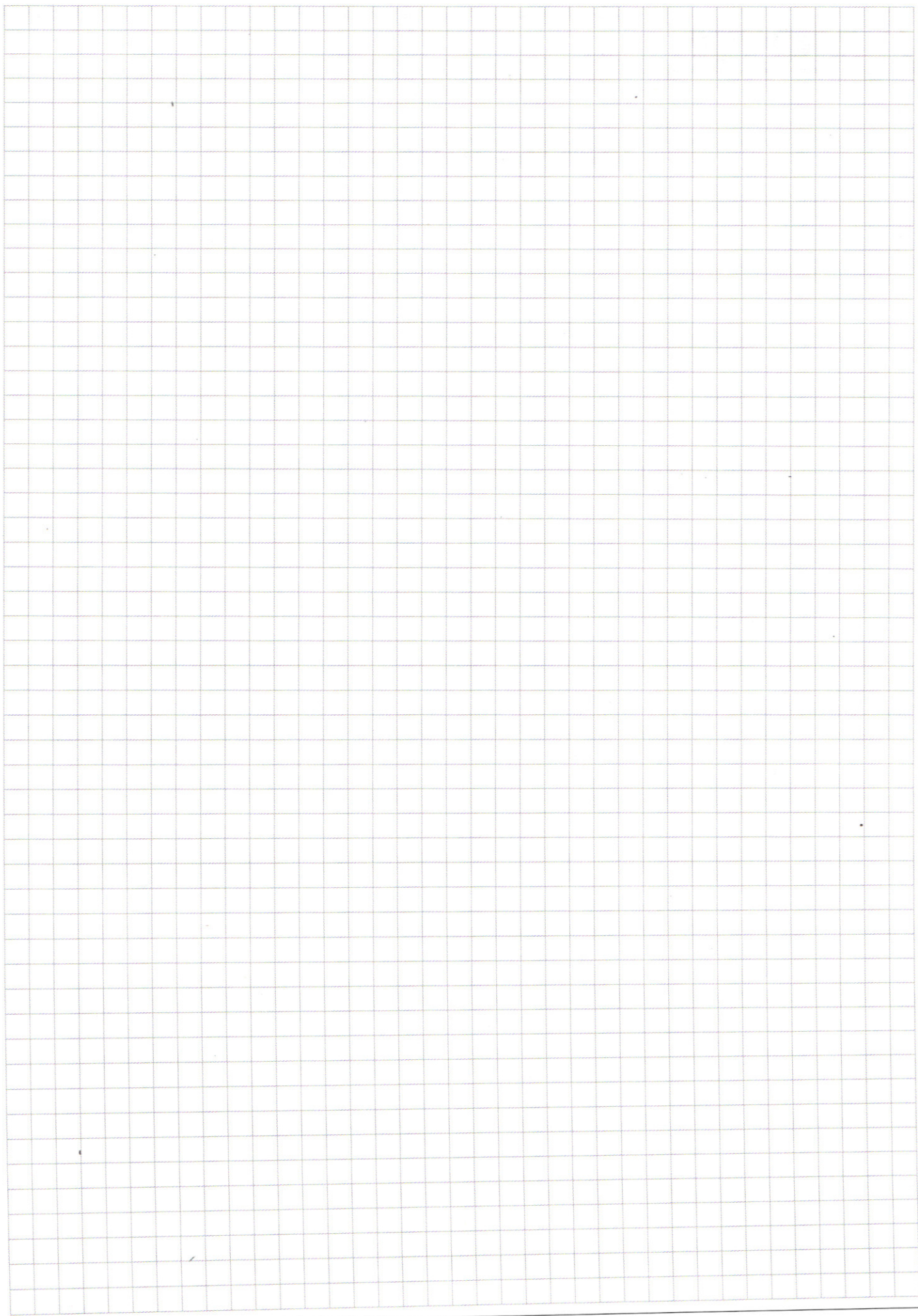
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) 64827 | 3 - число состоит из 4 цифр, две из них и тройки.

21609 | 3

7203 | 3

2401 | 7

343 | 7

49 | 7

7

и Пифа, восьмизначные.

7-4 раза, дающие либо 9, 3, 1, 1, либо 3, 3, 3, 1.

расчет для каждого.

2) $\cos 7x = \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x$, $\cos 3x = \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x$,

функция косинусов. функции

$$\cos 7x + \cos 3x$$

5+2 5+2

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

функция синусов...

$$\sin 5x (\cos 2x + \sin 2x) -$$

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) \left(\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) \right) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0 \text{ or } \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0;$$

$$\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 5x = (\cos 3x \cos 2x - \sin 2x \sin 3x)$$

5) $|x+y+8| - |x-y+8| = 16$

1) $x+y+8 \geq 0$, $x-y+8 \geq 0$, то

2) $x+y+8 < 0$, $x-y+8 \geq 0$, то $2x = -32$, $x = -16$

Зреш.

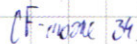
$$2x + 16 = 16; \quad 2x = 0, \quad x = 0$$

$$2y = 16; y = 8$$

$$-2y = 16; y = -8$$

$$-2x - 16 = 16; \quad x = -16.$$

legamen.



$$B \cdot C = 16$$

$S_{\Delta ACF} = ?$

S_{Δ} $BF = 30$

$$34^2 - 16^2 =$$

$$150 - 18$$

5-2-3

36

351

$$\begin{array}{r} 1491 \\ - 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{21}{2}$$

$$\frac{38}{2}$$

$$\sin = 1$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\frac{\pi}{4}$$

358
2