

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

цифры: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

нам подходят только следующие наборы из 8 цифр:

7777 93 11 и 7777 3331

количество перестановок этих наборов:

$$\frac{8!}{\underbrace{4!}_{\text{перест. 7}} \cdot \underbrace{2!}_{\text{перест. 1}}} + \frac{8!}{\underbrace{4!}_{\text{перест. 7}} \cdot \underbrace{3!}_{\text{перест. 3}}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$$

Ответ: 1120

Задача №3

$$003: xy^2 > 0 \Rightarrow x > 0; (-y) > 0 \Rightarrow y < 0.$$

$$1) \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$e^{(7\ln x - \ln(-y))\ln(-y)} = e^{2\ln(x) \cdot \ln(xy^2)}$$

$$(7\ln x - \ln(-y))(\ln(-y)) = 2\ln(x)(\ln x + 2\ln(-y))$$

$$7\ln x \ln(-y) - \ln^2(-y) = 2\ln^2(x) + 4\ln(-y)\ln x$$

$$2\ln^2 x - 3\ln x \ln(-y) + \ln^2(-y) = 0.$$

$$(\ln(-y) - 2\ln x)(\ln(-y) - \ln x) = 0.$$

рассмотрим 2 случая: (оба удовлетворяют условию)

$$1) y = -x$$

$$2) y = -x^2$$

$$1) x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0.$$

$$4x^2 - 8x = 0$$

$$4x(x-2) = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ x=2 \quad y=-2 \end{matrix}$$

$x=0$ не подходит по ООЗ.

$$2) x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$$

$$x(x^3 - 2x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$x(x-3)(x^2+x-4) = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \rightarrow x=3 \quad y=-9 \\ &\rightarrow x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \quad y = \frac{1}{2}(9-\sqrt{17}) \end{aligned}$$

Ответ: $(2; -2); (3; -9); (\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2})$

Задача 15.

$$1) |x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x+y \geq -8 & \quad x+y \geq -8 & \quad x+y \leq -8 \\ x-y \geq -8 & \quad x-y \leq -8 & \quad x-y \geq -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ 2x=0 & \quad 2y=16 \quad -2y=-16 \quad -2x=32 \end{aligned}$$

отсюда ясно на графике.

$$2) (x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

четыре окружности, симметричные отн. осям координат, не выходя за пределы

соответствующих $\rightarrow$ центр $x=\pm 8 \quad y=\pm 15$.

2 пересечения возможно в 2-х случаях: ① и ② отобр. на рисунке. при радиусах r_1 и r_2 совп. если $r_1 < r_2$, то окр. не касается квадрата. Не достает.

если $r_1 < r_2$, то квадрат пересекает в 4-х точках

если $r_1 > r_2$, то окружности больше квадрата и не пересекают его. т.о. $r_1^2 = a \quad r_2^2 = a$.

$$r_1 = 15-8 = 7 \quad a = 49$$

$$r_2 = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \Rightarrow a = 15^2 + 8^2 = 289$$

Ответ: при $a \leq 49$ или 289 .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6.

В окружности Γ равного радиуса
углы, опирающиеся на равные
дуги равны, т.е. $\angle \alpha = 90^\circ - \alpha$
($\angle ACB = \angle ADB$)

и т.д. $\alpha = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

$$AB = 2R \cdot \sin \frac{2\alpha}{2} = \sqrt{2} R.$$

затем в т. центров в $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$:

$$\frac{BC}{\sin \delta} = \frac{AB}{\sin \alpha} \quad ; \quad \frac{BD}{\sin(90^\circ - \delta)} = \frac{AB}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} BD = AB \cos \delta \quad | \cdot 12$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} BC = AB \sin \alpha \quad | \cdot 12$$

$$\frac{1}{2} BD^2 + \frac{1}{2} BC^2 = AB^2$$

$$CF^2 = BC^2 + BF^2 = BD^2 + BC^2 = 2AB^2 = 2 \cdot 2R^2$$

из т. Пифагора

$$CF = 2R = 34.$$

1) Ответ: 34.

$$2R \cdot \sin \delta = 16.$$

$$AB^2 = 2 \cdot 17^2$$

$$BD^2 = 4 \cdot 17^2 - 16^2 = 1156 - 256 = 900$$

$$S_{\triangle ACF} = 240$$

$$CD = 46 \quad (BD = 30)$$

$$\frac{BK}{KH} = \frac{30}{23}$$

$$AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot CD$$

$$AM = \frac{1}{2} CD = 23$$

$$CH = \frac{1}{2} CD = 23$$

$$BK = \frac{23}{53} BH = \frac{23}{53} \cdot 7.$$

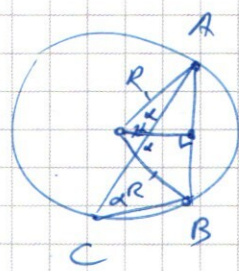
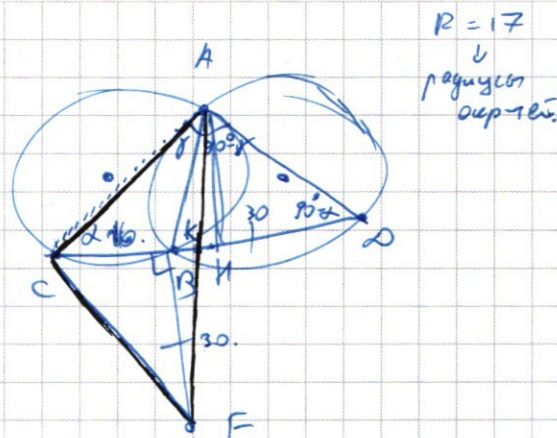
$$S_{\triangle ACB} = \frac{23 \cdot 16}{2} = 184$$

$$S_{\triangle ACF} = 240 + \frac{184}{2} + \frac{7 \cdot 23}{53 \cdot 2} \cdot 53 = 424 + 80.5 =$$

$$S_{\triangle ABK} = \frac{BK \cdot AM}{2} = \frac{7 \cdot 23}{53} \cdot \frac{23}{2}.$$

$$S_{\triangle BKF} = \frac{BF \cdot BK}{2} = \frac{7 \cdot 23}{53} \cdot \frac{30}{2}.$$

504.5



Задача 17.

у найбольшаго пошу будзе выконвацца няравенства:

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

при $x < 4$ $3^x < 3^{27}$; $93 < 3^{27}$

$$4 \cdot 3^{28} - 8x \cdot 3^{28} < 93 - 3^x - 3x$$

при $x \leq 4$ левая часть значительно больше.

при $x = 4$ $0 < 0$, что неверно.

т.о. $x \geq 5$.

рассмотрим, что будет с выражением при x больше:

$$4 \cdot 3^{28} - x \cdot 3^{28} < 93 - 3^x - 3x$$

$$(4-x) \cdot 3^{28} < 93 - 3^x - 3x$$

$$3^x - (x-4) \cdot 3^{28} < 93 - 3x$$

$$(x-4) \cdot 3^{28} - 3^x > 3x - 93$$

$x=5$ $3^{28} - 3^5 > 3x - 93$ - правда

$x=30$ $26 \cdot 3^{28} - 9 \cdot 3^{28} > 3 \cdot 30 - 93$ - правда.

$x=31$ $27 \cdot 3^{28} - 27 \cdot 3^{28} > 93 - 93$ - неверно.

в дальнейшем левая часть продолжит падать, а правая расти.
т.о. $5 \leq x \leq 30$

вернёмся к условию $y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

кол-во подходящих y
считаем так:

$$y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$$93 + 3(3^{27} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{28} =$$

$$= 93 + 3^{27}(x-4) - 3x - 3^x$$

надо просуммировать это выражение для x от 5 до 30,

сумма ариф. и геом. прогрессий: $\frac{3^{31} - 3^5}{2,1} = 3^{27} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^{27} - \frac{1}{2} \cdot 81$

$$N = 93 \cdot 26 + 3^{27} \cdot \frac{35 \cdot 26}{2} - 4 \cdot 3^{27} \cdot 26 - 3 \cdot \frac{35 \cdot 26}{2} - \frac{3^5 \cdot (3^{26} - 1)}{2} =$$

$$= 2418 + 455 \cdot 3^{27} - 104 \cdot 3^{27} - 1365 - \frac{1}{2} \cdot 3^{27} + \frac{81}{2} = 1012,5 + 1059,5 \cdot 3^{27}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4.
Сечение КСО:

$$\frac{NS}{OS} = \frac{4}{3}$$

(из соотн. подобия)
($k^2 = \frac{46}{9}$)

$$\frac{SO+R}{SO-R} = \frac{4}{3}$$

$$3(SO+R) = 4(SO-R)$$

$$3SO + 3R = 4SO - 4R$$

$$SO = 7R$$

$$\sin(\angle KSO) = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7} \quad \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$KS = \sqrt{7^2 R^2 - R^2} = \sqrt{48} R = 4\sqrt{3} R$$

$$SF = KS \cdot \cos(\angle KSO) = 4\sqrt{3} R \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{49}} =$$

~~$$\frac{SR}{KS} = \frac{KS}{SO}$$~~

$$KS = SO \cos \angle KSO$$

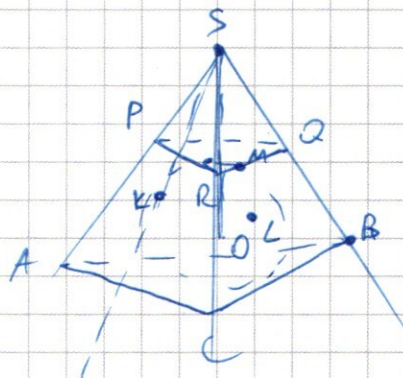
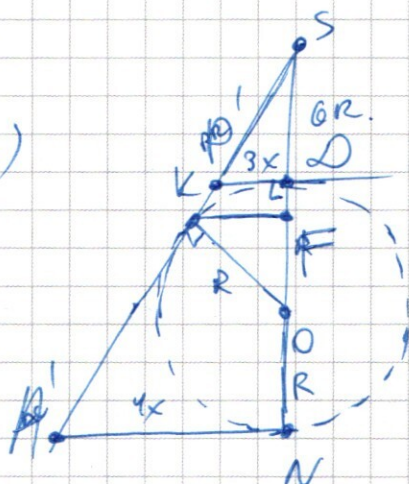
$$SF = KS \cos \angle KSO = SO \cdot \cos^2 \angle KSO = SO \left(1 - \frac{1}{49}\right) =$$

$$= SO \cdot \frac{48}{49} = 7R \cdot \frac{48}{49} = \frac{48}{7} R = 6\frac{6}{7} R$$

$$\frac{SF}{SO} = \frac{KF}{P'D} = \frac{\frac{48}{7} R}{6R} = \frac{8}{7}$$

$$S_{\text{сеч.}} = \left(\frac{KF}{P'D}\right)^2 \cdot S = \frac{64}{49} \cdot S = 11\frac{37}{49}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$; $S = 11\frac{37}{49}$



Задача №2:

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & 2 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & & 3 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 1 \\ & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 5 \\ & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 6 \\ & & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 7 \end{array}$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x + \cos 3x + \sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$\cos 3x (\cos 4x - \sin 4x + 1) + \sin 3x (\cos 4x - \sin 4x + 1) + \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$(1 + \operatorname{tg} 4x + \frac{1}{\cos 4x}) + \operatorname{tg} 3x (1 - \operatorname{tg} 4x + \frac{1}{\cos 4x}) + \sqrt{2} \frac{1}{\cos 3x} = 0.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x + \cos 4x = 0.$$



$$\sin(7x + \pi/4) + \cos(3x + \pi/4) + \cos 4x = 0.$$

$$\cos(3x + \pi/4) \cdot \sin 4x + \sin(3x + \pi/4) \cdot \cos 4x + \cos(3x + \pi/4) + \cos 4x = 0.$$

$$\cos(3x + \pi/4) (\sin 4x + 1) + (\sin(3x + \pi/4) + 1) \cos 4x = 0$$

$$\operatorname{tg}(3x + \pi/4) + \frac{1}{\cos(3x + \pi/4)}$$

$$\cos(3x + \pi/4) (1 + \sin 4x) = -\cos 4x (1 + \sin(3x + \pi/4))$$

$$\begin{array}{l} 3x + \pi/4 = 4x + 2\pi k \\ x = \pi/4 + 2\pi k \end{array}$$

$$3x + \pi/4 + 2\pi k = \pi - 4x$$

$$7x = 3/4\pi + 2\pi k$$

$$x = \frac{3}{28}\pi + \frac{2}{7}\pi k.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a.$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16.$$

$\swarrow B$ $x+y > -8$ $x+y > -8$ $2x = 0$ $x = 0$ $y = -8$ $y > -8-x$ y	$\downarrow A$ $x+y > -8$ $x-y < -8$ $2y = 16$ $y = 8$ $y = -8-x$ $y = x+8$	$\searrow C$ $x+y < -8$ $x-y > -8$ $-2y = 16$ $y = -8$ $x = -8$
--	---	--

$$|(x+8) + y| + |(x+8) - y| = 16.$$

$$y = 0. \quad 2|x+8| = 16.$$

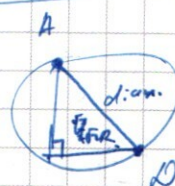
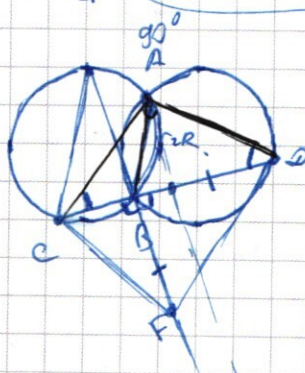
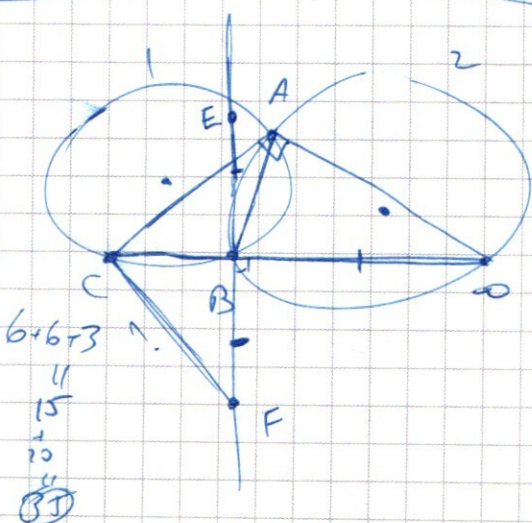
$$x = -16$$

$$-x - y - 8 = x + y - 8 = 16$$

$$\begin{aligned} x+y &< -8 \\ x-y &< -8 \\ -2x &= 0.32 \\ x &= -16 \end{aligned}$$

$$x+y$$

$$\begin{aligned} y &> x+8 \\ y &< -x-8 \\ x+y &< -8 \\ x+y &> -8 \\ x-y &< -8 \\ x+y &< -8 \end{aligned}$$



$$AB = 2 \sin \frac{45^\circ}{2} \cdot R.$$

$$AB = 2 \sin 22.5^\circ \cdot R$$

$$AB = 2 \sin 45^\circ \cdot R = \sqrt{2} R$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$\cos 7x = \cos(4x+3x) = \cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x \quad \boxed{\cos 3x} + \sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x \quad \boxed{\sin 3x} \quad \boxed{\sqrt{2} \cos 4x = 0}$$

$$\cos^4 x (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) + \sin^4 x (\cos 3x - \sin 3x) + \cos 3x - \sin 3x = 0$$

$$\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) - (\sin 4x + 1) (\cos 3x - \sin 3x) = 0$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x - 4y = 0$$

$$(y+2)^2 - 4 = 3(x-2)^2 + 12 - 2xy$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 12x - 4y = 0$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy)}$$

$$e^{\ln(-\frac{x^2}{y}) \cdot \ln(-y)} = e^{2\ln x \cdot \ln(xy)}$$

$$2(\ln x - \ln y) \ln(-y) = 2\ln x \cdot (\ln x + 2\ln(-y))$$

$$2\ln x \ln(-y) - \ln^2(-y) = 2\ln^2 x + 4\ln x \ln(-y)$$

$$2\ln^2 x - 3\ln x \ln(-y) + \ln^2 y = 0$$

$$(\ln y - 2\ln x)(\ln y - \ln x) = 0$$

$$\ln(-y) = 2\ln x$$

$$\ln(-y) = \ln x$$

$$-y = x^2$$

$$y = -x^2$$

$$-y = x$$

$$y = -x$$

$$x^4 + 2x(-x^2) - 3x^2 + 12x + 4(-x^2) = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$

$$x(x^3 - 2x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$\begin{array}{r} 8 - 8 - 14 + 12 \\ 1 - 2 - 7 + 12 \\ -1 - 2 + 7 + 12 \\ 27 - 18 - 21 + 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 - 8 - 14 + 12 \\ 1 - 2 - 7 + 12 \\ -1 - 2 + 7 + 12 \\ 27 - 18 - 21 + 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 - 8 - 14 + 12 \\ 1 - 2 - 7 + 12 \\ -1 - 2 + 7 + 12 \\ 27 - 18 - 21 + 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 - 8 - 14 + 12 \\ 1 - 2 - 7 + 12 \\ -1 - 2 + 7 + 12 \\ 27 - 18 - 21 + 12 \end{array}$$

$$39 \quad 39$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 7x + 12 \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline x^2 - 7x + 12 \end{array}$$

$$x^2 - 7x + 12$$

$$-x^2 + 3x$$

$$-4x + 12$$

$$-4x + 12$$

$$0$$

$$x(x-3)(x^2+x-4) = 0$$

$$x = 1 + 4i \in \mathbb{C}$$

$$y < 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{17+1-2\sqrt{17}}{4} =$$

$$9.5 - 0.5\sqrt{17}$$

$$15^2 = 150 + 75 =$$

$$225$$

$$225 + 64 = 289$$

$$17^2 = 170 + 49 + 70 =$$

$$y < 0! \quad 17^2 = 289 + 44 = 333$$

$$x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0$$

$$4x^2 - 12x + 4x^2 - 8x = 0$$

$$4x(x-2) = 0$$

$$(x-3)(x^2+x-4) =$$

$$= x^3 + x^2 - 4x - 3x^2 - 3x + 12 =$$

$$= x^3 - 2x^2 - 7x + 12$$

