

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

Разложим 64827 на множители:

$$64827 = 3 \cdot 21609 = 9 \cdot 7203 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2401 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 343$$

343 - простое число, которое не может быть представлено в виде произведения чисел от 0 до 9, а цифра восьмизначного числа не может равняться 343 $\Rightarrow$ восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 64827 не существует. Ответ: 0

N5.

$$1) \begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (|x|-8)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

2) график (2) является представлением 4 окружностей с радиусом $\sqrt{a}$

3) найдем, чем будет график (1)

Модули могут раскрыться 4 способами:

$$1) + + ,$$

$$2) + - ,$$

$$3) - + ,$$

$$\text{тогда } x+y+8+x-y+8=16 \Rightarrow x=0$$

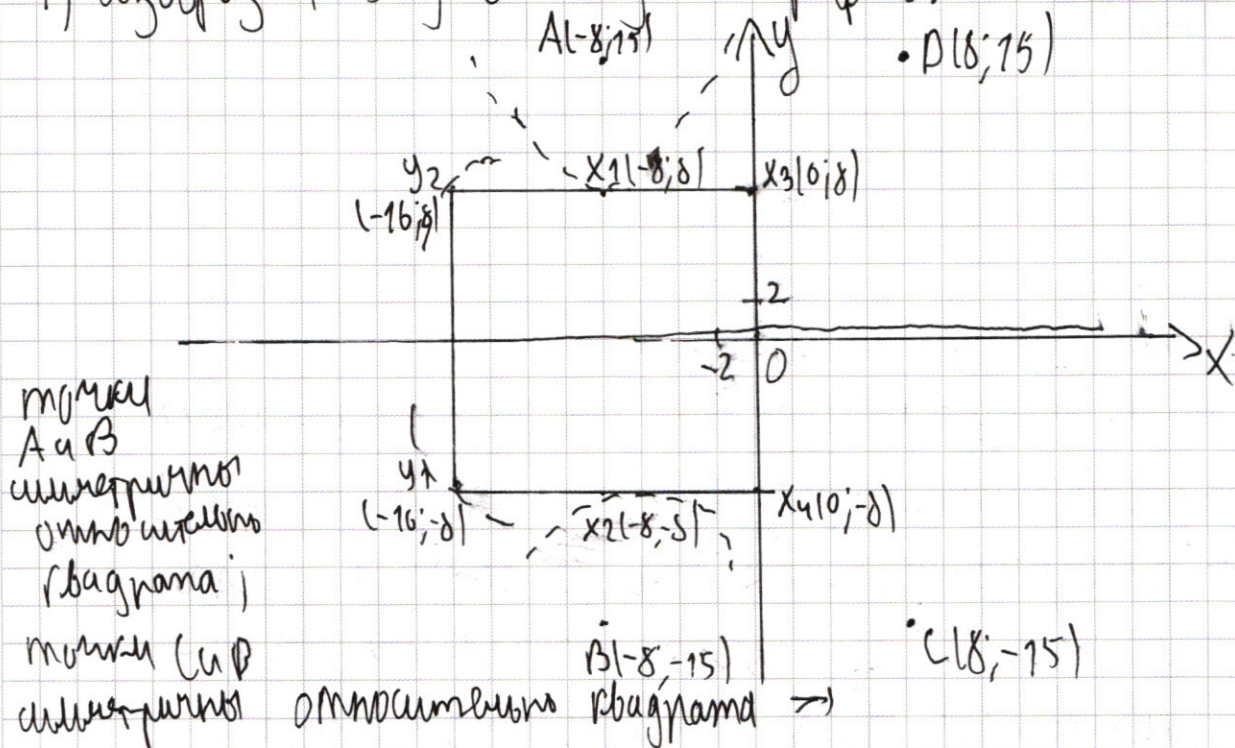
$$\text{тогда } x+y+8-x-y-8=16 \Rightarrow y=8$$

$$\text{тогда } -x-y-8+x-y+8=16 \Rightarrow y=-8$$

$$4) - - , \text{ тогда}$$

$$-x-y-8-x-y-8=16 \Rightarrow x=-16. \text{ Получим квадрат со стороной 16}$$

1) изобразим эту систему на графике.



→ Если будет точка касания, пересечения одной окружности с квадратом, то будет и другая.

Т.к. нужно два решения, то ищем точки касания.

а) найдем минимальное расстояние от центров до квадрата

$$AX_1 = BX_2 = 7; \quad X_3D = X_4C = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{113}$$

$AX_1 < X_3D \Rightarrow$ при $a = 7^2 = 49$ будет только две точки касания: X_1 и $X_2 \Rightarrow$ подходит

Проверим, будет ли окружность с центром в A и центром в B пересекать квадрат при радиусе $\sqrt{113}$

Граничные точки, когда пересекают y_2 для B и y_1 для A) будет при $r_{max} = \sqrt{8^2 + 23^2} > X_3D \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $a = (\sqrt{113})^2 = 113$ точек пересечения будет больше, чем 2. $\Rightarrow$ не подходит

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) Проверим, когда будет крайний случай пересечения
окр. с центрами в D и C квадрата $\Gamma_{\max} = C_2 = D_2$

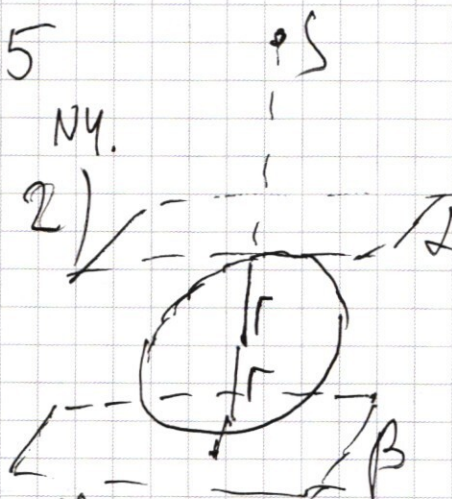
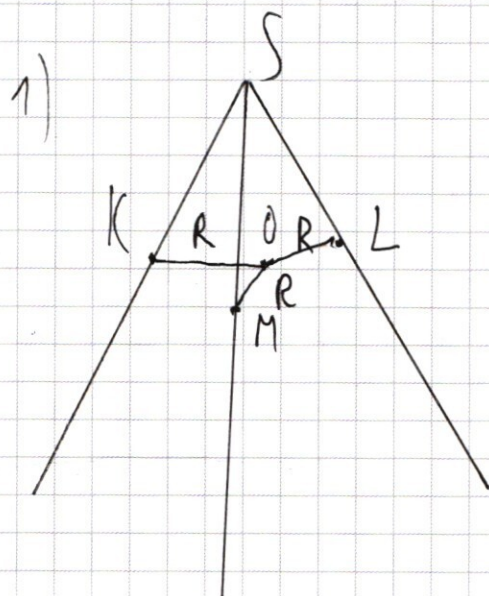
$$\Gamma_{\max} = \sqrt{24^2 + 23^2} > \Gamma_1 \text{ max} \rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $a \in (\Gamma_1 \text{ max}; \Gamma_2 \text{ max})$ пересечений будет больше,
чем 2 (окружности с центрами в E и D пересекут по 2 раза).

при $a = (\Gamma_2 \text{ max})^2 = 24^2 + 23^2 = 1105$ у функций (1) и (2)
будут две точки пересечения: Y_2 и $Y_1 \Rightarrow a = 1105$ подходит.

При $\Gamma a = \Gamma > \Gamma_2 \text{ max}$ точек пересечения не будет $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ не подходит.

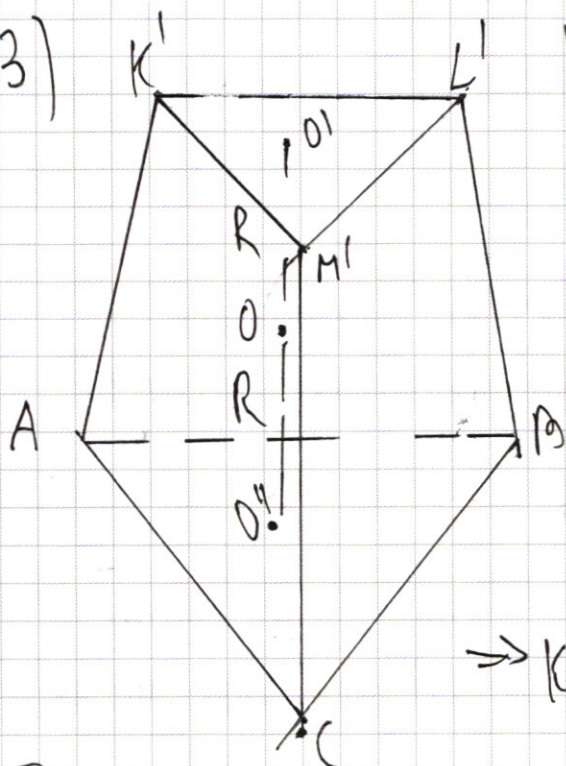
ответ: $a = 49$; $a = 1105$



Две плоскости, касающиеся
сферы и перпендикулярные SO
будут отсекал от трёхгранного
угла усечённую пирамиду.

Изобразим ее:

3)

из условия: $SK'L'M' = 9; S_{ABC} = 16$

$$\frac{S_{K'L'M'}}{S_{ABC}} = \frac{9}{16} = K^2 \Rightarrow$$

 $K'L'M' \sim ABC$ (м.с. оде касания,

перпендикулярны и

все точки лежат на

сторонах треугольника $\Rightarrow$

$$\Rightarrow K_{подобия} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{K'L'}{AB} = \frac{K'M'}{AC} = \frac{M'L'}{BC} = \frac{3}{4}.$$

Т.к. эта усеченная пирамида, или гострота сь гострота,

$$\text{то } SK' = \frac{3}{4} SA; SL' = \frac{3}{4} SB; SM' = \frac{3}{4} SC;$$

H пирамиды $ABCS = h$ ~~то~~;H пирамиды $K'L'M'S = h - 2R$ $\Rightarrow$ в силу симметрии

$$\frac{h-2R}{h} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4h-8R=3h \Rightarrow h=8R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{отрезок } SO = h - R = 7R.$$

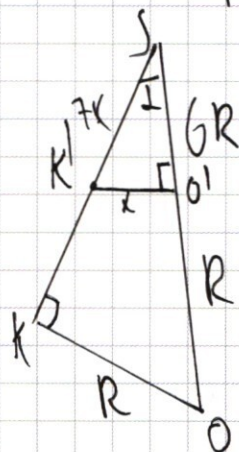
Ураваим $\triangle SOK$: K-точка касания $\Rightarrow OK \perp SK; OK=R$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5 | Ещё раз рассмотрим $\triangle SOK$, отметив в нём точку K'



плоскость $K'L'M' \perp OO' \Rightarrow$

$$\Rightarrow K'O' \perp OO'; OO' = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SO' = 7R - R = 6R$$

$$\sin \alpha = \frac{K'O'}{SK'} = \frac{KO}{SO} = \frac{1}{7} \Rightarrow K'O' = \frac{1}{7} SK'$$

$$\triangle SK'O' \quad 49x^2 = x^2 + 36R^2 \quad 48x^2 = 36R^2 \quad 4x^2 = 3R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SK' = \frac{7R\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{SK'}{SK} = \frac{7R\sqrt{3}}{8R\sqrt{3}} = \frac{7}{8} = k_1$$

$$SK = R\sqrt{48} = 4\sqrt{3}R$$

$$\frac{SK'L'M'}{SKLM} = k_1^2 = \left(\frac{SK'}{SK}\right)^2 = \frac{49}{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SKLM = \frac{64}{49} SK'L'M' = \frac{64}{49} \cdot 9 = \frac{576}{49}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$; $SKLM = \frac{576}{49}$

N2.

$$\frac{\cos 7x + \cos 3x}{2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x} + \frac{\sin 7x - \sin 3x}{2 \cdot \cos 5x \cdot \sin 2x} + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$2 \cdot \cos 5x (\cos 7x + \sin 7x) + \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\sin 2x + \cos 2x)(2\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$1) \sin 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k; k \in \mathbb{Z}}$$

$$2) 2\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 5x = \sin 2x - \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 3x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \sin 3x \cdot \sin 2x = \sin 2x - \cos 2x$$

$$\cos 2x(\sqrt{2} \cdot \cos 3x + 1) = \sin 2x(\sqrt{2} \cdot \sin 3x + 1)$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos 3x + 1}{\sqrt{2} \cdot \sin 3x + 1} = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos x(2\cos 2x - 1) + 1}{\sqrt{2} \cdot \sin x(2\cos 2x + 1) + 1}$$

~~Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k; k \in \mathbb{Z}$~~

~~Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k; k \in \mathbb{Z}$~~

~~a) $\cos 3x = \sin$~~

НЗ.

$$\left(1 - \frac{x^7}{y}\right)^{\ln(4)} = x^{2 \ln(kg^2)} \quad (1)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad (2)$$

$$1) \text{ ОАЗ: } 1) y < 0;$$

$$2) xy^2 > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$2) \text{ Кайгем формул (2);}$$

$$y^2 + 2y(k+2) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D = (k+2)^2 + 3x^2 - 12x = 4(k-1)^2 \Rightarrow y_1 = -x - 2 + k - 2 = x - 4$$

$$\Rightarrow y_2 = -x - 2 - 2k + 2 = -3x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

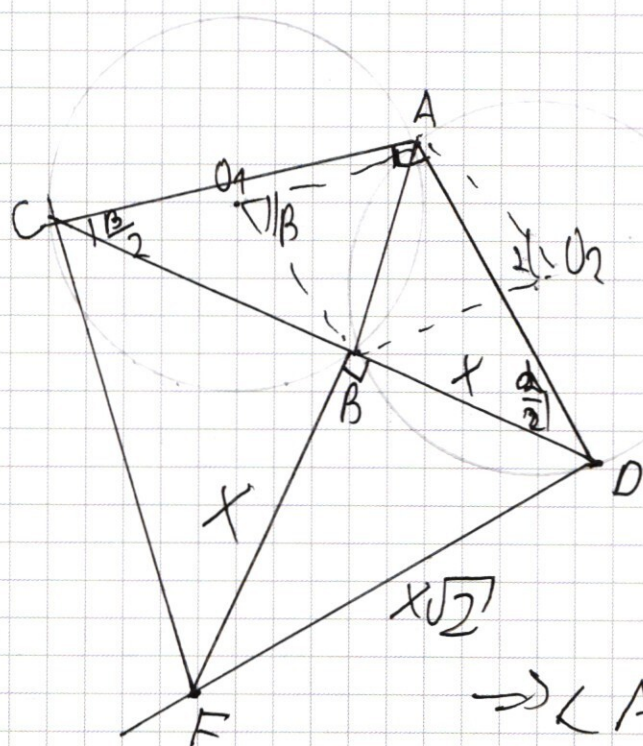
$$(c): S_C = 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{31}$$

$$S_{\text{общ}} = S_A + S_B + S_C = 13 \cdot 3^{31} + 13 \cdot 3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{31} =$$

$$= 14 \cdot 3^{31} + 3^4 (13 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{26})$$

$$\text{Ответ: } S_{\text{общ}} = 14 \cdot 3^{31} + 3^4 (13 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{26})$$

№6.



точки A и B -
точки пересечения окружности

$$\triangle BPF; \angle B = 90^\circ;$$

$$BF = BO = R \Rightarrow FD = R\sqrt{2}$$

$$\angle C = \frac{\beta}{2}; \angle D = \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\beta + \alpha}{2} = 90^\circ \Rightarrow \beta + \alpha = 180^\circ;$$

радиусы равны $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle AO_1B = \triangle AO_2B \text{ (по 3 сторонам)}$$

$$\Rightarrow \angle AO_1B = \beta = \angle AO_2B = \alpha \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle C = 45^\circ; \angle D = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{AB = R\sqrt{2}}$$

$$AB - \text{диам-тр } \triangle CAD \Rightarrow AB - \text{медiana } \triangle CAD \text{ (м.р. от } \angle C \text{)}$$

$$\Rightarrow CB = BD \Rightarrow \triangle FCB = \triangle FBD \Rightarrow FC = FD = R\sqrt{2}.$$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 3 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 3(31 - x) + 3^{28} \cdot x \end{cases}$$

Найдём два крайних пересечющихся случая:

$$\underbrace{3^x}_{(1)} + \underbrace{4 \cdot 3^{28}}_{(2)} = \underbrace{3^{28} \cdot x}_{(3)} + \underbrace{3(31 - x)}_{(4)}$$

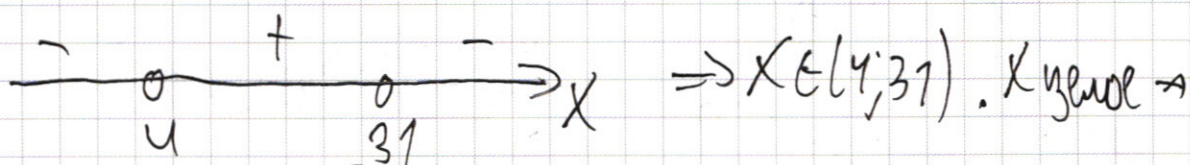
1) Проверим условие (1) $\Rightarrow 4 \cdot 3^{28} = x \cdot 3^{28} \Rightarrow x = 4$

Проверка: $3^4 + 4 \cdot 3^{28} = 4 \cdot 3^{28} + 3 \cdot 27$ — верно $\Rightarrow$ мы нашли один край (но он не подходит)

2) Проверим $x = 31$ (запишем (4))

$$3^{31} + 4 \cdot 3^{28} = 31 \cdot 3^{28} + 3 \cdot 0$$

$$27 \cdot 3^{28} = 3^{31} \Rightarrow x = 31 \text{ верно} \Rightarrow \text{это еще один край}$$



$$\Rightarrow \boxed{x \in [5; 30]}$$

при данном x будет получено:

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{28} & (1) \\ y \leq 3(31 - x) + 3^{28} \cdot x & (2) \end{cases} \quad S = (2) - (1) = \underbrace{3^{28}(x - 4)}_{(a)} + \underbrace{3(31 - x)}_{(b)} - \underbrace{3}_{(c)}$$

3) Просуммируем все (a); (b); (c) для подходящих x ($x \in [5; 30]$)

$$(a): S_a = 3^{28} + 2 \cdot 3^{28} + \dots + 26 \cdot 3^{28} = 27 \cdot 13 \cdot 3^{28} = 13 \cdot 3^{31}$$

$$(b): S_b = 3 \cdot 26 + 3 \cdot 25 + \dots + 3 \cdot 1 = 3 \cdot 27 \cdot 13 = 13 \cdot 3^4$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

по формуле син-си:

$$AB = \frac{2AC \cdot AD}{AC + AD} \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow AC \cdot AD = A(1 + AD);$$

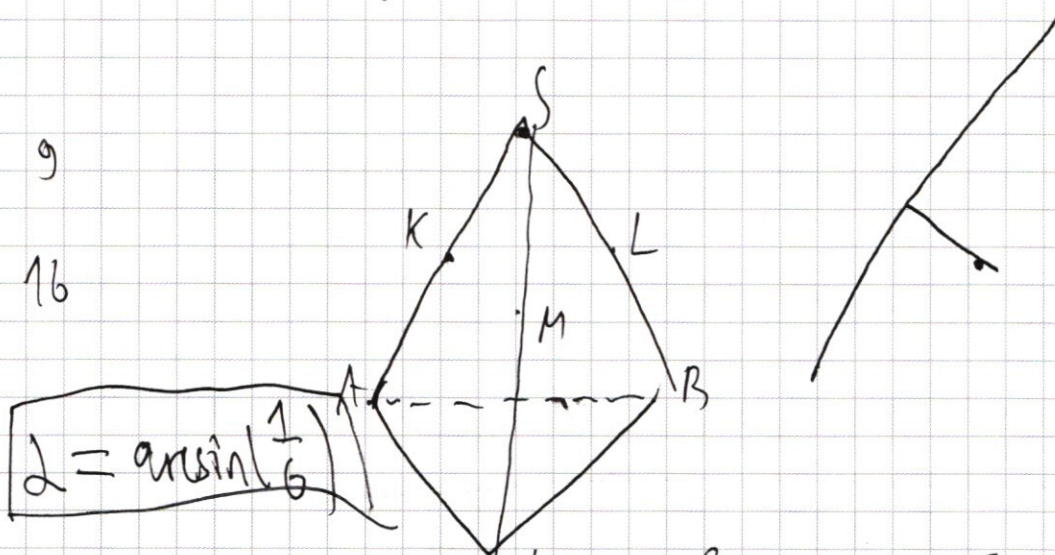
$$\Rightarrow AC = AD = R \Rightarrow CD = R\sqrt{2} \Rightarrow CB = \frac{R\sqrt{2}}{2} = x;$$

$$CF = CB \cdot \sqrt{2} = R$$

Ответ: $CF = R$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$



$$\frac{S_{K'LM}}{S_{ABL}} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{K'L'}{AB} = \frac{K'H'}{AL} = \frac{ML'}{BL}$$

$$= \frac{3}{4} \times$$

$$\Rightarrow SK' = \frac{3}{4} AL;$$

$$SL' = \frac{3}{4} BL;$$

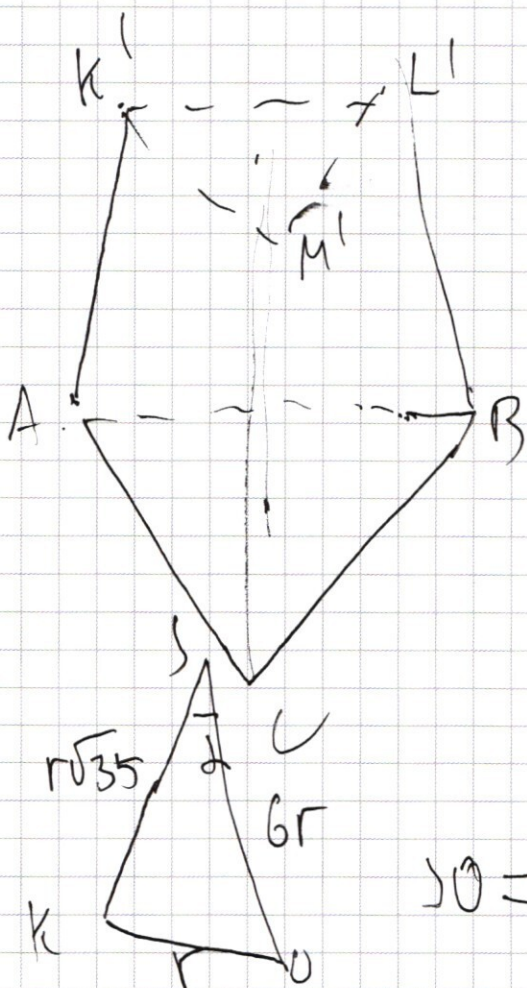
$$SM' = \frac{3}{4} ML;$$

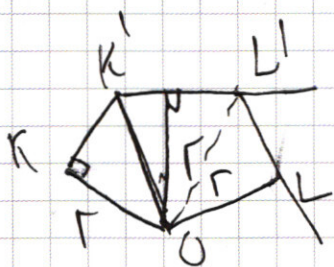
$$\frac{h-2r}{n} = \frac{3}{4} \times$$

$$\Rightarrow 4h - 8r = 3h \quad \leftarrow$$

$$\Rightarrow h = 8r$$

$$SO = 8r - 2r = 6r$$





$$OO' = r; \quad O'S = 6r \approx$$

$$\Rightarrow OS = 7r \approx$$

$$\Rightarrow \frac{O'S}{OS} = \frac{6}{7}$$

$$y^2 + 2y(x+2) - 3x^2 + 11x$$

$$D = (x+2)^2 + 3x^2 - 11x = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2$$

$$y_1 = -x-2 + 2(x-1) = x-4$$

$$y_2 = -x-2 - 2(x-1) = -3x$$

$$043: \begin{cases} 1) y < 0; \\ 2) xy^2 > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{(-x^7) \ln(-y)}{y \ln(-y)} = x^2 \cdot \ln(xy^2)$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

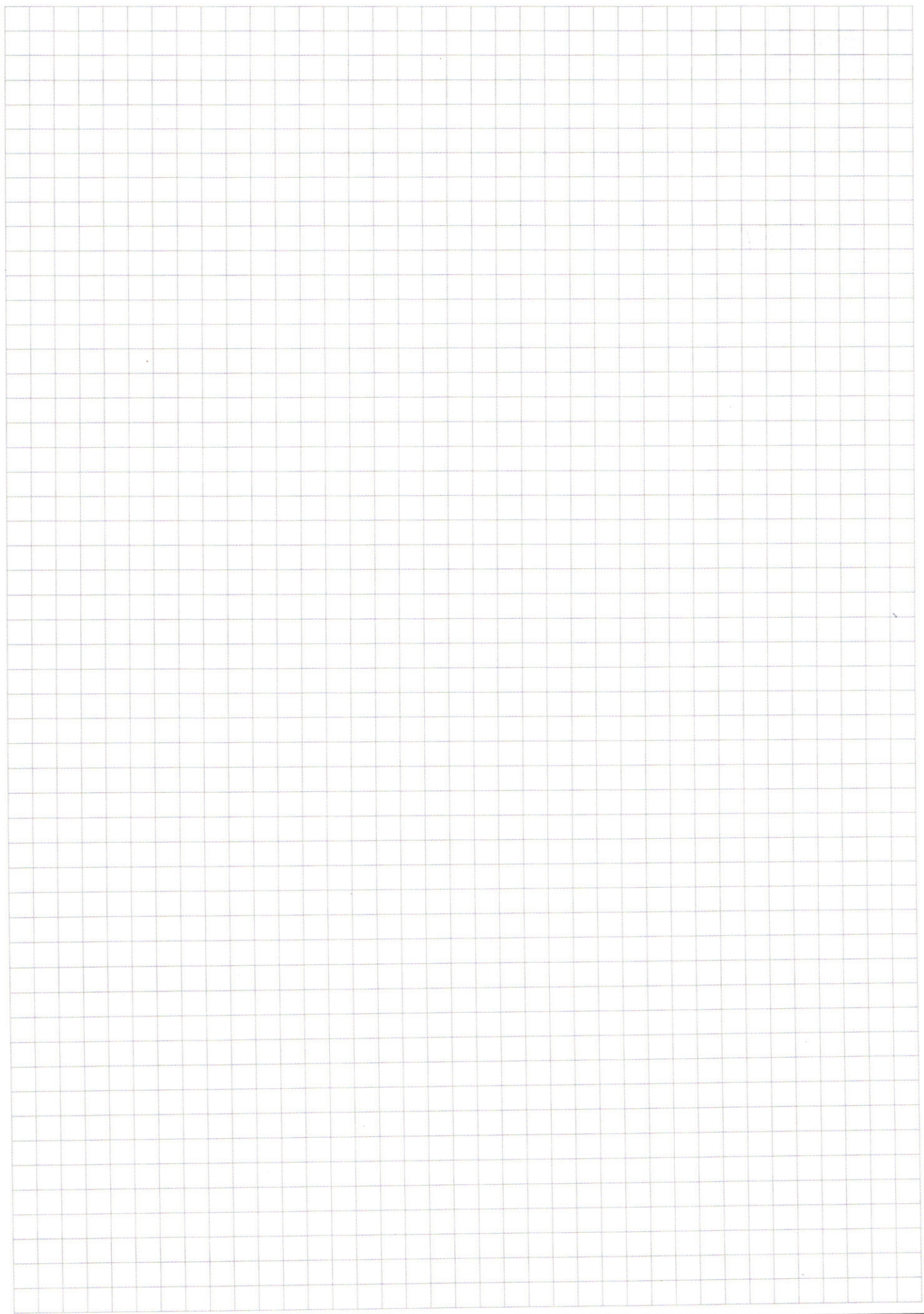
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

→ @FB me

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow x_{\max} = 31 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [4, 31]$$

Найдём коэф-ты y для каждого x

1) $x=5$

$$y > 3^5 + 4 \cdot 3^{20}$$

$$y > 3^5 + 4 \cdot 3^{20}$$

$$y \leq 93 + 5 \cdot 3^{20} - 15$$

$$y \leq 78 + 5 \cdot 3^{20}$$

$$\text{коэф-ты: } 78 + 5 \cdot 3^{20} - 3^5 - 4 \cdot 3^{20} = 3^{20} + 3(31-x) \cdot 3^5$$

2) $x=6$

$$y > 3^6 + 4 \cdot 3^{20}$$

$$y \leq 93 + 6 \cdot 3^{20} - 18$$

$$\Rightarrow \text{коэф-ты:}$$

$$6 \cdot 3^{20} + 93 - 18 - 3^6 - 4 \cdot 3^{20} =$$

$$= 2 \cdot 3^{20} + 93 - 18 - 3^6$$

$$\text{коэф-ты} =$$

(1)

(2)

(3)

В общем виде: $S = (x-4) \cdot 3^{20} + 3(31-x) \cdot 3^k$
просуммируем все (1); (2); (3) для $x \in [4, 31] \Rightarrow x \in [5, 31]$

$$(1); 3^{20} + 2 \cdot 3^{20} + \dots + 26 \cdot 3^{20} =$$

$$= 27 \cdot 13 \cdot 3^{20} = 13 \cdot 3^{21}$$

$$\frac{1+26}{2} \cdot 26 = 27 \cdot 13 \cdot 3$$

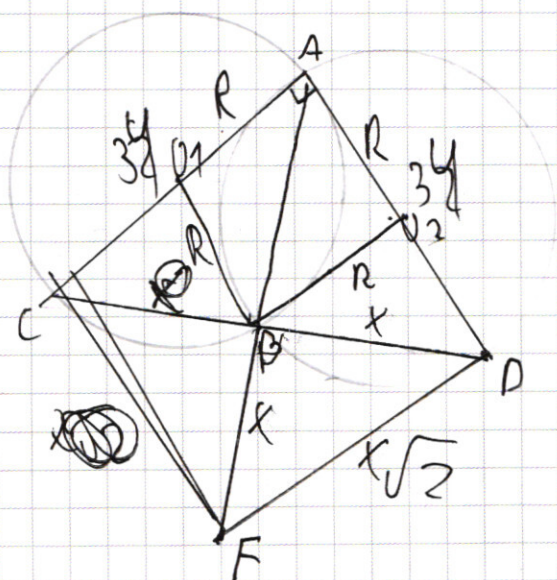
$$(2): S = 3 \cdot 26 + 3 \cdot 25 + \dots + 3 \cdot 1 \neq 3 \cdot 27 \cdot 13 = 13 \cdot 3^4$$

$$\frac{1+26}{2} \cdot 26 =$$

$$(3): S = 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{31}$$

$$S_{\text{одн}} = 13 \cdot 3^{31} - 13 \cdot 3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{31}$$

нб.



м.р. А - точка
пересечения;

$AC \perp AB$ т.к.

AO - радиусом,

и OA - перпенд. к хорде
каким $\rightarrow CA$ пройдет

через центр; по аналогии

AD пройдет через $O_2 \rightarrow$

$$\Rightarrow CA = AD = 3x$$

$BF \parallel CD$; $BF = BD \Rightarrow \triangle FBD$ - равнобедр. и равно $\rightarrow$

$$\Rightarrow FD = x\sqrt{2};$$

$\triangle BO_1A = \triangle BO_2A$ (по 3 сторонам) $\Rightarrow AB$ - бис-ца $\angle CAD \rightarrow$

$\Rightarrow$ это бис-ца равнобедренно прилежащ. треугольника $\rightarrow$

$\rightarrow$ еще и медиана, и высота $\Rightarrow AB = CB = BD = \frac{3x\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow \text{при } r = \sqrt{113} \Rightarrow a = 113$$

точка касания будет больше, чем 2

т.е. где окружности пересекутся всегда
в двух точках и где - в одной

3) проверим, когда будет максимум

ширины касания и окружностей (изнутри)

и т.д.

$$r = \rho y_1 = \rho y_2 = \sqrt{24^2 + 23^2} \quad | \text{ 6 точек касания}$$

$$\Rightarrow a = 24^2 + 23^2 = 576 + 529 = \boxed{1105}$$

Ответ: $\boxed{a = 49; a = 1105}$

N7.

$$y > 3^{14} \cdot 3^{18}$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 3 \cdot 31 + 3(3^{27} - 1) \cdot x$$

$$y \leq 3 \cdot 31 + 3^{28} \cdot x - 3x$$

$$y \leq 3(31 - x) + 3^{28} \cdot x$$

Найдём минимальную ширину $\Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 4$. Проверим:

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 3^{28} \cdot x + 3(31 - x)$$

$$\begin{cases} y > 3^4 + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 3^4 + 4 \cdot 3^{28} \end{cases} \Rightarrow \text{нет корней} \Rightarrow \boxed{x > 31}$$

$$\begin{cases} y > 3^k + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 3(31-k) + 3^{28} \cdot x \end{cases}$$

для $k=5$ $y > 3^5 + 4 \cdot 3^{28}$

$$y > 243 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 3 \cdot 26 + 5 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 78 + 5 \cdot 3^{28}$$

нужно показать, при каком x это будет уже невозможно

для этого $3^k + 4 \cdot 3^{28} > 3(31-k) + 3^{28} \cdot x$

$$\Rightarrow 3^{28}(4-x) > 3(31-k) - 3^k$$

$$3^{28}(31-k-27) > 3(31-k) - 3^k$$

$$-3^{31} + 3^{28}(31-k) > 3(31-k) - 3^k$$

$$\Rightarrow 3(31-k)(3^{27}-1) > 3^{31}-3^k$$

исследуем второй крайний случай (когда)

$$3^k + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3(3^{27}-1) \cdot k$$

$$\Rightarrow 3^k + 4 \cdot 3^{28} = 93 - 3k + 3^{28}k$$

это будет при $93-3k \geq 0 \Rightarrow \boxed{k=31}$

проверим: $3^{31} + 4 \cdot 3^{28} = 31 \cdot 3^{28}$
 $27 \cdot 3^{28} + 4 \cdot 3^{28} = 31 \cdot 3^{28}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$64827 = 3 \cdot 21609 = 3 \cdot 3 \cdot 7203 =$$

$$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2401 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 343 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 343$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ \times 2907 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ \times 189 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3087 \\ + 27440 \\ + 34300 \\ \hline 64827 \end{array}$$

1..18 343 - простое число,
которое нельзя представить в виде
произведения цифр от 0 до 9,

а цифра восьмизначного числа не может быть
343 $\Rightarrow$ таких чисел нет

№2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$\sin 7x - \sin 3x$$

~~$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b$$~~

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) =$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cdot \cos a \cdot \cos b$$

$$= 2 \cdot \cos a \cdot \sin b$$

$$a = 5x, b = 2x \Rightarrow \cos 7x + \cos 3x = 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\Rightarrow \sin 7x - \sin 3x = 2 \cdot \cos 5x \cdot \sin 2x$$

$$2 \cdot \cos 5x (\sin x + \cos 2x) + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$2 \cdot \cos 5x (\sin 7x + \cos 7x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

~~$\sin x + \cos x$~~

$$2 \cdot \cos 5x (\sin 7x + \cos 7x) + \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

$$1) \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\sin 7x = -\cos 7x$$

$$\tan 7x = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 5x + \cos 7x - \sin 7x = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 3x \cdot \cos 7x - \sqrt{2} \cdot \sin 3x \cdot \sin 7x + \cos 7x - \sin 7x = 0$$

$$\cos 7x (\sqrt{2} \cos 3x + 1) = \sin 7x (\sqrt{2} \sin 3x + 1)$$

$$\cos 3x = \cos x (2 \cos 2x - 1)$$

$$\sin 3x = \sin x (2 \cos 2x + 1)$$

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$\sin x (3 - 4 \sin^2 x)$$

$$(\cos x = 1 - 2 \sin^2 x)$$

$$2 \cos x = 2 - 4 \sin^2 x$$

~~$\cos 7x (\sqrt{2} \cos 2x (2 \cos^2 x - 1) + 1)$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) x \geq y - 8 \quad +x$$

$$x + y + 8 + x - y + 8 = 16$$

$$x \geq 0$$

$$2) + -$$

$$x + y + 8 - x + y - 8 = 16$$

$$y = 8$$

$$3) - +$$

$$-x - y - 8 + x - y + 8 = 16$$

$$-2y = 16$$

$$y = -8$$

$$3) - -$$

$$-x - y - 8 - x + y - 8 = 16$$

$$-2x = 32 \quad x = -16$$

$$1) \begin{cases} x + y + 8 \geq 0 & x \geq -y - 8 & 0 \geq -y - 8 & y \geq -8 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y + 8 \geq 0 & x \geq y - 8 & 0 \geq y - 8 & y \leq 8 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y + 8 \geq 0 & x \geq -y - 8 \end{cases}$$

$$-x - y - 8 < x - y + 8 \leq 0 \quad x \leq y - 8$$

$$x \in [-16; 0]$$

$$3) \begin{cases} x + y + 8 \leq 0 & x \leq -y - 8 \end{cases}$$

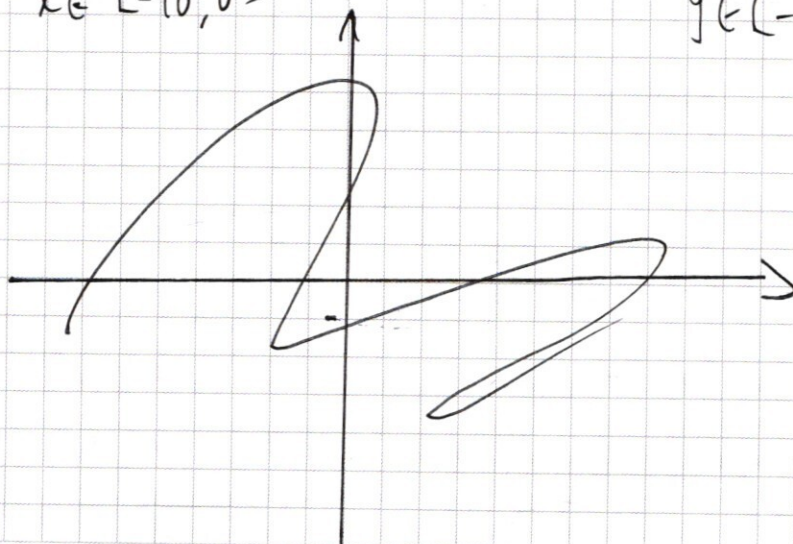
$$\begin{cases} x - y + 8 \geq 0 & x \geq y - 8 \end{cases}$$

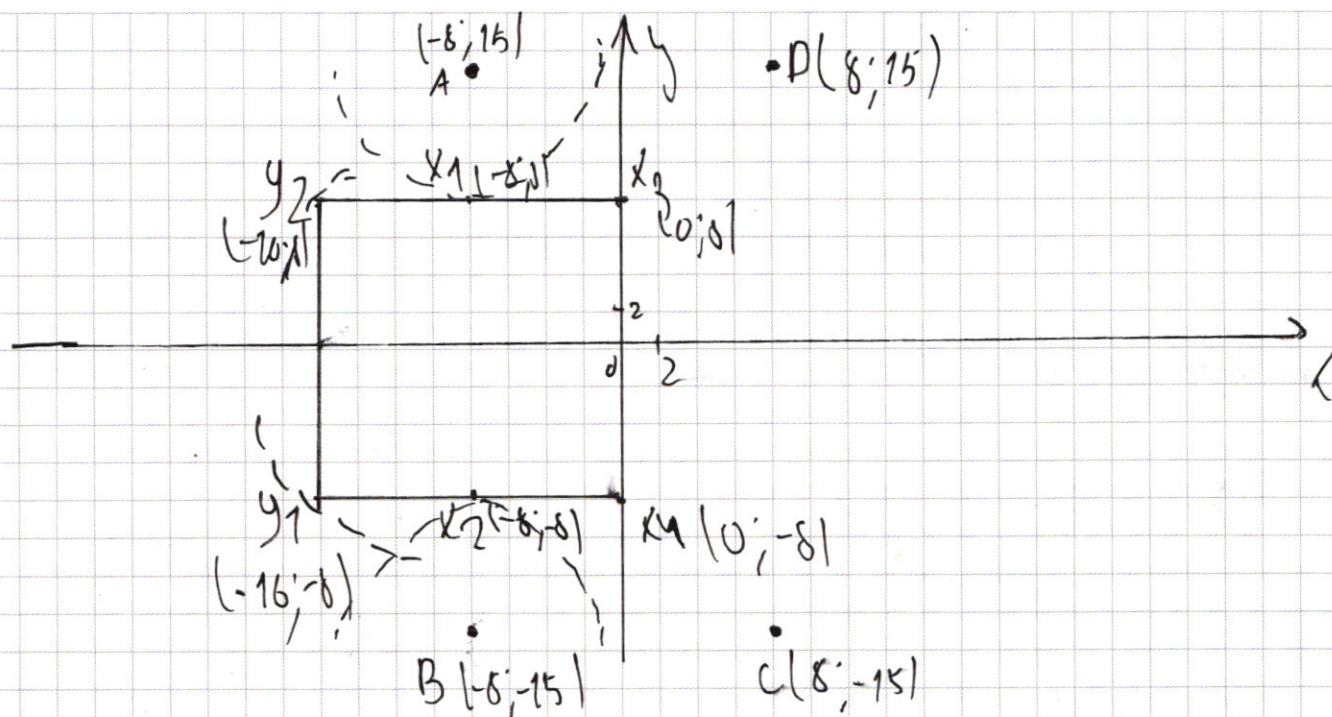
$$x \in [-16; 0]$$

$$4) \begin{cases} x + y + 8 \leq 0 & x \leq -y - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 8 \leq 0 & x \leq y - 8 \end{cases}$$

$$y \in [-8; 8]$$





точки A и B симметричны относительно оси OY;

точки C и D симметричны относительно оси OX;

т.е. если будет одна точка касания, то будет и другая.

Т.е. два решения, но окружность касается снаружи

$$AK_1 = BK_2 = 7; \quad K_3D = K_4C = \sqrt{8^2 + 7^2} =$$

(при этом радиусе окружности с центром A и B касаются вогнутости)

$$= \sqrt{113}$$

(при этом радиусе окружности с центром C и D касаются вогнутости).

$$1) AK_1 = BK_2 = 7 \Rightarrow \boxed{a = 7^2 = 49}$$

2) проверим, будет ли окружность с центром в A и окр. с центром в пересечении касаться при радиусе $\sqrt{113}$

тогда не пересекают: $r > AK_1 \Rightarrow r > \sqrt{64 + 23^2}$, что $>$ чем $\sqrt{113} \Rightarrow$