МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$e^n = y \qquad \frac{\ln a}{\ln b} =$$

$$\frac{x^{7\ln(-y)}}{-y^{\ln(-y)}} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln(-y)}$$

$$e^n = a \quad \frac{n}{m}$$

$$e^m = b$$

$$-4x^2 - 4y^2 - 8xy \qquad \frac{\ln x}{\ln(-y)} =$$

$$\frac{x^{7\ln(-y)}}{x^{4(\ln(-y))}} = x^{2\ln x} \cdot (-y)^{\ln(-y)} \qquad = e^{\frac{n}{m}} =$$

$$x^{3\ln(-y)} = x^{2\ln x} \cdot (-y)^{\ln(-y)}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\left(\frac{x^3}{-y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln x}$$

$$-4x^2 + 12x - 9 + 9$$

$$-(2x - 3)^2$$

$$x^{3\ln(-y) - 2\ln x} = -y^{\ln(-y)}$$

$$y = -x^{\frac{3\ln(-y) - 2\ln x}{\ln(-y)}} =$$

$$= -x^{3 - 2\frac{\ln x}{\ln(-y)}}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

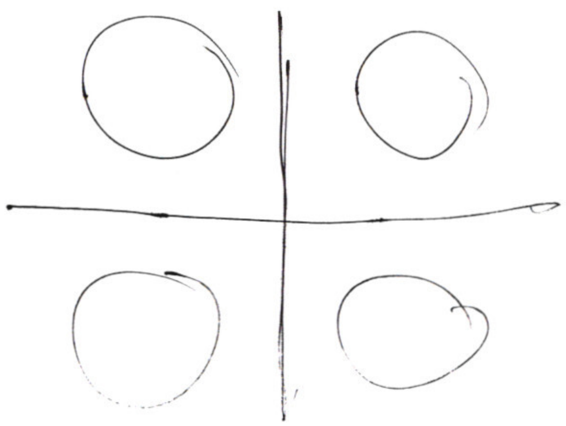
$$(y + x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0.$$

$$(y + x)^2 - (2x - 3)^2 + 9 + 4y = 0.$$

$$\begin{cases} y \in [-8; 8] \\ x = 0 \end{cases} \qquad 64 + (|y| - 15)^2 = a$$

$$= x$$

$$0 = x$$



$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16 \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

$$\cancel{x + y + 8 + x - y + 8 = 16}$$

$$2x + 16 = 16$$

$$2x + 16 = -16$$

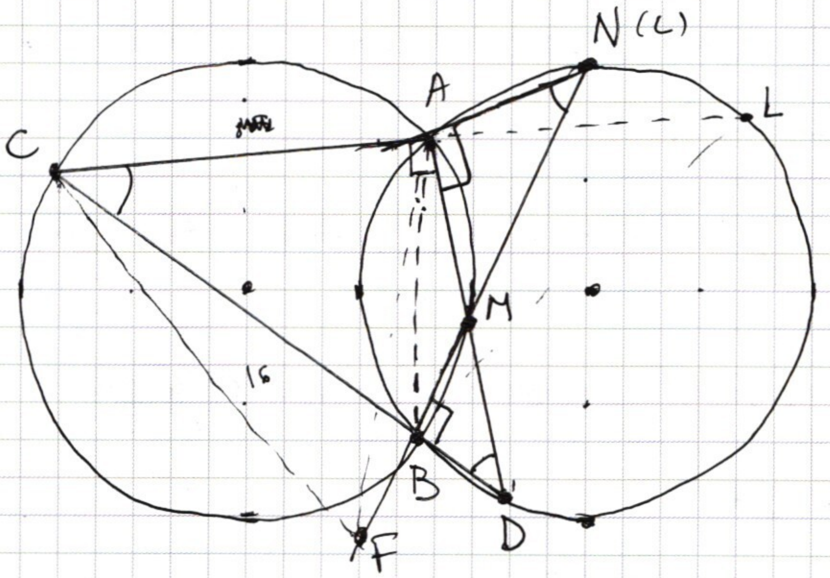
$$2y = 16$$

$$2y = -16$$

в нашем.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



Решение:

По т. синусов:

$$\frac{AB}{\sin\angle ACD} = \cancel{AB}\, 2R$$

$$\frac{AB}{\sin\angle AD\cancel{B}C} = 2R$$

$\Rightarrow$ $\sin\angle ACD = \sin\angle AD\cancel{B}C$

$\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ - \angle ACD$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle ACD\right) = \cos\angle ACD$

$\sin\angle ACD = \cos\angle ACD \Rightarrow \angle ACD = 45^\circ$ ~~$\Rightarrow \angle ADC$~~

$\angle ACD = 45^\circ$

$\angle ADC = 45^\circ$

$\Rightarrow AD = AC$

$DM \cdot AD = BD \cdot CD$

~~сдла~~ По т. Пифагора в $\triangle DAC$: $(AD = AC)$

$CD = \sqrt{2}\, AD$

$DM = \sqrt{2}\ BD$

Заметим, что:

$DM = \dfrac{BD}{\cos\angle ADC}$ $\Big| \Rightarrow \angle DBM = 90^\circ$

$BM = BD$

Аналогично: $CA \cdot CL = BC \cdot CD \Rightarrow CL = BC\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CBL = 90^\circ$.

$\angle CBN = 90^\circ$
$\angle CBL = 90^\circ$ $\Big| \Rightarrow$ ~~ДА~~ N и L – это одна точка.

$\angle AN\cancel{M} = \angle ANB$ (опирающиеся на одну дугу)

$BM = BD = BF$

$\triangle CBF$ прямоугольный

$CF^2 = CB^2 + \cancel{BM^2}\ BF^2$

$BF^2 = BM^2$

$CF^2 = CB^2 + BM^2$

~~CB и BM – хорды~~

$\angle CBM\ \cancel{\varnothing} = 90^\circ \Rightarrow$ он опирается на диаметр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow CB^2 + BM^2 = 4R^2$ – по теореме Пифагора $\triangle CBM$

$CF^2 = 4R^2 = 4 \cdot 17^2 = \cancel{4 \cdot 289 = 1156}$.

а) ~~Отв~~ $CF = 2 \cdot 17 = 34$

а Ответ: $CF = 34$

б) ~~По т. синусов~~

Дано:
$BC = 16$.
S_{ACF} – ?

По расширенной т. синусов:

$AB = 2R\sin 45^\circ = \sqrt{2}R$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{(34-16)(34+16)} =$

$= \sqrt{18 \cdot 50} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30.$

$\sin\angle BCF = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$

$\angle BCF = \arcsin\frac{15}{17}$

$\angle ACF = 45° + \arcsin\frac{15}{17}$

$AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{BD + CB}{\sqrt{2}} = \frac{30+16}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$

$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \sin\angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 34 \cdot \sin\left(45° + \arcsin\frac{15}{17}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{15}{17}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\arcsin\frac{15}{17}\right) + \sin\left(\arcsin\frac{15}{17}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{17} + \frac{15}{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \cancel{\frac{4\sqrt{2}}{17}} \frac{8}{17\sqrt{2}} + \frac{15}{17\sqrt{2}} = \frac{23}{17\sqrt{2}}$

$S_{ACF} = 23\cancel{\sqrt{2}} \cdot \cancel{17} \cdot \frac{23}{\cancel{17\sqrt{2}}} = 23^2 = 529.$

б) Ответ: ~~529~~. $S_{ACF} = 529.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0 \quad \Big| \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x + \cos 4x = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 7x = \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x = \cancel{\sin}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos 5x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\cos 5x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right) = \sqrt{2}\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\sqrt{2}\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2}\cos 5x(\cos 2x + \cancel{\cos}\sin 2x) + \cos^2 2x - \sin^2 2x = 0$$

$$\sqrt{2}\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x)(\sqrt{2}\cos 5x + \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{ll} \cos 2x + \sin 2x = 0 & (1) \\ \sqrt{2}\cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\cos 2x + \sin 2x = 0$

I) $\cos 2x = 0$

$\sin 2x + 0 = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$

$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ – основное тригонометр. тождество

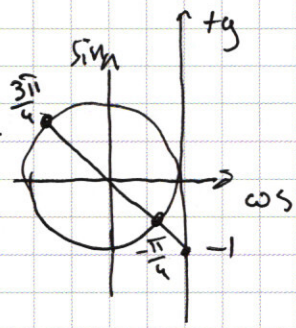
$0^2 + 0^2 \neq 0$ Противоречие $\Rightarrow$ $\cos 2x = 0$ – не корень.

II) $\cos 2x \neq 0$

$\sin 2x + \cos 2x = 0 \quad | : \cos 2x$

$tg\, 2x = -1$

$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$



$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

② $\sqrt{2}\cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

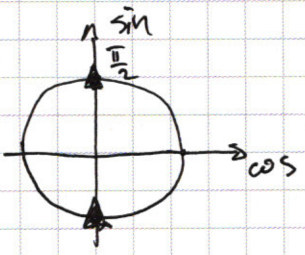
$\cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x = 0$

$\cos 5x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$2\cos\left(\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad (а) \\ \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad (б) \end{array}\right.$

а) $\cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$



$\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$

$\frac{7x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi m$

$7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$

$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7},$

б) $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{3x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi m$$

$$3x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7} \\ \cancel{x = \frac{5\pi}{6}} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3} \\ x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3} \\ x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \end{array}\right.$ $m, n \in \mathbb{Z}$

№5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

I) $\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases}$

$2x + 16 = 16$

$x = 0$

$\begin{cases} y+8 \geq 0 \\ 8-y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -8 \\ y \leq 8 \end{cases}$

II) $\begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \end{cases}$

$-2x - 16 = 16$

$2x = -32$

$x = -16$

$\begin{cases} y-8 \leq 0 \\ -y-8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 8 \\ y \geq -8 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y \in [-8;8] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -16 \\ y \in [-8;8] \end{cases}$$

I и II :

$$\begin{cases} y \in [-8;8] \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -16 \end{array}\right. \end{cases}$$

III :
$$\begin{cases} x + y + 8 \geq 0 \\ x - y + 8 \leq 0 \end{cases}$$

$2y = 16$

$y = 8$

$$\begin{cases} x + 16 \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -16 \end{cases}$$

$y = 8$

$x \in [-16;0]$

IV
$$\begin{cases} x + y + 8 \leq 0 \\ x - y + 8 \geq 0 \end{cases}$$

$-2y = 16$

$y = -8$

$\cancel{x \geq 0}$

$\cancel{x + 16}$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -16 \end{cases}$$

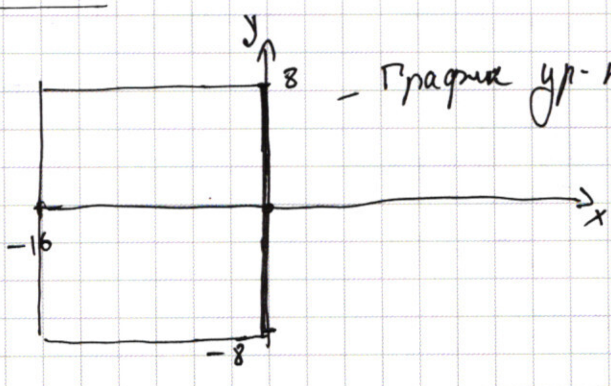
$y = -8$

$x \in [-16;0]$

III и IV :

$$\left[\begin{array}{l} x \in [-16:0] \\ y = \pm 8 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \in [-8;8] \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -16 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [-16;0] \\ y = \pm 8 \end{cases} \end{array}\right.$$



— График ур-ния 1.

Пусть $AC = x$, тогда по т. косинусов $\triangle ACB$:

$AB^2 = x^2 + BC^2 - 2BC\cdot x\cdot \cos 45^\circ$

$AB^2 = 2\cdot 17^2 = 2\cdot 289 = 578$

$578 = x^2 + 256 - 32x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x^2 - 16\sqrt{2}x - 322 = 0$

$\frac{D}{4} = 128 + 322 = 450$

$x_{1,2} = 8\sqrt{2} \pm \sqrt{450} = 8\sqrt{2} \pm 15\sqrt{2}$

$x > 0$

$x = 23\sqrt{2}.$

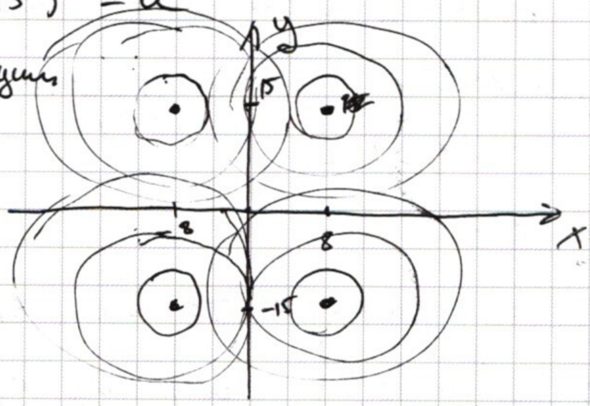
S

3

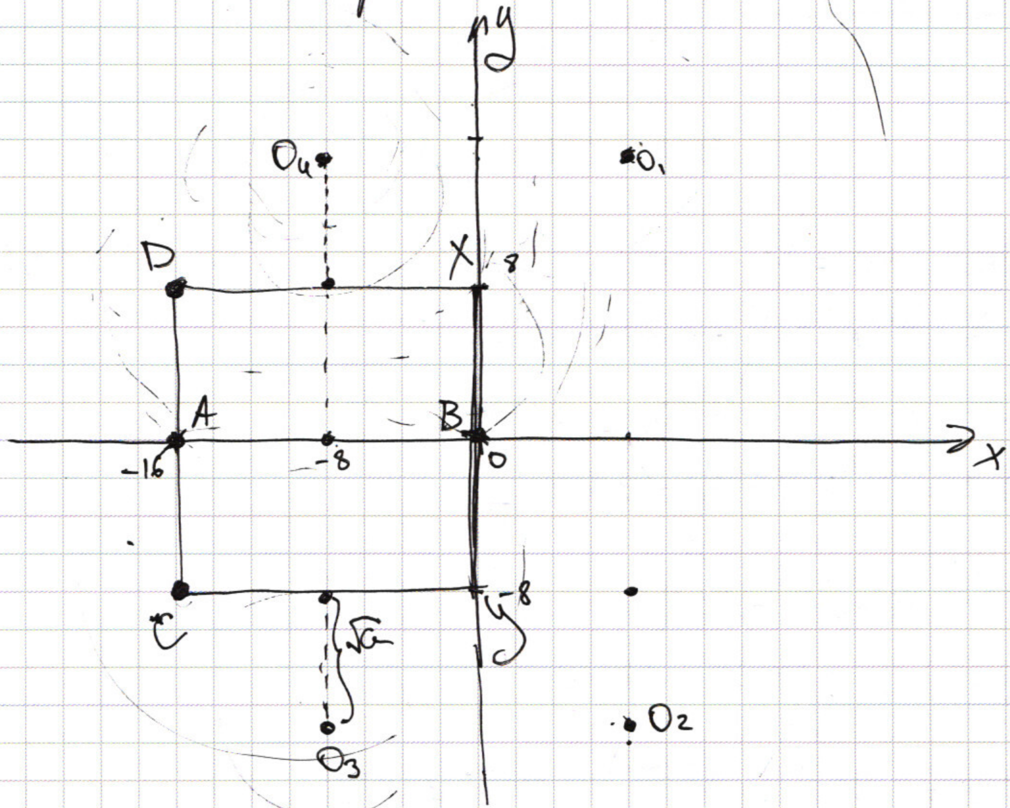
№ 5 (Продолжение:)

② $(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$

График данной функции представляет собой 4 окружности, радиусы $\sqrt{a}$ и с центрами $(8;15)$ $(-8;-15)$ $(-8;15)$ $(8;-15)$



Совместим 2 графика



Можно заметить, что окр O_4 пересекает график(1) либо ~~в~~ в 1 точке, либо в 2 точках, либо в 3-х, либо не пересекает, а окружность O_3, зеркальна O_4 и пересекает график ~~3~~ в стольких же точках, что и O_4.

Чтобы было 2 решения, нужно, чтобы O_4 и O_3 ~~на~~ пересекали ~~окр~~ график (1) в 1 точке.

$\sqrt{a} = 15 - 8 = 7$

$a = 49$

Если же окружность O_4 пересекает график в точках A и B, то окр O_3 пересекает график также в A и B, тогда $R = O_4B = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$, но тогда окр O_1 и O_2 также пересекают график, значит $\sqrt{a} \neq 17 \Rightarrow a \neq 289$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что окр O_1 и O_2 тоже зеркальны и пересекают график в равных кол-вах точек.

Если ~~окр~~ ~~O_1~~ O_1 касается пересекает гр (1) в т. C, то $R = \sqrt{23^2+24^2} = \sqrt{476+429} = \sqrt{905}$

$a = 905$.

$O_4C < O_1C \Rightarrow$ окр O_4 и O_3 не пересекают гр.(1) ~~⇔~~ а окр O_2 пересекает гр (1) в т. D (Если

$$\left[\begin{array}{l} a = 49 \\ a = 905. \end{array}\right.$$

~~Ответ: $\left[\begin{array}{l} a = 49 \\ a = 905 \end{array}\right.$~~

Если окр O_1 пересекает гр (1) в т. X, то O_4 ~~тоже~~ $\wedge$ гр (1)

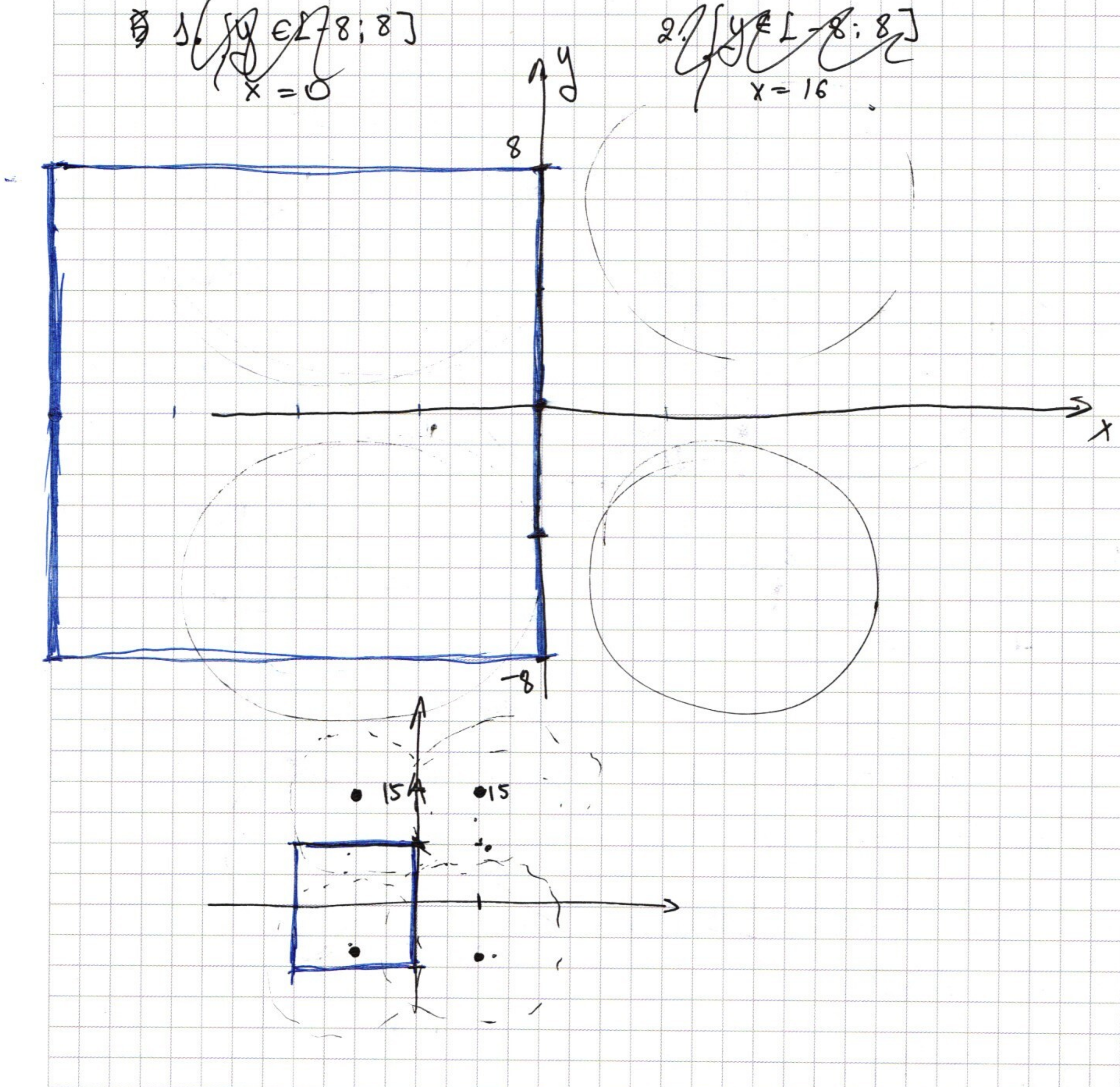
Ответ: $\left[\begin{array}{l} a = 49 \\ a = 905. \end{array}\right.$

N 1

$64827 = 3^3 \cdot 7^4$

Чтобы ~~число~~ ~~даш~~ произв. 8 цифр делилось на 64827, нужно, чтобы в числе было минимум 4 семерки, а остальные числа были либо 333, либо ~~666~~ 336 либо 366, ~~336~~ или 666. или 93, 96, 99.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\alpha+\beta=90^\circ$

$\angle CAD=90^\circ.$

$\dfrac{\sin\alpha}{AD}=\dfrac{\sin\beta}{AD}$

AB знаем по т. синусов.

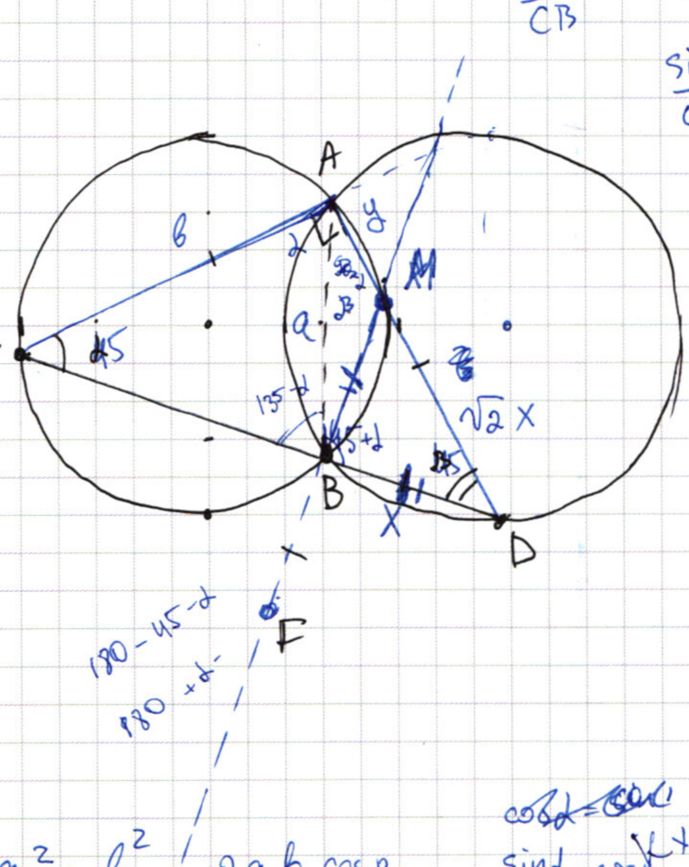
$\sin\alpha=\cos\alpha \Rightarrow \alpha=\beta=45^\circ.$

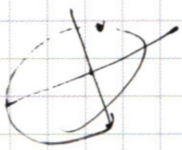
$CB^2+BD-?$

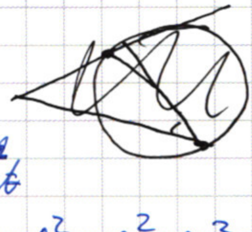
$x\cdot b\sqrt{2}=\sqrt{2}x\,\cancel{y}$

$\dfrac{\sin\alpha}{CB}=\dfrac{\cos\alpha}{BD}$

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{CB}{BD}$





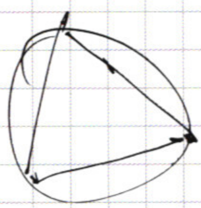


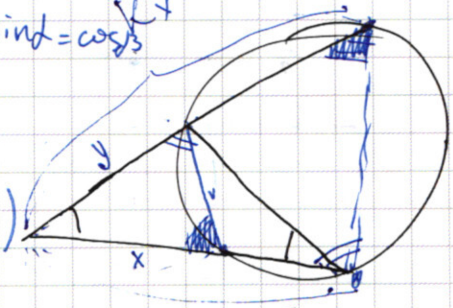
$4R^2-b^2=b^2+2x^2-2\sqrt{2}bx$

$2b^2$

$180-45-\alpha$

$180+\alpha$





$\cancel{\cos\alpha=\cos\alpha}$

$\sin\alpha=\cos\beta$

$BD^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta$

$CB^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

$CF^2=2a^2+2b^2-2ab(\cos\alpha+\sin\alpha)$

$BC+BD=\sqrt{2}\,b$

$\cancel{AM^2+AC^2=4R^2}$

$AM=\sqrt{4R^2-b^2}$

$\sqrt{4R^2-b^2}=b-\sqrt{2}x$

$AM^2+b^2=4R^2$

$(b-AM)\cdot b=BD\cdot CD$

$b-AM=\sqrt{2}BD$

$(b-AM)b=BD\cdot\sqrt{2}\,b$

$AM=b-\sqrt{2}BD$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$429 + 476 = 905$

$16 + 8$

$15 + 8$

N 6

BD ·

$24^2 = 25^2 + 1 - 50 =$
$= 226 - 50 =$

~~CM·NB~~

$NM \cdot NB =$

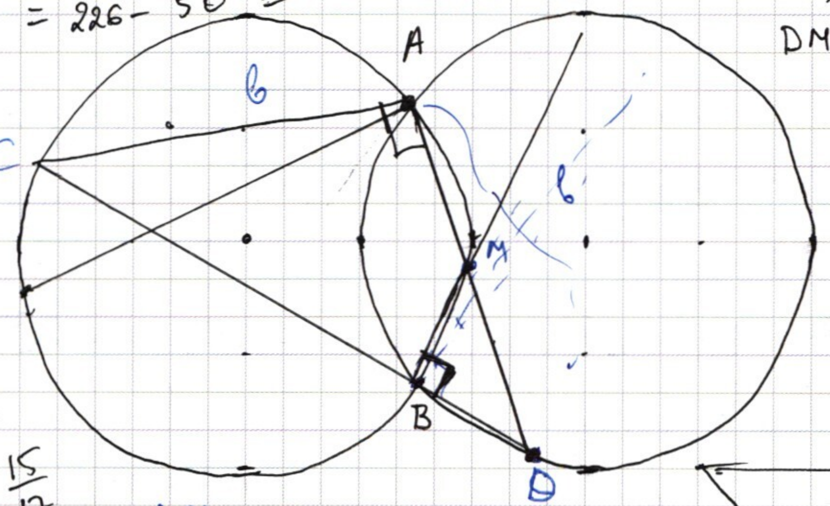
$BD = x$

$DM = \sqrt{2}\, x$

$BN = CB$

~~226~~

$526 - 50 = 476$



$\sin \angle BCF =$
$= \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$

~~AM~~

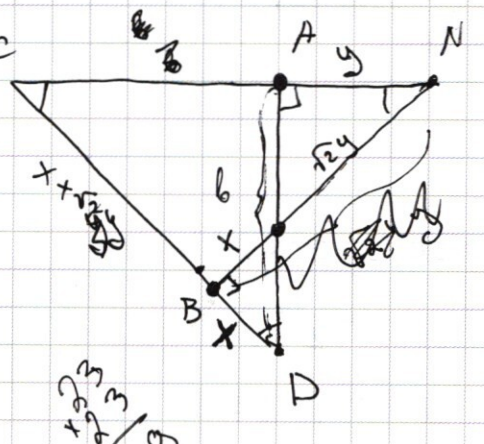
$DM \cdot b = BD \cdot \sqrt{2}\, b$

$DM = \sqrt{2}\, BD$

$477 - 48 = 429$

$AC \cdot CL = CB \cdot$

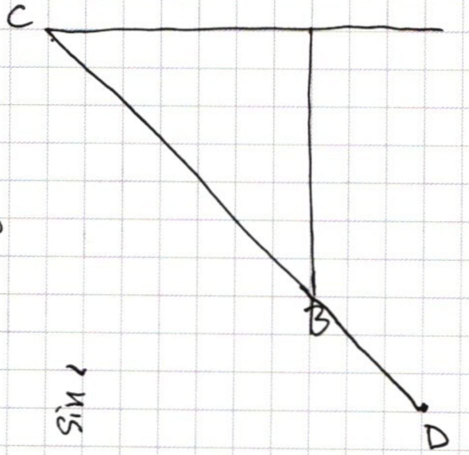
$CL \cdot AC = \sqrt{2}\, AC \cdot$



$23 \cdot 23 = 69 + 46 = 529$

$\frac{34}{1}\,\frac{6}{8}$

sin



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

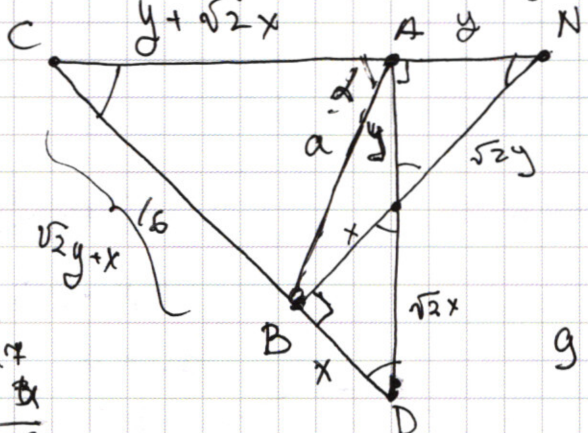
$\sin\alpha$

$16^2 =$ $\cancel{29}$

$64827 =$

$\begin{array}{r} 289 \\ \times\ 2 \\ \hline 578 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 322 \\ +128 \\ \hline 450 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 578 \\ -256 \\ \hline 322 \end{array}$

$(8\sqrt{2})^2 = 64\cdot 2$



$\begin{array}{r|l} 64827 & 27 \\ -54 & 2401 \\ 108 & \\ -108 & \\ 27 & \end{array}$

$\cancel{y+\sqrt{2}x}$

$\sqrt{2}y + 2x = \sqrt{2}(y+\sqrt{2}x)$

$2401 \mid 7$, 3

$AB^2 = (y+\sqrt{2}x)^2 + (\sqrt{2}y+x)^2 - \sqrt{2}(y+\sqrt{2}x)(\sqrt{2}y+x) =$

$= y^2 + 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + x^2 + 2\sqrt{2}xy - \sqrt{2}(\sqrt{2}y^2 + 2xy + xy + \sqrt{2}x^2) =$

$= 3y^2 + 3x^2 + 4\sqrt{2}xy - 2y^2 - 2\sqrt{2}xy - \sqrt{2}xy - 2x^2 =$

$= y^2 + x^2 + \sqrt{2}xy$

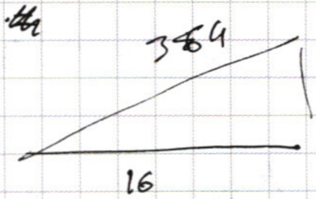
$x^2 + \sqrt{2}xy + y^2 = AB^2$

$BC = 16$

$AC = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$

$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R \qquad AB = \sqrt{2}R$

$x^2 + \sqrt{2}xy + y^2 = 2R^2$



$450 \mid 2$, 225

$BF = BM = BD$

$(20-3)^2 = 400 + 9 - 120 = 409 - 120 = 289$

$\begin{array}{r} 289 \\ \times\ 4 \\ \hline 1156 \end{array}$

$\sin$

$2401 \mid 7$

$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 49 \\ \hline \end{array}$

$\sin ACN =$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

$y\in[-8;8]$

$x=0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\cos 5x\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos 4x=0$

$2\cos 5x\left(\frac{1}{\sqrt2}\cos 2x+\frac{1}{\sqrt2}\sin 2x\right)+\cos 4x=0$

$\sqrt2\cos 5x(\cos 2x+\sin 2x)+\cos 4x=0$

$\sqrt2\cos 5x(\cos 2x+\sin 2x)+(\cos 2x+\sin 2x)-$

$64827=3^3\cdot7^4$

Число:

3 6 9

$\cos 5x+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0.$

$=2\cos\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=$

$=$

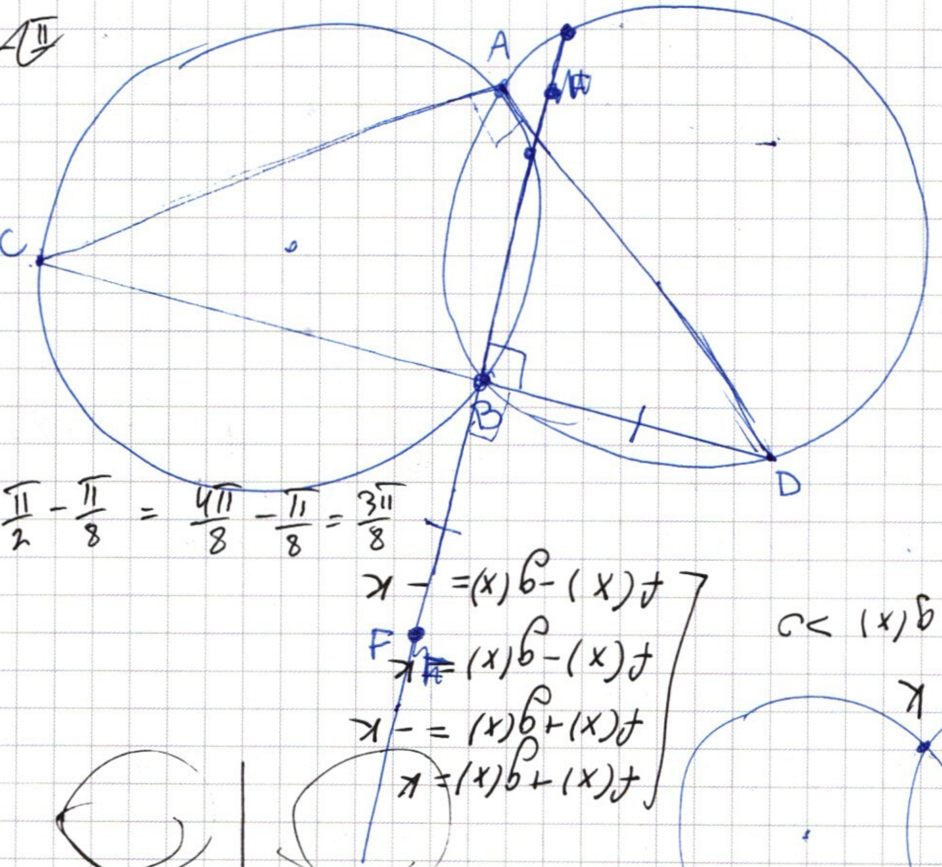
$\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{}$

$\angle CAD=90^\circ$

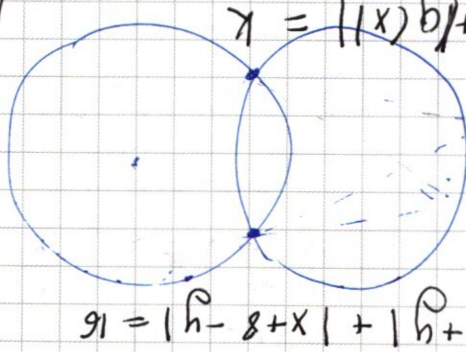
$BF=BD$

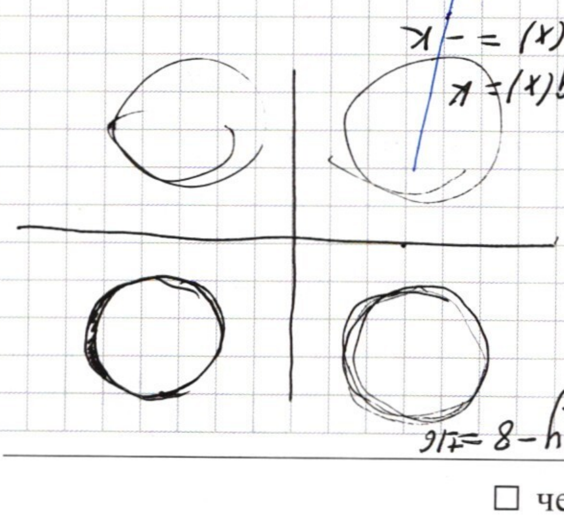
$CF-?$

$CD=\sqrt{C}$



$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{4\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}$

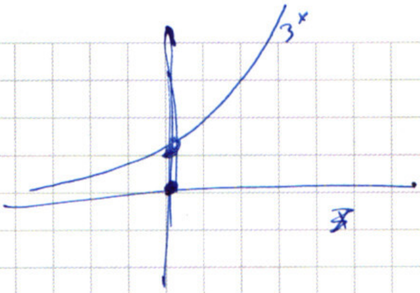




☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

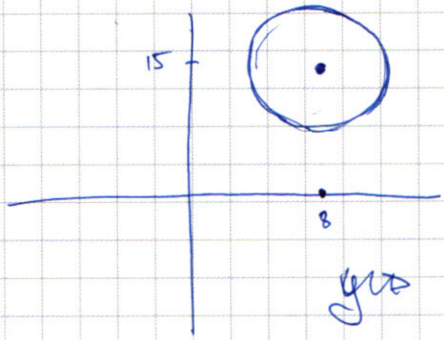
$$\begin{cases} |x+y+8|+|x-y+8|=16 \\ (|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a \end{cases}$$



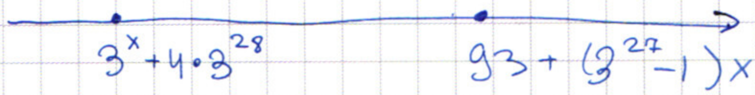
$|f(x)|+|g(x)|=a$

$|y+8|+|8-y|=16$

$(x-8)^2+(y-15)^2=a$



$$\begin{cases} y>3^x+4\cdot3^{28} \\ y\le 93+(3^{27}-1)x \end{cases}$$



$93+(3^{27}-1)x>3^x+4\cdot3^{28}$

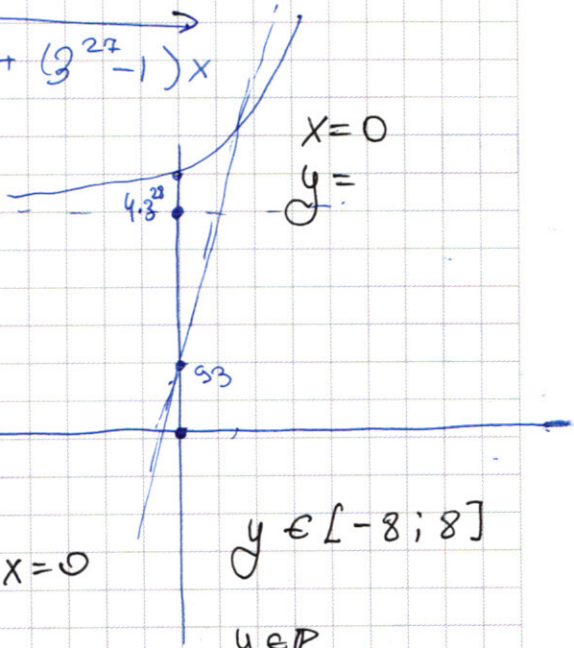
$93+3^{27}x-x>3^x+4\cdot3^{28}$

$(3^{27}-1)x-3^x>4\cdot3^{28}-93$

$(3^{27}-1)x-3^x>3(4\cdot3^{27}-31)$

$(t-1)x-3^x>3\cdot(4t-31)$

$3^x>(t-1)x-3(4t-31)$



$x=0$

$y=$

$y\in[-8;8]$

$x=0$

$y\in R$

$\cos7x+\cos3x+\sin7x-\sin3x+\sqrt2\cos4x=0$

$\cos(3x+4x)+\sin(3x+4x)=\cos3x\cdot\cos4x-\sin3x\cdot\sin4x$

$|y+8|+|8-y|=16$

$y\in[-8;8]$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cancel{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\alpha\cos}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\end{cases}$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cdot\cos\beta$

$\dfrac{7x - \frac{\pi}{4} - 3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{4x - \frac{\pi}{2}}{2} = 2x - \frac{\pi}{4}$

$\cos 7x + \cos 3x = 2\cos 5x\cdot\cos 2x$

$\sin 7x - \sin 3x = 2\sin 2x\cdot\cos 5x$

$\cancel{2\cos 5x\cdot\sin 2x =}$

$2\cos 5x\cdot\cos 2x + 2\cos 5x\cdot\sin 2x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cancel{2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}\cos 4x = 0}$

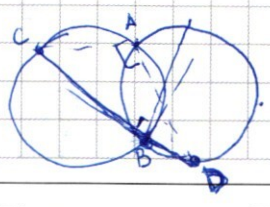
$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x + \cos 4x = 0 \quad \times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0}$$

$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos 5x\cdot\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$2\cos 5x\cdot\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$

$\cos 4x = \cos(5x - x) = \cos 5x\cdot\cos x + \sin 5x\cdot\sin x$



☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$a^{\log_a b} = b$

$b^{\log_a b} = ???$

$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$

$(y+x)^2 - 4(x^2 + 3x + y) = 0$

$4(x^2+3x+y) = 4(x^2 + 4x^2 + 4 + y - 4) = 4(x+2)^2 + 4y - 16$

$\ln(xy^2) = \ln x + \ln y$

$\cancel{x^2}$

$\left(-\dfrac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$

1) $-y > 0$

$x > 0$

$e^n = -y$

$\cancel{-(x^{7\ln(-y)})}$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27}-1)x \end{cases}$$

y $\cos 5x + \frac{1}{\sqrt2}\cos 2x - \frac{1}{\sqrt2}\sin 2x = 0.$

$\cos 5x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

2

$\dfrac{x^{7\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2\ln(xy^2)}$

$\dfrac{x^{7\ln(-y)}}{x^{2\ln(xy^2)}} = (-y)^{\ln(-y)}$

$\dfrac{x^{7\ln(-y)}}{-y^{(\ln -y)}} = x^{2(\ln x + \ln y^2)} = x^{2(\ln x + 2\ln|y|)} = x^{2(\ln x + 2\ln(-y))}$

$x^{7\ln(-y)} = x^{2\ln x}\cdot x^{4\ln(-y)}\cdot(-y)^{\ln(-y)} = x^{2\ln x}\cdot(-xy)^{\ln(-y)}$

$\dfrac{x^{7\ln(-y)}}{x^{2\ln x}} = (-xy)^{\ln(-y)}$

$x^{7\ln(-y) - 2\ln x} = (-xy)^{\ln(-y)}$

$\dfrac{x^{7\ln(-y) - 2\ln x}}{x^{\ln(-y)}} = y^{\ln(-y)}$

$x^{6\ln(-y) - 2\ln x} = y^{\ln(-y)}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)