

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $64827 = 3^3 \cdot 7^4$ П.к. на всех 8-и позициях должны быть цифры, возможно 2 случая:
I четыре "7", три "3", одна "1"

$$C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot 1 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{3!1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$$

- II четыре "7", две "1", одна "9", одна "3"

$$C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot 1 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 840$$

Всего: $280 + 840 = 1120$

Ответ: 1120

3. $\begin{cases} (1 - \frac{x^2}{y})^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$

$\begin{matrix} -y > 0 & y < 0 \\ xy^2 > 0 & x > 0 \end{matrix}$ $-\frac{x^2}{y} > 0$

Реш. I ур-ие:

$$(1 - \frac{x^2}{y})^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \quad | \ln(), \text{ т.к обе части } > 0$$

$$\ln(1 - \frac{x^2}{y}) \cdot \ln(-y) = \ln(x^2) \cdot \ln(xy^2)$$

$$\ln(-y) \cdot (\ln(x^2) - \ln(1 - \frac{x^2}{y})) = 2 \ln(x) \cdot (\ln(x) + \ln(y^2))$$

$$\ln(-y) \cdot (2 \ln(x) - \ln(1 - \frac{x^2}{y})) = 2 \ln(x) \cdot (\ln(x) + 2 \ln(-y))$$

$$\ln(x) = u \quad \ln(-y) = v$$

$$v(2u - v) = 2u(u + 2v)$$

$$2u^2 - 3vu + v^2 = 0$$

$$(u - v)(2u - v) = 0$$

$$\begin{cases} u = v \\ 2u = v \end{cases}$$

$$35x - \frac{\pi}{8}$$

$$2x + 1,5x$$

$$\begin{cases} \ln(x) = \ln(-y) \\ 2\ln(x) = \ln(-y) \end{cases}$$

Всп. к системе:

$$\begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \end{cases}$$

$$I \begin{cases} -y = x \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ y^2 - 4y^2 - 3y^2 - 12y + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ -y(6y + 8) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ y = 0 \text{ не подх.} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$II \begin{cases} y = -x^2 \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0 \end{cases}$$

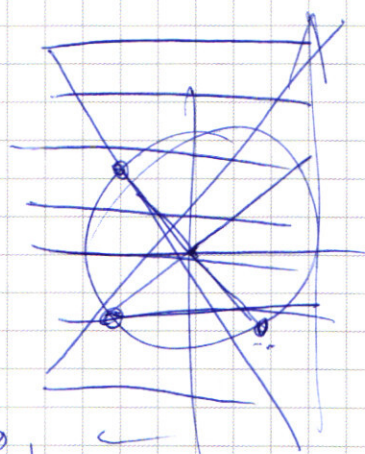
$$\begin{cases} y = -x^2 \\ x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ x(x^3 - 2x^2 - 7x + 12) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ x(x-3)(x^2+x-4) = 0 \end{cases}$$

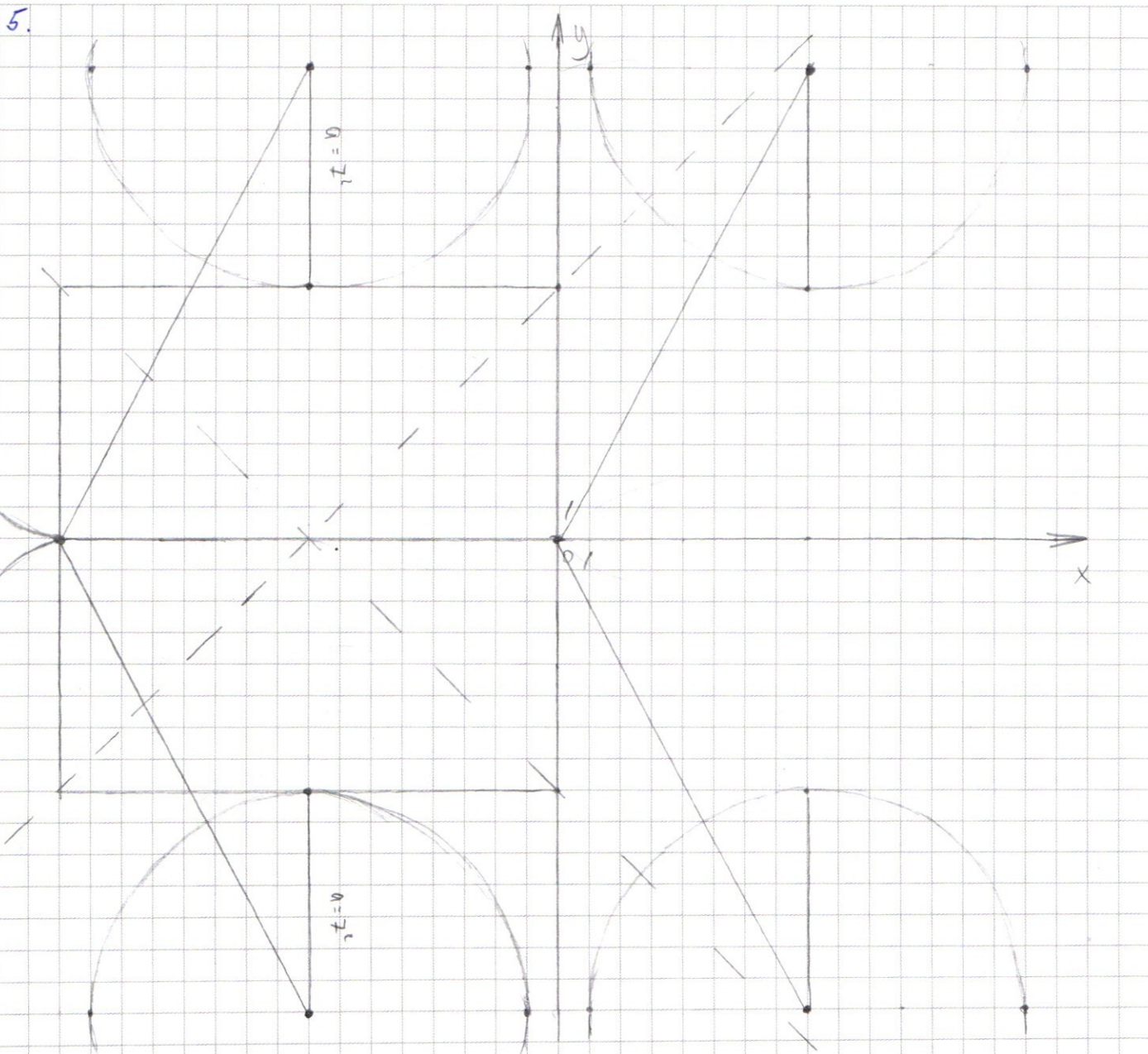
$$\begin{cases} y = -x^2 \\ x = 0 \text{ не подх.} \\ x = 3 \\ x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \text{ не подх.} \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -9 \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \end{cases}$$



Ответ: $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $(3, -9)$, $(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}-9}{2})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\begin{cases} |x+4+8| + |x-6+8| = 16 & \text{— квадрат с вершинами в т. } (10; 8), \\ & (10; -8), (-16; 8), (-16; -8) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & \text{— четыре окружности с ц. в т. } (8; 15), (18; -15), \\ & (-8; 15), (-8; -15), \text{ каждая в своей четверти} \\ & \text{с радиусами } \sqrt{a} \end{cases}$

Два решения может быть только, когда радиусы
 окружностей 7, т.е. $a = 49$ ($a < 49$ — 0 корней, $a > 49$ — больше корней)

Задание: 49

$$2. \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos(2x) \cos 5x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = -\sin 2x & (1) \\ \cos 5x = -\cos(2x + \frac{\pi}{4}) & (2) \end{cases}$$

Реш. (1)

$$\cos 2x = -\sin 2x : \cos 2x \neq 0$$

$$\operatorname{tg} 2x = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Реш. (2)

$$\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x (\cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}) - \sin 2x (\sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

$$2 \cos 2x \cos \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} - 2 \sin 2x \sin \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$2 \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot (\cos(2x + \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2})) = 0$$

Задание: $-\frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z};$

$$x = \frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \cos(2x + \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2x + \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{\pi n}{7} \cdot \frac{2}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 3} \\ 6 \\ \underline{-4} \\ 3 \\ \underline{-1} \\ 18 \\ \underline{-18} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21609 \overline{) 3} \\ 21 \\ \underline{-21} \\ 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \overline{) 3} \\ 6 \\ \underline{-12} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 3} \\ 21 \\ \underline{-21} \\ 30 \\ \underline{-21} \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \\ \underline{-28} \\ 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \overline{) 7} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 21 \\ \underline{-21} \\ 343 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 7} \\ 1680 \\ \underline{-1680} \\ 720 \\ \underline{-720} \\ 0 \end{array}$$

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$3^3 = 27$$

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$I \quad 3 \times 3 \quad 4 \times 7 \quad 1 \times 1$$

$$A_3^3 \cdot A_4^4 \cdot A_1^1 = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$II \quad 9 \quad 3 \quad 4 \times 7 \quad 2 \times 1$$

$$A_n^k \quad A_3^4 \cdot A_4^2 \cdot A_2^1 \cdot 1$$

$$2) \quad \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x + \cos 3x - \sin 3x + \sin 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x$$

$$\cos 3x (\cos 4x + 1) - \sin 3x (\sin 4x + 1)$$

$$\cos 3x (\cos 4x + \sin 4x + 1) - \sin 3x (\sin 4x + 1) = \cos 4x$$

$$- \sin(3x) (\sin 4x + 1) + \cos 3x (\sin 4x + 1)$$

$$(\cos 3x - \sin 3x) (\sin 4x + 1) + \cos 4x (\cos 3x + \sin 3x)$$

$$\frac{8!}{4!} \cdot \frac{4!}{1!} \cdot 1$$

$$A_8^4 \cdot A_4^3 \cdot A_1^1$$

$$\cos 7x + \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x (\cos 4x + \sin 4x + 1) + \sin 3x (-\sin 4x + \cos 4x - 1) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 4x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) = \frac{1}{2} (\cos(4x - \frac{\pi}{4}) + \cos(4x + \frac{\pi}{4}))$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = x \quad \cos 3x = y \quad \sin 4x = u \quad \sin 3x = v$$

$$xy - uv + uy + xv + y - v + \sqrt{2}x = 0$$

$$-v(u+1) + y(u+1)$$

$$(y-v)(u+1) + x(y+v+\sqrt{2}) = 0$$

$$\sin 3x + \sqrt{2} = \sin 3x + 2 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{matrix} C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \\ C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \\ C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \\ C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \\ C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} (-\frac{x}{y})^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\ln(-\frac{x}{y}) \cdot \ln(-y) = \ln(x^2) \cdot \ln(xy^2)$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$y^2 + (12x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D = (12x+4)^2 - 4(-3x^2+12x) = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x = 16x^2 - 32x + 16$$

$$= -8x^2 + 64x + 16 = -8(x^2 - 8x - 2)$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$-\sin 3x (\sin 4x + 1) + \cos 3x (\sin 4x + 1)$$

$$(\cos 3x - \sin 3x)(\sin 4x + 1) + \cos 4x (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) = 0$$

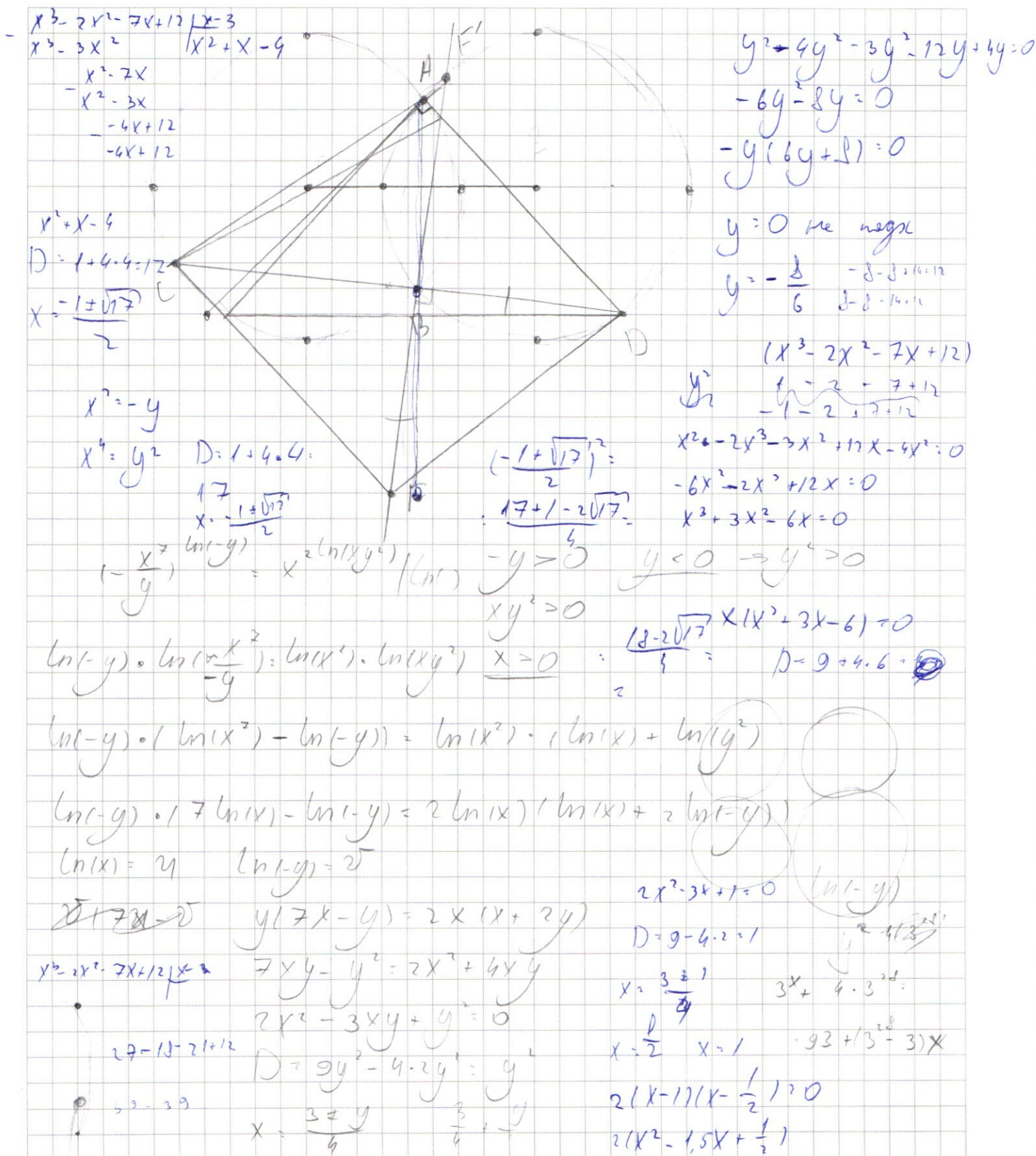
$$\sqrt{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 4x = \sin^2 4x + \cos^2 4x$$

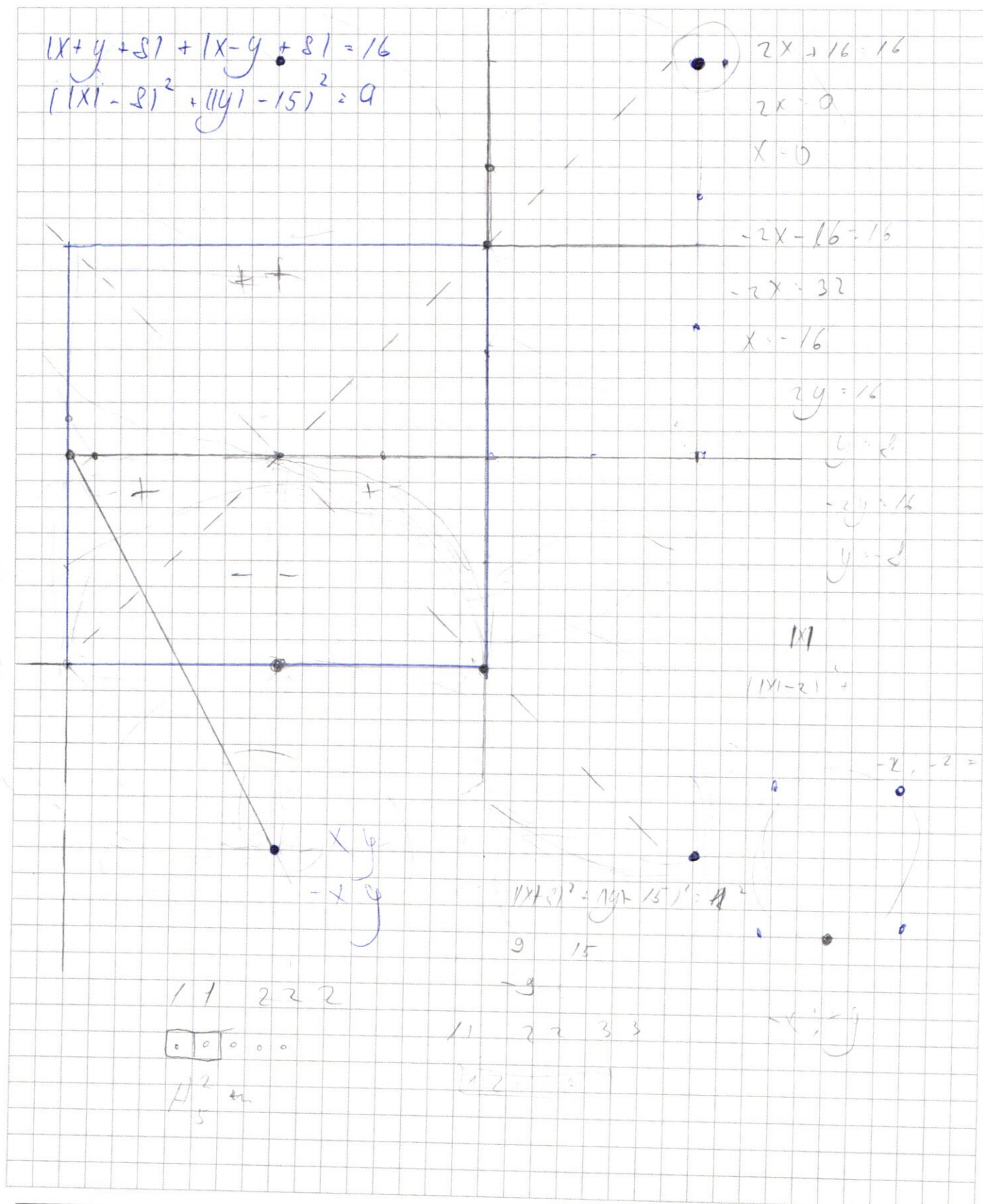
$$\sin 3x + \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 2x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \cos \frac{\pi}{4} \cos 4x$$

$$\frac{1}{2} (\cos(\frac{4x - \pi}{4}) + \cos(\frac{4x + \pi}{4})) = 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

3

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(x \cdot y^2)}$$

$$-y > 0$$

$$y < 0$$

$$x y^2 > 0$$

$$x > 0$$

$$\ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) \cdot \ln(-y) = \ln(x^2) \cdot \ln(x y^2)$$

$$(\ln(-x^7) - \ln y) \cdot \ln(-y) = (\ln x + \ln x) (\ln x + \ln y^2)$$

$$y^2 - 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$-3x^2 + (12 + y)x + y^2 + 4y = 0$$

$$0 = (12 + y)^2 + 4 \cdot 3(y^2 + 4y) = 144 + 24y + y^2 + 12y^2 + 48y = 13y^2 + 72y + 144$$

