

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в рабо
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$6487 = 2^3 \cdot 7^4$$

Значит, есть два варианта восьмизначных чисел:

1) Содержит (состоит из): 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7, 1.

2) 3, 9, 7, 7, 7, 7, 1, 1.

Количество восьмизначных чисел в первом варианте, очевидно, равно $\frac{8!}{3!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 280$

Во втором: $\frac{8!}{2!4!} = 3 \cdot 280$

Итого суммарно: $4 \cdot 280 = 1120$.

Ответ: 1120 чисел.

№ 2.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$2\cos 5x \cos 2x + 2\cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$2\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2\cos 5x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 2x = -1 \\ \cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ \cos \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0.$$

$$\cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \\ 3x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7} \right\}, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \sim 3. \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ (y+x+2)^2 - 4(x-1)^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ \begin{cases} 2(x-1) = y+x+2 \Rightarrow y = x-4 \quad (1) \\ 2(1-x) = y+x+2 \Rightarrow y = -3x \quad (2) \end{cases} \end{cases}$$

(1): $\left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln x + 4\ln(4-x)}$ (так как $y < 0$ и $0 < x$)

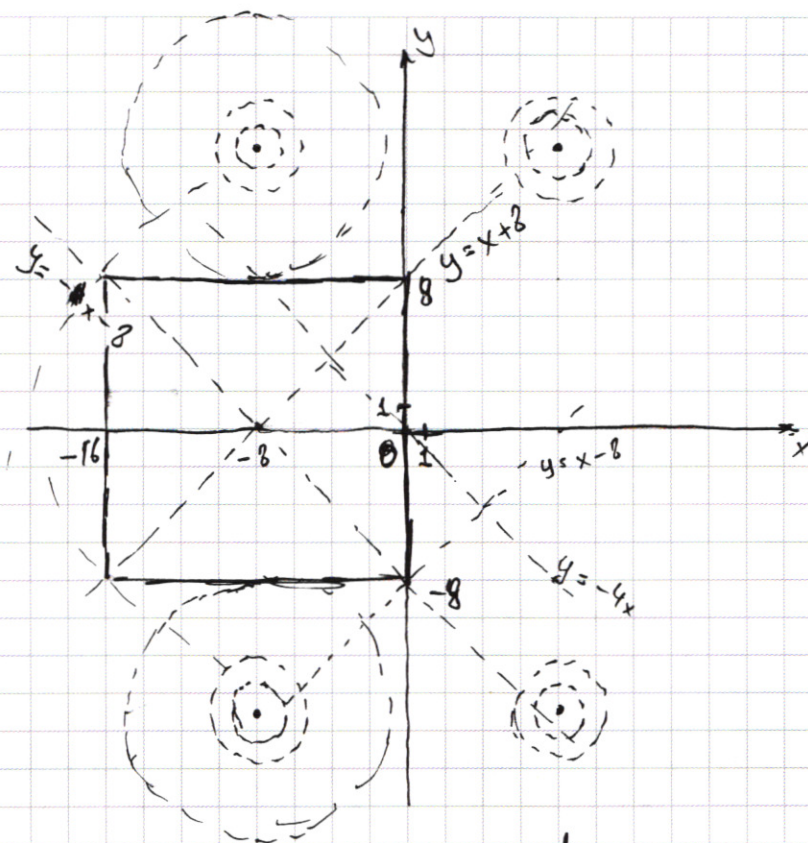
$$x^{3\ln(4-x) - 2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$\frac{(4-x)^{3\ln x}}{x^{2\ln x}} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$(4-x)^{3\ln x - \ln(4-x)} = x^{2\ln x}$$

$$\ln(4-x)(3\ln x - \ln(4-x)) = 2\ln^2 x$$

$$2\ln^2 x + \ln^2(4-x) - 3\ln x \ln(4-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4-x \Rightarrow x = 2. \end{cases}$$



С увеличением a меняются радиусы этих окр-тей.
 Два пересечения с этим квадратом у них будет
 в 2-х случаях:

1) Когда левые окр-ти касаются соотв. сторон квадрата.

т.е. $a = R^2 = 3,5^2 = 12,25$

2) Когда правые окр-ти проходят через левые вершины квадрата.

т.е. $a = R^2 = (7,5 + 4)^2 + 12^2 = 144 + 11 \cdot 12 + 0,25 =$

$= 144 + 132 + 0,25 = 276,25.$

Ответ: $\{12,25; 276,25\}$.

~ 7.

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x} \\ y \leq 93 + 3(3^{2x} - 1)x \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$$

(2):

$$y = -3x$$

$$\left(\frac{x}{3x}\right)^{\ln 3x} = x^{2\ln x + 4\ln 3x}$$

$$x^{3\ln 3x - 2\ln x} = (3x)^{\ln 3x} = 3^{\ln 3} \cdot 3^{\ln x} \cdot x^{\ln 3} \cdot x^{\ln x}$$

$$x^{3\ln 3} \cdot x^{3\ln x} \cdot x^{-2\ln x} = 3^{\ln 3} \cdot 3^{\ln x} \cdot x^{\ln 3} \cdot x^{\ln x}$$

$$x^{2\ln 3} \cdot x^{\cancel{2\ln x}} = 3^{\ln 3 + \ln x} \cdot x^{\ln 3 + \ln x}$$

$$3^{2\ln x} = 3^{\ln 3 + \ln x}$$

$$2\ln x = \ln 3 + \ln x$$

$$\ln x = \ln 3$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$$

Ответ: $(2; -2), (3; -3)$.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

Решить графически:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что так как функция $y = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$ — выпуклая (вторая производная всюду положительна), то с линейной функцией она может пересекаться не более чем в двух точках. Подбором найдём, что эти точки:

$$\begin{cases} x = 4 & (3^4 + 4 \cdot 3^{28} = 93 - 12 + 4 \cdot 3^{28}) \\ x = 31 & (3^{31} + 4 \cdot 3^{28} = 31 \cdot 3^{28}) \end{cases}$$

Тогда заметим, что искомым ответом есть сумма:

$$\sum_{n=5}^{30} (93 + 3^{28}n - 3n - 3^n - 4 \cdot 3^{28}) = 0, \text{ так как обе функции принимают целые значения при целых аргументах.}$$

$$0 = 26 \cdot (93 - 4 \cdot 3^{28}) + (3^{28} - 3) \sum_{n=5}^{30} n - \sum_{n=5}^{30} 3^n =$$

$$= 26 \cdot (93 - 4 \cdot 3^{28}) + (3^{28} - 3) \left(\frac{30 \cdot 31}{2} - \frac{4 \cdot 5}{2} \right) - \left(\frac{3^{30} - 1}{3 - 1} - \frac{3^4 - 1}{3 - 1} \right) =$$

$$= 26 \cdot (93 - 4 \cdot 3^{28}) + (3^{28} - 3) \cdot \frac{910}{2} - \frac{3^{30} - 3^4}{2} =$$

$$= 26(93 - 4 \cdot 3^{28}) + 455 \cdot (3^{28} - 3) - \frac{3^{30} - 9}{2} =$$

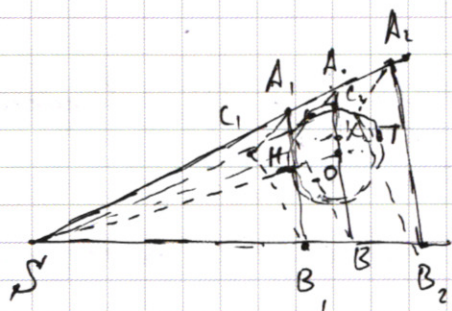
$$= 26 \cdot 93 - 104 \cdot 3^{28} + 455 \cdot 3^{28} - 455 \cdot 3 - 4,5 \cdot 3^{28} + 40,5 =$$

$$2600 - 26 \cdot 7 - 1365 + 40,5 + 3^{28} (455 - 104 - 4,5) =$$

$$= 1235 - 182 + 40,5 + 3^{28} \cdot 346,5 = 1093,5 + 3^{28} \cdot 346,5$$

Ответ: $1093,5 + 346,5 \cdot 3^{28}$.

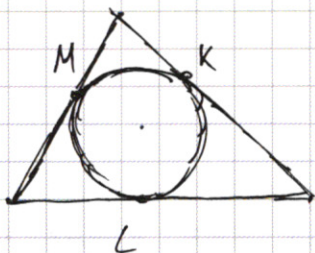
~ 4.



~~Следует~~ $S_{A_1B_1C_1} \sim S_{ABC}$ с

коэффициентом подобия $k = \frac{1}{3}$

(т.к. площади относятся как $\frac{1}{9}$).



~~Следует~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$① \left(\frac{x^7}{3x} \right)^{\ln 3x} = x^{2 \ln(3x^3)} = x^{4 \ln 3 + 6 \ln x}$$

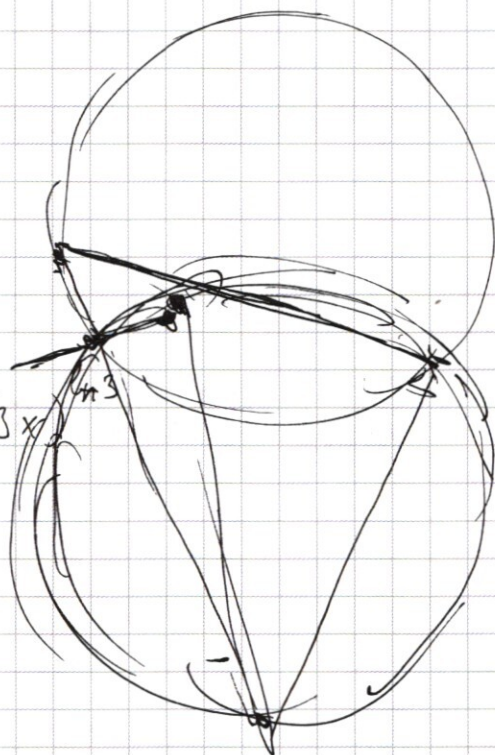
$$\left(\frac{x^6}{3} \right)^{\ln 3 + \ln x} = x^{4 \ln 3 + 6 \ln x}$$

$$\frac{x^{6 \ln 3 + 6 \ln x}}{3^{\ln 3 + \ln x}} = x^{4 \ln 3 + 6 \ln x}$$

$$(x^3)^{\ln 3} = 3^{\ln 3 + \ln x} = 3^{\ln 3x} = (3x)^{\ln 3}$$

$x = 3$
 $y = -3$

(0, 2, 3)



$$② \quad x = y + 4$$

$$y = x - 4$$

$$\left(\frac{x^7}{4-x} \right)^{\ln(4-x)} = x^{2 \ln(x) + 4 \ln(4-x)}$$

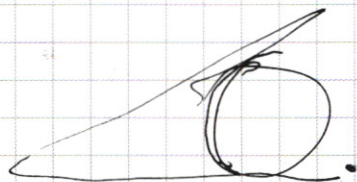
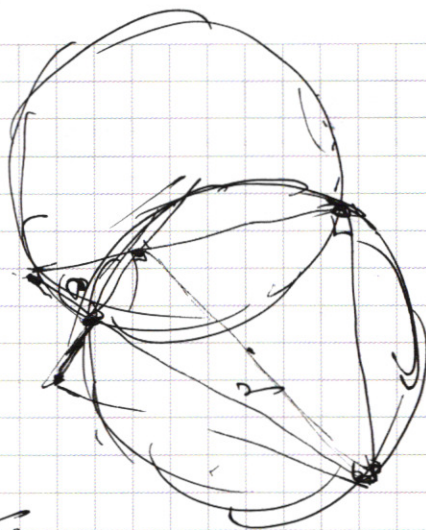
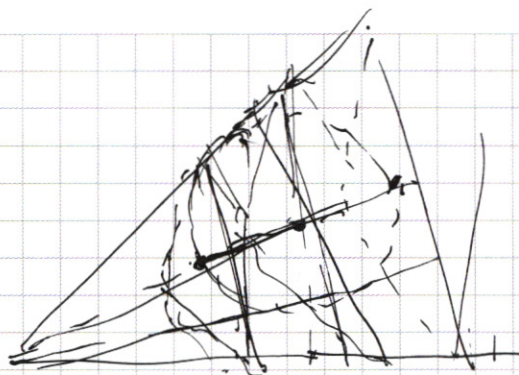
$$\frac{x^{3 \ln(y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2 \ln x + 4 \ln(4-x)}$$

$x = 2$
 $y = -2$

$$x^{3 \ln(-y) - 2 \ln x} = (-y)^{\ln(-y)}$$

$$x^{3 \ln(4-x) - 2 \ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$\frac{3 \ln x - \ln(4-x)}{(4-x)^{2 \ln x}} = \frac{3 \ln x}{x^{2 \ln x}} \ln(4-x)$$



$x \sim y$

н.с.

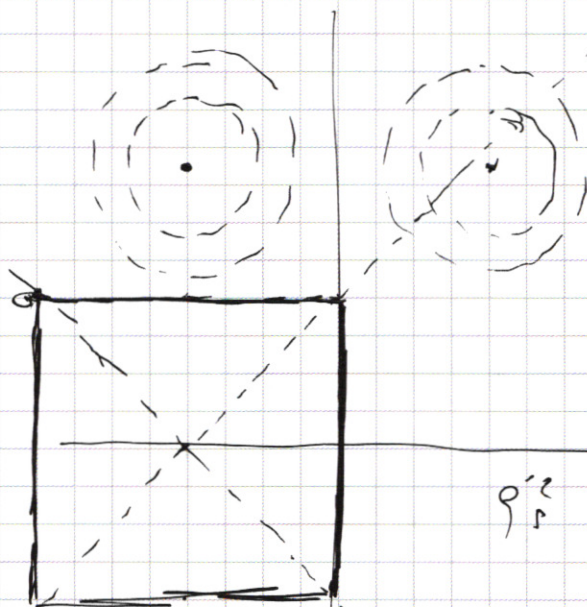
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ ((x-8)^2 + (y-15)^2 \leq a \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} y > -x-8 \\ y < x+8 \end{cases} \Rightarrow x=0$$

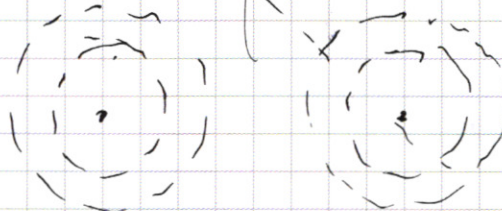
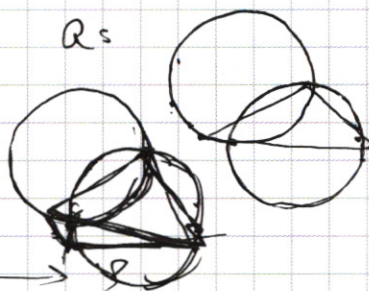
$$2) \begin{cases} y > -x-8 \\ y > x+8 \end{cases} \Rightarrow y=8$$

$$a = 3,5^2 = 12,25$$

R



$9 \frac{2}{5}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y_2' = 3^{28} - 3$$

$$\Delta x = 21.$$

$$\Delta y = 21 \cdot (3^{28} - 3)$$

$$y_1' = \ln 3 \cdot 3^x$$

5.

$$5 \cdot 3^{28} - 15 + 93 - 3 - 4 \cdot 3^{28}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28} x - 3x$$

$$3 + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28} x - 3x$$

$$x = 4 \Rightarrow 81 + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28} x - 12$$

$$x = 21.7.$$

$$3^{27} + 12 \cdot 3^{27} = 93 + 3^{31} + 12 \cdot 3^{27}$$

$$k \cdot 3^{28} \sim 3^k + 4 \cdot 3^{28} x = 29.$$

$$31 \cdot 3^{28} \sim 27 \cdot 3^{28} + 4 \cdot 3^{28}$$

$$3^{29} + 4 \cdot 3^{28} = 7 \cdot 3^{28} = 93 + (3^{28} - 3) \cdot 29$$

$$x = 31$$

$$\sum_{n=5}^{30} (93 + 3^{28}n - 3n - 3^n - 4 \cdot \cancel{3^{28}})$$

$$\sum \cancel{3^{28}} (3^{28}(n-4) + 93 - 3n - 3^n)$$

$$(1) (-y)^{\ln(-\frac{x^2}{y})} = x^{2\ln(xy^2)} = x^{2\ln x + 4\ln y}$$

$$(y + x + 6)^2 = y^2 + 2xy + 12y + x^2 + 12x + 36.$$

$$\begin{aligned} & \text{② } 2(x-1) = y + x + 2 \\ & \text{③ } 2(1-x) = y + x + 2 \\ & y + 3x = 0 \\ & \text{① } y = -3x \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2\cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2}\cos 4x = 0.$$

$$2\sqrt{2}\cos 5x \sin \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}\cos 4x.$$

$$2\cos 5x \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0.$$

$$2\cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$= 2\cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2}(\sin 2x + \cos 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0,$$

$$\left[\sin 2x = -\cos 2x \Rightarrow \tan 2x = -1 \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \right.$$

$$2\cos 5x + \sqrt{2}(\sin \cos 2x - \sin 2x) = 0. \quad (1)$$

$$(1) \sqrt{2}\cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2}\cos 5x + \sqrt{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0.$$

$$\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} &= 0 \\ \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} &= 0. \end{aligned} \right.$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned} & \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) \left(e^{i\frac{a+b}{2}} + e^{-i\frac{a+b}{2}} \right) \\ &= \frac{e^{ia} + e^{-ia} + e^{ib} + e^{-ib}}{2} = \cos a + \cos b \end{aligned}$$

$$2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \cos 5x + \cos 4x = 0.$$

$$\cos(5x) = \cos(4x + x) = \cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x$$

$$\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(4x - \frac{\pi}{2})}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sin 4x}{2}}$$

$$\sqrt{2} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0.$$

$$\begin{aligned} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) &= \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(4x + \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right) = \cos a. \end{aligned}$$

$$\sin \left(4x + \left[3x + \frac{\pi}{4} \right] \right) = \sin 4x \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \cos 4x.$$

$$\sin 4x \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \cos 4x + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos(4x) = 0$$

$$\sin a \cos b + \sin b \cos a + \cos a + \cos b =$$

$$= \cos b (\sin a + 1) + \cos a (\sin b + 1) = 0$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 5x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos 5x$$



$$\begin{aligned} \sin a - \sin b &= 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{e^{ia-b} - e^{-ia-b}}{2i} \left(e^{i\frac{a+b}{2}} + e^{-i\frac{a+b}{2}} \right) \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$64827 \stackrel{\sim 1}{=} 3 \cdot 3 \cdot 7203 = 3^3 \cdot 2401 = 3^3 \cdot 343 \cdot 7 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 9} \\ -63 \\ \hline 18 \\ -18 \\ \hline 027 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2401 \overline{) 7} \\ -21 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ -28 \\ \hline 63 \\ -63 \\ \hline 0 \end{array}$$

1) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1$

2) $3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$

1) $\frac{8!}{3!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5!}{2!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 280$

Diagram: A row of 8 circles labeled A through H. Circles A, B, C, D, E are shaded. Circles F, G, H are unshaded. Below the circles, the expression $\frac{5!}{2!3!}$ is written.

2) $\frac{8!}{4!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 280 \cdot 3$

1) + 2) = $280 \cdot 4 = 1120$

2) $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$