МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра

Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right) x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

64827 Можно представить в виде 2х наборов произведений

① $64827 = 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7$

② $64827 = 9\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7$

Рассмотрим первый 3 ③ 3 ⑦ 2 ① можно расположить

$\frac{8!}{3!\cdot3!\cdot2!}$ способами $\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot2} = 56\cdot10 = 560$

Рассмотрим второй 1 ⑨ 1 ③ 3 ⑦ 3 ①

можно расположить $\frac{8!}{3!\cdot3!}$ способами $\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot3\cdot2} = 56\cdot20 = 1120$

Итог: $560 + 1120 = 1680$ способов

Ответ: 1680.

2. $\cos7x + \cos3x + \sin7x - \sin3x + \sqrt{2}\cos4x = 0$

$2\cdot\cos5x\cdot\cos2x + 2\cdot\sin2x\cdot\cos5x + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$(\cos2x + \sin2x)(2\cos5x + \sqrt{2}(\cos2x - \sin2x)) = 0$

① ②

② $2\cos5x + \sqrt{2}\cos2x - \sqrt{2}\sin2x = 0$

$\sqrt{2}\cdot\cos3x\cdot\cos2x - \sqrt{2}\cdot\sin3x\cdot\sin2x + \cos2x - \sin2x = 0$

$\cos2x(\sqrt{2}\cdot\cos3x + 1) - \sin2x(\sqrt{2}\cdot\sin3x + 1) = 0$

$\cos2x\cdot\sqrt{2}\left(\cos3x + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \sin2x\cdot\sqrt{2}\left(\sin3x + \sin\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\cos2x\cdot\sqrt{2}\cdot2\cdot\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}\right) - \sin2x\cdot\sqrt{2}\cdot2\cdot\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos2x\cdot\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right) - \sin2x\cdot\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right) = 0$

$\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(2x + \frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right) = 0$

Объединю ① и ②

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x + \sin 2x = 0 \\ \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} tg(2x) = -1 \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right., n \in \mathbb{Z} \quad \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ \frac{3x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi n \\ \frac{7x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi n \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + \pi n \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + \pi n; \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}.$

3. $\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases} -y > 0 \\ xy^2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

Прологарифмирую 1-е ур-е по ln. Получу

$$\ln(-y) \cdot \ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) = \ln(xy^2) \cdot \ln x^2$$

$$\ln(-y) \cdot \left(\ln x^7 - \ln(-y)\right) = 2\ln(x)\left(\ln x + \ln(y^2)\right)$$

$$7\ln(x) \cdot \ln(-y) - \ln^2(-y) = 2\ln^2(x) + 4\ln x \cdot \ln(-y)$$

$$2\ln^2(x) - 3 \cdot \ln(x) \cdot \ln(-y) + \ln^2(-y) = 0$$

$$\ln(x) = \frac{3\ln(-y) \pm \sqrt{9\ln^2(-y) - 8\ln^2(-y)}}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln(x) = \ln(-y) \\ \ln(x) = \frac{1}{2}\ln(-y) \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -y \quad ① \\ x^2 = -y \quad ② \end{array}\right.$$

Подставим каждое во 2-е ур-е

① $y^2 + 2y(-y) - 3y^2 + 12(-y) + 4y = 0$

$-4y^2 - 8y = 0 \qquad y^2 + 2y = 0$ $\left[\begin{array}{l} y = 0 \quad \varnothing \text{ по ОДЗ} \\ y = -2 \to x = 2 \quad (2; -2) \text{ - реш.} \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) $y=-x^2$

$x^4+2x(-x^2)-3x^2+12x+4(-x^2)=0$, $x^4-2x^3-7x^2+12x=0$

$x(x^3-2x^2-7x+12)=0$ $\quad x(x-3)(x^2+x-4)=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \quad \varnothing \text{ ОДЗ} \\ x=3 \\ x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \quad \varnothing \text{ ОДЗ} \\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

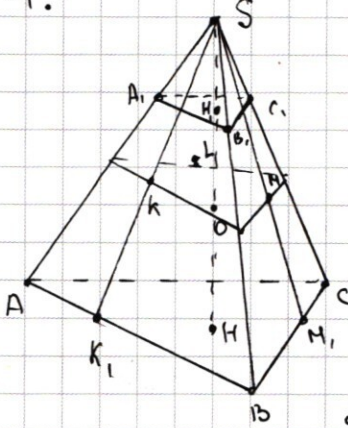
$x=3 \to y=-9$ $\quad (3;-9)$ – решение

$x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \to y=-\left(\frac{17+1-2\sqrt{17}}{4}\right)=\frac{\sqrt{17}-9}{2}$

$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2};\frac{\sqrt{17}-9}{2}\right)$ – решен.

Ответ: $(3;-9)$; $(2;-2)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2};\frac{\sqrt{17}-9}{2}\right)$.

4.



1) Пусть H_1 и H – точки касания плоскостей, перпенд. SO, сферы. Проведу грани трехгр. угла до пересечения с обеими пл-ями. Получу пирамиду $SABC$, где SH – высота, $SA_1B_1C_1$, где SH_1 – высота.

2) $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=\frac{9}{16}=\left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2$, т.к. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ (по постр.) ($A_1B_1 \parallel AB$ ...)

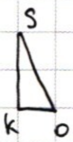
$\triangle SA_1B_1 \sim \triangle SAB$ (по 2м уг) $\Rightarrow \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2=\left(\frac{SA_1}{SA}\right)^2$, $\triangle SA_1H \sim \triangle SAH$ (по 2м уг) $\Rightarrow$

$\left(\frac{SA_1}{SA}\right)^2=\left(\frac{SH_1}{SH}\right)^2=\frac{9}{16}$

3) $SH=SH_1+2R$, $\quad \frac{3}{4}=\frac{SH_1}{SH_1+2R}$ $\quad 3SH_1+6R=4SH$,

$SH_1=6R$

4) Т.к. K – точка касания, то $KO\perp(SAB) \Rightarrow KO\perp SK \Rightarrow \triangle SKO$ – прямоуг.



$\sin\angle KSO=\frac{KO}{SO}=\frac{R}{SH_1+R}=\frac{R}{7R}=\frac{1}{7}$ $\quad \angle KSO=\arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$

5) $\triangle KSO = \triangle MSO = \triangle LSO$ – прямоуг, по гипот. и катету =>

$SK = SM = SL$

6) $\triangle SKO \sim \triangle SHK_1$, где K_1 – продолжение SK (по 2м уг)

$$\Downarrow \quad \frac{SO}{SK_1} = \frac{SK}{SH}$$

аналогично получаем $\frac{SO}{SL_1} = \frac{SL}{SH}$, $\frac{SO}{SM_1} = \frac{SM}{SH}$

т.к. $SK = SM = SL$, то $SK_1 = SL_1 = SM_1$ и $KK_1 = MM_1 = LL_1$

7) Проведу KK_2 – высоту, $\triangle K_1KK_2 \sim \triangle K_1SH$ (по 2м уг) =>

$$\frac{KK_1}{K_1S} = \frac{KK_2}{SH}$$

аналогично $\frac{LL_1}{L_1S} = \frac{LL_2}{SH}$; $\frac{MM_1}{M_1S} = \frac{MM_2}{SH}$

получаем $KK_2 = MM_2 = LL_2$ учитывая (6) и (5), т.е.

точки K, M, L находятся на одинаковом расстоянии от

плоскости основания => сечение ∥ основанию.

8) $\frac{S_{сеч}}{S_{ABC}} = \left(\frac{a}{AB}\right)^2$, где a – сторона треуг., который яв-я сеч, $K \in a$.

из подобия следует, что $\left(\frac{a}{AB}\right)^2 = \left(\frac{SK}{SK_1}\right)^2$

9) из $\triangle SKO$ – прямоуг $SK = \sqrt{SO^2 - KO^2} = \sqrt{(7R)^2 - R^2} = R \cdot \sqrt{48}$

~~из $\triangle SK_1H$ – прямоуг SK_1~~

из (6) следует, что $SK_1 = \frac{SH \cdot SO}{SK} = \frac{8R \cdot 7R}{\sqrt{48} \cdot R} = \frac{56R}{\sqrt{48}}$

$$S_{сеч} = 16 \cdot \left(\frac{\cancel{R} \cdot \sqrt{48} \cdot \sqrt{48}}{56\cancel{R}}\right)^2 = 16 \cdot \left(\frac{48}{56}\right)^2 = 16 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{16 \cdot 36}{49} = \frac{576}{49}$$

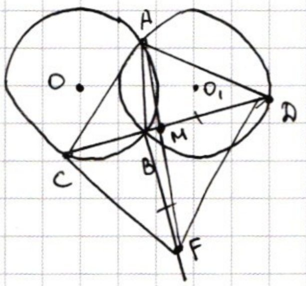
Ответ: $\frac{576}{49}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

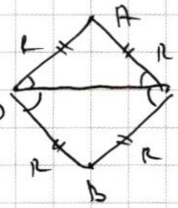
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



а) 1) т.к. $\angle CAD = 90^\circ$, то $\angle ACD + \angle ADC = 90^\circ$

$\angle AOB + \angle AO_1B = 2\cdot(\angle ACD + \angle ADC) = 180^\circ$



$\angle OAO_1 + \angle OBO_1 = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

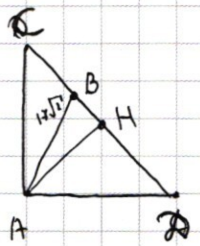
$\triangle OAO_1 = \triangle OBO_1$ по 3м сторонам $\Rightarrow$

$\angle OAO_1 = \angle OBO_1 = 90^\circ \Rightarrow$ т.к. треуг-ки – р/б,

то $\angle AOO_1 = \angle AO_1O = \angle OO_1B = \angle O_1OB = 45^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle AO_1B = 90^\circ$. OAO_1B – квадрат,

$AB = AO_1 \cdot \sqrt{2} = 17\sqrt{2}$

2) $\angle ACB = \dfrac{\angle AOB}{2} = 45^\circ$, $\angle ADB = \dfrac{\angle AO_1B}{2} = 45^\circ$, т.е. $AC = AD$, т.к. $\triangle ACD$ – прямоуг, р/б



3) Проведу AH – высоту, $AH = DH = HC$

Пусть $BH = x$, тогда $AH = DH = HC = \sqrt{289\cdot 2 - x^2}$

$CD = 2\cdot DH = 2\sqrt{289\cdot 2 - x^2}$

Пусть CB – меньшая $CB = \sqrt{289\cdot 2 - x^2} - x$, $DB = \sqrt{289\cdot 2 - x^2} + x$

4) $\triangle CBF$ – прямоуг, $BF = BD \Rightarrow CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} =$

$= \sqrt{289\cdot 2 \cancel{- x^2} \cancel{+ x^2} - 2\cdot x \cdot \sqrt{289\cdot 2 - x^2} + 289\cdot 2 \cancel{- x^2} \cancel{+ x^2} + 2\cdot x\cdot\sqrt{289\cdot 2 - x^2}} =$

$= \sqrt{289\cdot 2\cdot 2} = 17\cdot 2 = 34.$

Ответ: $CF = 34$.

б) 1) $BC = 16$.

По т. Пиф. $BF = \sqrt{(34-16)(34+16)} = \sqrt{50\cdot 18} = 10\cdot 3 = 30 = BD$

$DC = BC + BD = 46$, $HC = 23 = DH = AH$

$\cancel{S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2}\cdot AH\cdot CM + \frac{1}{2}\cdot BF\cdot CM = \frac{1}{2}CM(AH + BF)}$

2) $\triangle BFD$ – прямоуг, р/б $\Rightarrow \angle BDF = 45^\circ$,

$\triangle CAD$ – прямоуг, р/б $\Rightarrow \angle ADC = 45^\circ$

$\angle ADF = 90^\circ$, тогда в $\triangle ADF$ – прямоуг $\cancel{AF = \sqrt{AD^2 + DF^2}} =$

$\cancel{AD = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{46}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}}$ $AD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$; $DF = BD \cdot \sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

$\cancel{DF = BD \cdot \sqrt{2} = 30\sqrt{2}}$, $\cancel{AF = \sqrt{23^2 \cdot 2 + 30^2 \cdot 2}}$

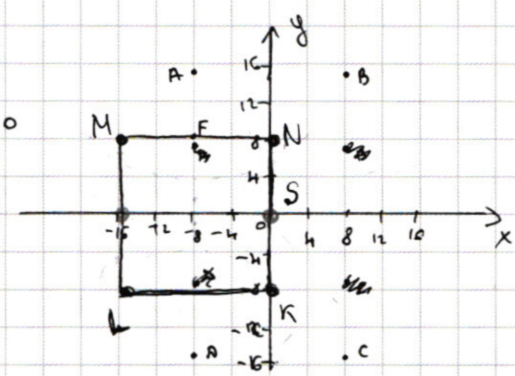
$S_{\triangle} ADF = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 30\sqrt{2} = 23 \cdot 30 = 690$

3) $S_{\triangle ACF} = S_{ACFA} - S_{AAF} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CD + \frac{1}{2} \cdot BF \cdot CD - S_{AAF} = \frac{1}{2} \cdot 46(23+30) - 690 =$

$= 23 \cdot 23 + 23 \cdot 30 - 690 = 23^2 = 529$

Ответ: 529.

5. $\begin{cases} \underbrace{|x+y+8|}_{①} + \underbrace{|x-y+8|}_{②} = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$, $a > 0$



- ① > 0, ② > 0 $\quad y \in (-8; 8)$, $x = 0$
- ① > 0, ② < 0 $\quad x \in (-16; 0)$, $y = 8$
- ① < 0, ② > 0 $\quad x \in (-16; 0)$, $y = -8$ $\qquad (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$ – окр. $R = \sqrt{a}$
- ① < 0, ② < 0 $\quad x \in (-8; 8)$, $x = -16$ $\qquad x_8 = \pm 8 \quad y_8 = \pm 15$ A, B, C, D – возможные центры.

~~[illegible]~~

1) ~~2 реш. если R = 1, т.к. a = 1, окр с центрами A и D имеют по 1 реш, B и C не имеют~~

2) ~~до $1 \le R \le NA$ 2 реш. $NA = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$ $1 \le a \le \sqrt{17}$ – 2 реш. до точки кас ок-тей~~

3) точка кас $\cancel{AF \le R \le NA}$, $\cancel{NA = \sqrt{7^2+8^2} = \sqrt{49+64} = \sqrt{113}}$, $\cancel{AF = \sqrt{5}}$

1) $a = AF^2 = \cancel{15^2} = 49$ 2 реш. $\qquad$ 2) $a = BL^2 = (15+8)^2 + (16+8)^2 = 529 + 576 = 1105$

~~2) [illegible]~~

1) – касание ок-тей с у. A и D пр-ка 2) касание пр-ка окр-ми с у. B и C.

Ответ: ~~49; 1105~~ 49; 1105

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left[\begin{array}{l} x=-y \\ x^2=-y \end{array}\right.$

Подставим ① $y^2+2y(-y)-3y^2+12(-y)+4y=0$

$y^2-2y^2-3y^2-12y+4y=0$

$-4y^2-8y=0 \qquad 4y^2+8y=0 \qquad 4y(y+2)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=0 \to x=0 \quad \varnothing \\ y=-2 \to x=2 \end{array}\right.$

② $y=-x^2$

$x^4+2x(-x^2)-3x^2+12x+4(-x^2)=0$

$x^4-2x^3-3x^2+12x-4x^2=0 \qquad x^4-2x^3-7x^2+12x=0$

$x(x^3-2x^2-7x+12)=0$

~~8~~ 8 $\quad 27-2\cdot 9-21+12=27-18-21+12=39-39$

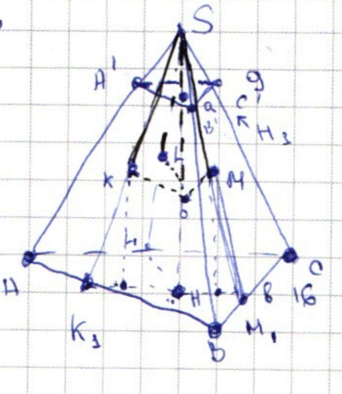
$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2-7x+12 & x-3 \\ \underline{x^3-3x^2} & x^2+x-4 \\ \quad x^2-7x+12 & \\ \quad \underline{x^2-3x} & \\ \qquad -4x+12 & \end{array}$$

$x(x-3)(x^2+x-4)=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \quad \varnothing \\ x=3 \to y=-9 \\ x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \quad \varnothing \\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \to y=-\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2=-\frac{17+1-2\sqrt{17}}{4}=\sqrt{17}-9 \end{array}\right.$

Ответ: $(2;-2)$; $(3;-9)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2};\sqrt{17}-9\right)$.

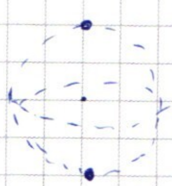
4. 

все плоскости различны.

$\angle KSO$ - ? ; $S_{сеч}$ - ? (KLM) Построено так, что касается шара

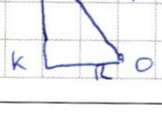
а) $\frac{9}{16}=\cancel{\left(\frac{a}{b}\right)^2}\left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2=\left(\frac{A_1S}{AS}\right)^2=\left(\frac{SH_1}{SH}\right)^2$

$SH=SH_1+2R$



$\frac{3}{4}=\frac{SH_1}{SH_1+2R} \qquad 3SH_1+6R=4SH_1$

$SH_1=6R$

$\triangle KSO$ - прямоуг $\Rightarrow$ 

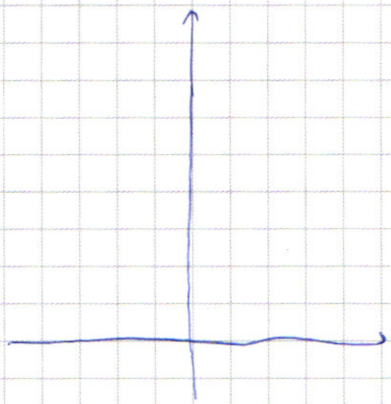
$\sin(KSO)=\frac{R}{SH_1+R}=\frac{R}{7R}=\frac{1}{7}$

$\angle KSO=\arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

5. $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$



$|\cancel{x+y+8}|$

• $x+y+8>0$ $\quad 2x=0$
$x-y+8>0$ $\quad x=0$
$\begin{cases} y < x+8 \\ y > -x-8 \end{cases}$ $\quad x=0$
$\begin{cases} y<8 \\ y>-8 \end{cases}$ $\quad y\in(-8;8)$, $x=0$

4.
б) Ан-но $\angle MSO = \angle LSO = \arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$
↓
Δ-ки равны по гип. и кат. =>

$SK = SM = SL = \sqrt{49R^2 - R^2} = R\sqrt{48}$

$\frac{SK}{SH} = \frac{KO}{K_1H} = \frac{SO}{SK_1}$ $\quad \frac{SM}{SH} = \frac{MO}{M_1H} = \frac{SO}{SM_1}$ $\quad \frac{SL}{SH} = \frac{SO}{L_1H} = \frac{SO}{SL_1}$

$SK_1 = \frac{SH \cdot SO}{SK} = \frac{8R \cdot 7R}{R\sqrt{48}} = \frac{56}{\sqrt{48}}R$

$KK_2 = LL_2 = MM_2$, $\quad \frac{KO}{K_1H} = \frac{MO}{M_1H} = \frac{LO}{L_1H}$ $\quad (SK_1 = SL_1 = SM_1) \Rightarrow K_1H = L_1H = M_1H$

$\frac{KK_2}{SH} = \frac{KK_1}{SK} \Rightarrow KK_2 = \frac{KK_1 \cdot SH}{SK} = \frac{(SK_1 - SK)SH}{SK} = \frac{\left(\frac{56}{\sqrt{48}}R - R\cdot\sqrt{48}\right)\cdot 8R}{\sqrt{48}R} =$

$= 8\cdot\left(\frac{56}{48}R - R\right) = 8R\,\frac{8}{48} = \frac{8}{6}R$

Все точки на одинак. расст. от оси, ~~кокопоре пер~~ => Сечен. // осн.

- Провер все мини пер. через точки

$\frac{S_{сеч}}{S_{ABC}} = \left(\frac{a}{AB}\right)^2 = \left(\frac{SK}{SK_1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{48}R\sqrt{48}}{56R}\right)^2$ $\quad \frac{S_{сеч}}{S_{ABC}} = \left(\frac{48}{56}\right)^2$ $\quad \frac{S_{сеч}}{16} = \frac{36}{49}$

$S_{сеч} = \frac{36\cdot 16}{49}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\overbrace{6+6}^{12}+5+5+\overbrace{5+5}^{20}+3=35$ 18

1.

Кол-во восьмизн. чисел, произвед. цифр $= 64827$

$64827 \mid \cancel{9} = 3\cdot 21609 = 9\cdot 7203 = 9\cdot 3\cdot 2401 = \cancel{9}\, 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 343 =$

$2401 : 7 = 343$ (-21, 30, 28, 21); $343 : 7 = 49$ (-28, 63)

$= 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 7\cdot 7$

$9\cdot 3\cdot 7\cdot 7\cdot 7$ — 2 набора.

Рассм. 1ый $\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$ 3 (3) 3 (7) 2 (1)

$$\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot \cancel{3\cdot 2}\cdot \cancel{2}} = 560$$

Рассм 2ой

1 (9) 1 (3) 3 (7) 3 (1)

$$\frac{8!}{3!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 3\cdot 2} = 56\cdot 20 = 1120$$

Итог: $560+1120 = \underline{1680}$

2.

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cdot\cos(5x)\cdot\cos(2x) + 2\cdot\sin(2x)\cdot\cos(5x) + \sqrt{2}\cdot\cos 4x = 0$

$2\cos(5x)\left(\cos 2x + \sin 2x\right) + \sqrt{2}\left(\cos^2(2x) - \sin^2(2x)\right) = 0$

$\underbrace{\left(\cos 2x + \sin 2x\right)}_{1}\left(2\cos(5x) + \sqrt{2}\underbrace{\left(\cos 2x - \sin 2x\right)}_{2}\right) = 0$

(2) $\sqrt{2}\cos(5x) + \cos 2x - \sin 2x = 0$

$\sqrt{2}\cos(5x) + \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0$

$2\cos^2 x - 1 - 2\sin x\cos x$

$\cos^2 x - \sin x(\sin x + 2\cos x) = 0$

$2\cos^2 x - 2\sin x\cdot\cos x - 1 = 0$

$\cos x = \frac{2\sin x \pm \sqrt{4\sin^2 x + 8}}{4} = \frac{\sin x \pm \sqrt{\sin^2 x + 2}}{2}$

$\cos^2 x - 2\sin x\cdot\cos x - \sin^2 x = 0$

$\cos x = \frac{2\sin x \pm \sqrt{4\sin^2 x + 4\sin^2 x}}{2}$

$\sqrt{2}\cos(5x) + 2\left(\cos x - \frac{\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 2}}{2}\right)\left(\cos x - \frac{\sin x - \sqrt{\sin^2 x + 2}}{2}\right) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\cos x = \frac{2\sin x \pm \sqrt{8\sin^2 x}}{2} = \sin x \pm \sqrt{2\sin^2 x} = \sin x \pm \sqrt{2}\sin x$$

$$\sqrt{2}\cos(5x) + (\cos x - \sin x - \sqrt{2}\sin x)(\cos x - \sin x + \sqrt{2}\sin x) = 0$$

$$\cancel{\cos(5x)} = \sqrt{2}\cos(3x)\cdot\cos(2x) - \sqrt{2}\sin(3x)\cdot\sin(2x) + \cos(2x) - \sin(2x) = 0$$

$$\cos(2x)(\sqrt{2}\cos 3x + 1) - \sin(2x)(\sqrt{2}\sin 3x + 1) = 0$$

$$\cos(2x)(\sqrt{2}\cos 3x + 1) = \sin(2x)(\sqrt{2}\sin 3x + 1)$$

$$tg(2x) = \frac{\sqrt{2}\cos 3x + 1}{\sqrt{2}\sin 3x + 1} = \frac{(\sqrt{2}\cos 3x + 1)(\sqrt{2}\sin 3x - 1)}{2\cdot\sin^2 3x - 1}$$

$$\sqrt{2}\left(\cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos 3x + \cos\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\sqrt{2}\left(\sin 3x + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\cos 2x\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}\right) - \sin(2x)\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos 2x\cdot\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right) - \sin 2x\cdot\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(2x+\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(2x) + \cos(2x) = 0 \\ \cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} tg(2x) = -1 \\ \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}+\pi n, \ n\in\mathbb{Z} \\ \frac{7x}{2}+\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}+\pi n, \ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad n\in\mathbb{Z}$$

$$\ln(-y)(\ln x^7 - \ln(-y)) = \cancel{\ldots} = 2\ln x + \ln x\cdot\ln(xy^2)$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \\ \frac{3}{2}x = \frac{5\pi}{8} + \pi n \\ \frac{7}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi n, \ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, \ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\ln\left(x^{2\ln(xy^2)}\right) = \ln x^2 + \ln\cdot x^{\ln(xy^2)}$$

3. $$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

Подрологар. $\ln$

$$\ln(-y)\cdot\ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) = \ln(xy^2)\cdot\ln x^2$$

$$\ln(-y)\cdot(\ln(x^7) - \ln(-y)) = (\ln(x) + \ln(y^2))\ln x^2$$

$$7\ln(-y)\cdot\ln(x) - \ln^2(-y) = 2\cdot\ln^2(x) + 4\ln(x)\cdot\ln(-y)$$

ОДЗ: $\begin{cases} -y > 0 \\ xy^2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$$2\ln^2 x - 3\ln(x)\cdot\ln(-y) + \frac{\ln^2(-y)}{\ln(-y)} = 0$$

$$\ln(x) = \frac{3\ln(-y) \pm \sqrt{9\ln^2(-y) - 8\ln^2(-y)}}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln(x) = \ln(-y) \\ \ln(x) = \frac{1}{2}\ln(-y) \end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

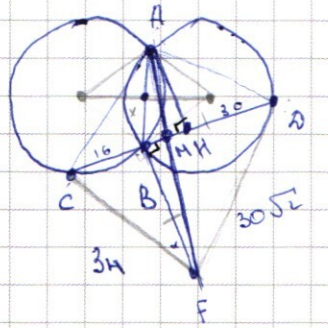
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

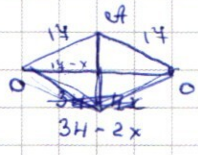
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $R_1 = R_2 = 17$ а) $\angle CAD = 90^\circ$ $BF = BD$ CF - ?

б) $BC = 16$ S_{ACF} - ?





$17^2 - (17-x)^2 = AM^2$

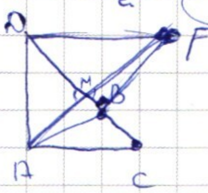
$17^2 - 17^2 - x^2 + 34x = AM^2$

$AM = \sqrt{34x - x^2}$

$AB = 2\ AM = 2\sqrt{34x - x^2}$

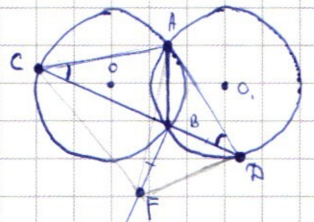
$OO_1 = 17\sqrt{2} = 34 - 2x$ $x = \frac{34 - 17\sqrt{2}}{2} = 17\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

$AB = 17\sqrt{2}$ $CD = 2\cdot 17$ $BD = y$

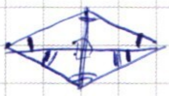


$CF = BF \cdot \cos\alpha =$

$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 23 \\ 69 \\ 46 \\ 529 \end{array}$



$\angle CAD = 90^\circ$, $\angle ACD + \angle ADC = 90^\circ$

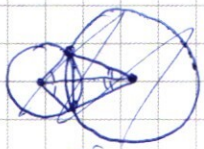


$\angle AOB + \angle AO_1B = 180^\circ$

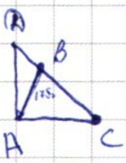
$4\alpha = 180^\circ$ $\alpha = \frac{90}{2} = 45^\circ \Rightarrow$

$AOBO_1$ - кв-ат $\Rightarrow$ $\angle ACB = 45^\circ = \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow$

$AC = AD$ - $\triangle ACD$ - пр; р/б.



$AB = 17\sqrt{2}$

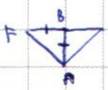


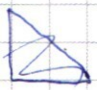
$\angle FDB = 45^\circ$

$\Downarrow$

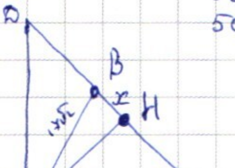
$\angle FDA = 90^\circ$

$50 \cdot 18 =$
$50 \cdot 2 \cdot 9$





AH - высота ACD $AH = HC = HD$



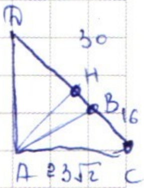
$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 17 \\ 119 \\ 17 \\ 289 \end{array}$ $\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 17 \\ 98 \\ 14 \\ 238 \end{array}$

$\angle ACF + \angle CFD = 180^\circ$ $AH = \sqrt{289 \cdot 2 - x^2} = DH = HC$

$DC = 2\sqrt{289 \cdot 2 - x^2}$

$BD = DH - x = \sqrt{289 \cdot 2 - x^2} - x$

$CB = \sqrt{289 \cdot 2 - x^2} + x$



$\begin{array}{r} 34 \\ -\ 16 \\ 18 \end{array}$

$CF = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{289 \cdot 2 - x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{\ } + 289 \cdot 2 - x^2 + x^2 + 2 \cdot x\sqrt{\ }}$ $= 23\sqrt{2} - 16 = x$

$= \sqrt{289 \cdot 2 \cdot 2} = 17 \cdot 2 = 34$

б) $BC = 16$, $16^2 = 289$ S_{ACF} 256 $16^2 = x^2 + 289 \cdot 2 - x^2 + 2x \cdot \sqrt{289 \cdot 2 - x^2}$

$BF = \sqrt{(34-16)(34+16)} = \sqrt{50 \cdot 18} = \sqrt{100 \cdot 9} = 30$ $CD = 46$

☑ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

$AC = AH = \frac{46}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$

$x = \sqrt{289 \cdot 2 - 2 \cdot 23^2}$

7. $\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$ $\quad -y < -3^x - 4 \cdot 3^{28}$

$y \le$

$y \le 93 \cdot (3^{28} - 3)x$

5. $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$ ← окр.

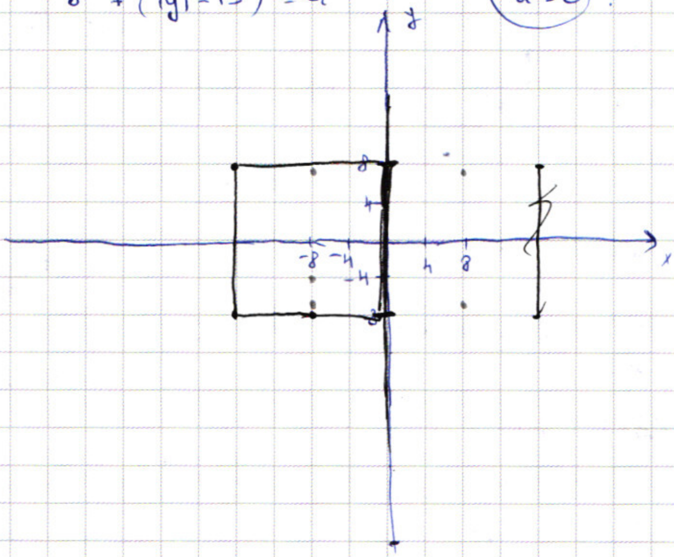
• $x+y+8 > 0$, $x-y+8 > 0$ $\quad x=0 \quad y > -8, \; y < 8 \quad \begin{cases} y \in (-8;8) \\ x=0 \end{cases}$

• $x+y+8 > 0$, $x-y+8 < 0$ $\quad x+y+8 - x+y-8 = 16 \quad 2y = 16 \quad y = 8 \quad x < 0, \; x > -16 \quad \begin{cases} x \in (-16;0) \\ y = 8 \end{cases}$

• $x+y+8 < 0$, $x-y+8 > 0$ $\quad -x-y-8 + x - y + 8 = 16 \quad y = -8 \quad x < -8, \; x > -16 \quad x \in (-16; -0), \; y = -8$

• $x+y+8 < 0$, $x-y+8 < 0$ $\quad -x-y-8 - x + y - 8 = 16 \quad -2x = 16 \cdot 2 \quad x = -16 \quad y < 8, \; y > -8 \quad y \in (-8;8), \; x = -16$

• $x=0 \quad 8^2 + (|y| - 15)^2 = a \quad (a > 0)$



$\begin{array}{r} 32 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1024 \\ + 529 \\ \hline 1553 \end{array}$

$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \\ + 529 \\ \hline 1105 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)