МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Решение:

$64827 = 1 \cdot 3^3 \cdot 7^4$ В этих числах могут быть цифры 1, 3, 9 и 7, причем возможно только такие наборы: 1) 7 – 4 шт, 3 – 3 шт, 1 – 1 шт

2) 7 – 4 шт, 9 – 1 шт, 3 – 1 шт, 1 – 2 шт.

для 1): $\frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = 5 \cdot 7 \cdot 8$ (делим на кол-во пересст. кажд. из возм. цифр, т.к. число от этой пересст. не меняется)

для 2): $\frac{8!}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8$

всего $5 \cdot 7 \cdot 8 + 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 = 1120$ Ответ: 1120.

№5 Решение:

Заметим, что если $(x_1; y_1)$ – реш., то $(x_1; -y_1)$ тоже решение.

Также, если $(x_1; y_1)$ – решение первого урав., то $(-x_1 - 16; y_1)$ тоже его решение.

Также, если $(x_1; y_1)$ – решение второго урав., то $(-x_1; y_1)$ тоже его решение

~~Видно, что симметрия по x в системе нет (ведь $x_1 \neq -x_1 - 16$)~~

~~а есть только по y.~~ Ч. если $(x_1; y_1)$ – реш 2го, то $(-|x_1| - 16; y_1)$ – реш. Видно, что у системы в общем случае ≥4 решений, ведь

Можно наблюдать симметрию как по x, так и по y.

По x симметрия относительно −8, а по y относит. 0.

Тогда осталось найти такие a, когда $x = -8$, $y \neq 0$, и $x \neq -8$, $y = 0$:

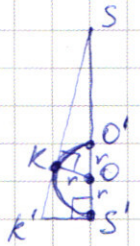
см. продолж.

$$\begin{cases} x=-8 \\ y\neq 0 \\ 2|y|=16 \\ (|y|-15)^2=a \end{cases} \quad \begin{cases} x=-8 \\ y\neq 0 \\ |y|=8 \\ a=49 \end{cases} \text{ два решения } (-8;8),\ (-8;-8) \quad \text{и} \quad \begin{cases} x\neq -8 \\ y=0 \\ |x+8|=8 \\ (|x|-8)^2+15^2=a \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq -8 \\ y=0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-16 \end{array}\right. \\ 8^2+15^2=a=289 \end{cases} \text{ два решения } (0;0),\ (-16;0)$$

Ответ: 49, 289.

№4 Решение:

Т.к. сфера вписана, O равноудалена от каж. из его граней и $\angle KSO=\angle LSO=\angle MSO$ по рав-ву прямоуг. треугольников. Проведем плоскости из условия (кроме KLM) и поймем, что имеем дело с подобными пятираздрами, где O лежит на прямой через S и перп. этим плос-тям. Тогда в плос-ти KSO (как и $\angle LSO$ и $\angle MSO$) имеем следующую картину:



$$\frac{SO'}{SS'}=\frac{SO'}{SO'+2r}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}, \quad SO'=6r$$

из подобия

$$\angle KSO=\arcsin\frac{r}{\sqrt{r}}=\arcsin\frac{1}{7}.$$

Из приведенных выше рассуждений, становится понятно, что K, L и M равноудалены от плос-ти основания (где k' и S') и лежат по одну сторону от нее, значит мы получаем еще один пятираздр, подобный тем предыдущим, а значит и площадь KLM равна:

$$\frac{S_{KLM}}{16}=\frac{(\sqrt{r}-r\sin\angle KSO)^2}{(8r)^2}=\frac{\left(\sqrt{r}-\frac{1}{7}r\right)^2}{(8r)^2}=\frac{48^2}{7^2\cdot 8^2}=\frac{6^2}{7^2}=\frac{36}{49}, \quad S_{KLM}=\frac{576}{49}$$

Ответ.

$\angle KSO=\arcsin\frac{1}{7}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 Решение:

$\cos 7x + \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\sqrt{2}\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos\left(7x - \frac{\pi}{4} - 3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\quad + \frac{\pi}{2}$

$\cos\underbrace{\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)}_{a} + \cos\underbrace{\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)}_{b} + \sin(a-b) = 0$

$\cos a + \cos b = \sin(b-a)$

$\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \sin\frac{b-a}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

1) $\cos\frac{a-b}{2} = 0$ — реш.

$\cancel{\pm 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi r =}$

$\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi r = 2x - \frac{\pi}{4}, \ r \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} x = \pi r_1 - \frac{\pi}{8} \\ x = \pi r_2 + \frac{3\pi}{8} \end{array}\right. \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$

$\cos\frac{a+b}{2} = \sin\frac{b-a}{2}$

$\cos\frac{a+b}{2} = \cos\left(\frac{b-a}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$

2) $\left[\begin{array}{l} a+b = b-a-\pi+2\pi n, \ n\in\mathbb{Z} \\ a+b = a-b+\pi+2\pi k, \ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a = \pi n - \frac{\pi}{2}, \ n\in\mathbb{Z} \\ b = \pi k + \frac{\pi}{2}, \ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{7} - \frac{\pi}{28}, \ n\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi k}{3} + \frac{\pi}{12}, \ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

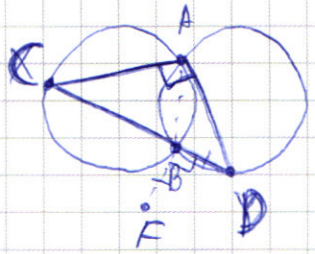
Ответ:

№3 Решение:

$x > 0, \ y < 0$

$\begin{cases} x^{7\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \cdot y^{\ln(-y)} \neq 0 \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$

№6 Решение:



1) т.к. $r_1 = r_2 = r$, $AC = AD$, $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$.
и по одну сторону с центром соотв. окруж.

$$CF = \sqrt{CB^2 + BD^2}$$

$$\frac{CB}{2\sin\angle CAB} = r = 17 = r = \frac{BD}{2\cos\angle CAB}$$

$$CB = 2r\sin\angle CAB \qquad BD = 2r\cos\angle CAB$$

$$CF = \sqrt{4r^2(\sin^2\angle CAB + \cos^2\angle CAB)} = 2r = 34$$

ответ на а)

б) $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin\left(45^\circ + \arcsin\frac{BF}{34}\right)$

$BC = 16$, $34 = \sqrt{16^2 + BD^2}$, $1156 = 256 + BD^2$, $BD = \sqrt{1156 - 256} = 30$

$$AC = \frac{16 + 30}{\sqrt{2}} = \frac{46}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 34 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{34^2 - 30^2}{34^2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{30}{34}\right)$$ — ответ на б)

$= 23 \cdot 17 \cdot 1 = 391$ ~~— ответ на б)~~

№7 Решение:

$x = 4$, $y = 81 + 4 \cdot 3^{28}$ — решение.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$7\cdot 1$, 3^3, $7\cdot 11$,

$64827 \mid 27$
54
108
108
27

$64827 \mid 7$

$68827 = 3^3\cdot 2401 = 1\cdot 3^3\cdot 7\cdot 343 = 1\cdot 3^3\cdot 7^4$

$2401 \mid 7$
21
30
28
21
343

13

18

3
6
7

7 − 4
9 − 1
3 − 3
3 − 1
1 − 1
1 − 2

$\frac{8!}{4!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!} + \frac{8!}{4!\cdot 3!\cdot 1!} =$

$= 5\cdot 3\cdot 7\cdot 8 + 5\cdot 78 = 280\cdot 4 = \boxed{1120}$

$(y+x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = (y+x)^2 + 4(y+x) - 4(x-1)^2 + 4 = 0$

5 ~~$y \Leftrightarrow -y \Leftrightarrow y=0$~~ ~~$\begin{cases}|x+8| = 8\\ (|x|-8)^2 + 15^2 = a\end{cases}$~~

$\boxed{x=0,\ x=-16,\ y=0}$ $\boxed{a = 8^2+15^2}$

$x \Leftrightarrow -x-16 \Leftrightarrow \boxed{x=-8 \quad y=\pm 8 \quad a=(15-8)^2}$

$-x-16$

$x>0 \quad y<0 \qquad y=-y'$

$x^{7\ln y'} = x^{2\ln(xy^2)}\cdot y'^{\ln y'}$

$f' = x\cdot 3^{x-1}$

34
34
136
102
1156

$r=17$

$a=2r$

$3^x + 4\cdot 3^{28} \vee 93 + x\cdot 3^{28} - 3x$

$x \in$

36
16
216
36
576

23
17
23
161
391

16
16
96
16
256

15
15
75
15
225
64

64

$4\cdot 3^3 = 3^4 + 3^3$

$x\cdot 3^{x-1}$

$3^{28} - 3$

$26\cdot 3$

$\left(\frac{3}{3^{27}}\right)^{27}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

90

$\sqrt{2}\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cos a + \cos b + \cos\left(a - b + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\cos a + \cos b + \sin(a-b) = 0$

$\cos a + \cos b + \sin a \cos b - \cos a \sin b = 0$

$\cos a(1 - \sin b) + \cos b(1 + \sin a) = 0$

$2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2} = 0$

$\cos\frac{a-b}{2} = 0$

$\cancel{2}\cos\frac{a+b}{2} + \sin\frac{a-b}{2} = 0$

$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} - \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} - \sin\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2} = 0$

$\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+b}{2} - b\right) = 0$

$\sin\left(\frac{a+b}{2} - b\right) = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

$(x+y-y)^2 + y^2 = 2r$

$x^2 + \cancel{\operatorname{ctg}\alpha x^2}$

$k_1x + m_1 \quad (x_A) = y_A$

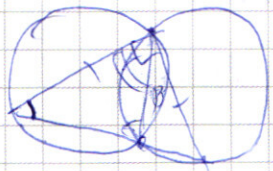
$-\frac{1}{k_1}x + m_2 \quad (x_A) = y_A$

$k_3x + m_3 \quad (x_B) = y_B$

$4r^2\sin^2\alpha + 4r^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$

$= 4r^2\sin^2\alpha(2 - \sin^2\alpha) =$

$=$



$C \to 90^\circ$

$45^\circ \to 90^\circ$

$\angle = \alpha \qquad \beta = 90^\circ - \alpha$

$x = 2r\sin\alpha$

$y = 2r\sin\alpha\cos\alpha =$

$=$

$2r\cos\alpha$

$x \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

$4r^2\sin^2\alpha + 4r^2\operatorname{ctg}^2\alpha =$

$=$

$\frac{x}{2\sin\alpha} = \frac{y}{2\sin(90-\alpha)} = \frac{y}{2\cos\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)