

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$64827 = 3^3 \cdot 7^4$, значит подходящие по условию заданы числа содержат в своей записи либо 4 семерки, 3 тройки и единицу, либо 4 семерки, 8 двоек, 1 тройку и 2 единицы.

1) Число вида 77773331 : поставим на 8 мест 4 семерки (C_8^4), на оставшиеся 4 места 3 тройки (C_4^3), а на оставшееся место поставим единицу. Кол-во способов:

$$C_8^4 \cdot C_4^3 = 70 \cdot 4 = 280$$

2) Число вида 77773911 : на 8 мест 4 семерки (C_8^4), на оставшиеся 4 места 2 единицы (C_4^2), на одно из оставшихся двух поставим тройку (C_2^1), для двоек осталось одно место. Кол-во способов: $C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 = 70 \cdot 6 \cdot 2 = 840$

Общее кол-во чисел: $840 + 280 = 1120$

Ответ: 1120 чисел.

№2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos x - \sin x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos x - \sin x)) = 0$$

1) $\cos 2x + \sin 2x = 0$

2) $2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos x - \sin x) = 0$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2\cos x \cdot \sin x = 0$$

Если $\sin^2 x = 0$, то $\cos^2 x = 1$

$$1 - 0 + 0 \neq 0; \text{ если } \sin^2 x \neq 0,$$

то разделим на $\sin^2 x$:

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2 \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = 0$$

$$\operatorname{ctg}^2 x + 2\operatorname{ctg} x - 1 = 0$$

$$a = \operatorname{ctg} x$$

$$a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$a = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\operatorname{ctg} x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = \operatorname{arccotg}(-1 + \sqrt{2}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \operatorname{arccotg}(-1 - \sqrt{2}) + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x_1 = \operatorname{arccotg}(-1 + \sqrt{2}) + \pi n$; $x_2 = \operatorname{arccotg}(-1 - \sqrt{2}) + \pi m$; $x_3 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{3}$;

$$x_4 = \frac{5\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}.$$

№3

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(\operatorname{ctg}^2)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

Разберём второе уравнение: $(3x+y)(y-x+4) = 0 \Rightarrow y = -3x, y = x-4$

Первое: возведём, что $a = -y$, тогда

$$x^{2\ln a} = x^{2\ln(xa^2)} \cdot a^{\ln a}$$

$$e^{2\ln x \cdot \ln a} = e^{2\ln x \cdot \ln(xa^2)} \cdot e^{\ln^2 a}$$

$$2 \cdot \ln x \cdot \ln a = 2\ln x \cdot \ln(xa^2) + \ln^2 a$$

$$2 \ln x \cdot \ln a = 2\ln x (\ln x + 2\ln a) + \ln^2 a$$

$$3\ln x \cdot \ln a = 2\ln^2 x + \ln^2 a$$

$$\cos 5x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2x\right) = 0$$

$$\cos 5x + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 5x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi - 5x)$$

$$1) \quad x + \frac{\pi}{4} = \pi - 5x + 2\pi k$$

$$x_3 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \quad x + \frac{\pi}{4} = 5x - \pi + 2\pi k$$

$$x_4 = \frac{5\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $\ln a = 0$, то $a = 1$,

$\ln x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, что не подходит для второго уравнения
это не подходит для второго
Если $\ln a \neq 0$, то можно разделить на $\ln^2 a$:

$$3 \frac{\ln x}{\ln a} = 2 \frac{\ln^2 x}{\ln^2 a} + 1$$

$$t = \frac{\ln x}{\ln a}, \text{ тогда:}$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$t = 1, \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln(-y)} = \frac{1}{2}$$

$$1) \frac{\ln x}{\ln(-y)} = 1$$

$$x = -y; y = -x$$

$$2) \frac{\ln x}{\ln(-y)} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = -y; y = -x^2$$

Решим систему: либо $-x = -3x$, тогда $x = y = 0$, что не
подходит, т.к. по ОДЗ $y < 0$, либо $-x = x - 4$, тогда $x = 2, y = -2$;
либо $-x^2 = -3x$, тогда $x = 3, y = -9$; либо $-x^2 = x - 4$, тогда $x = 0$

Ответ: $(2, -2); (3, -9)$

№5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ |x-8|^2 + (y-15)^2 = a \end{cases}$$

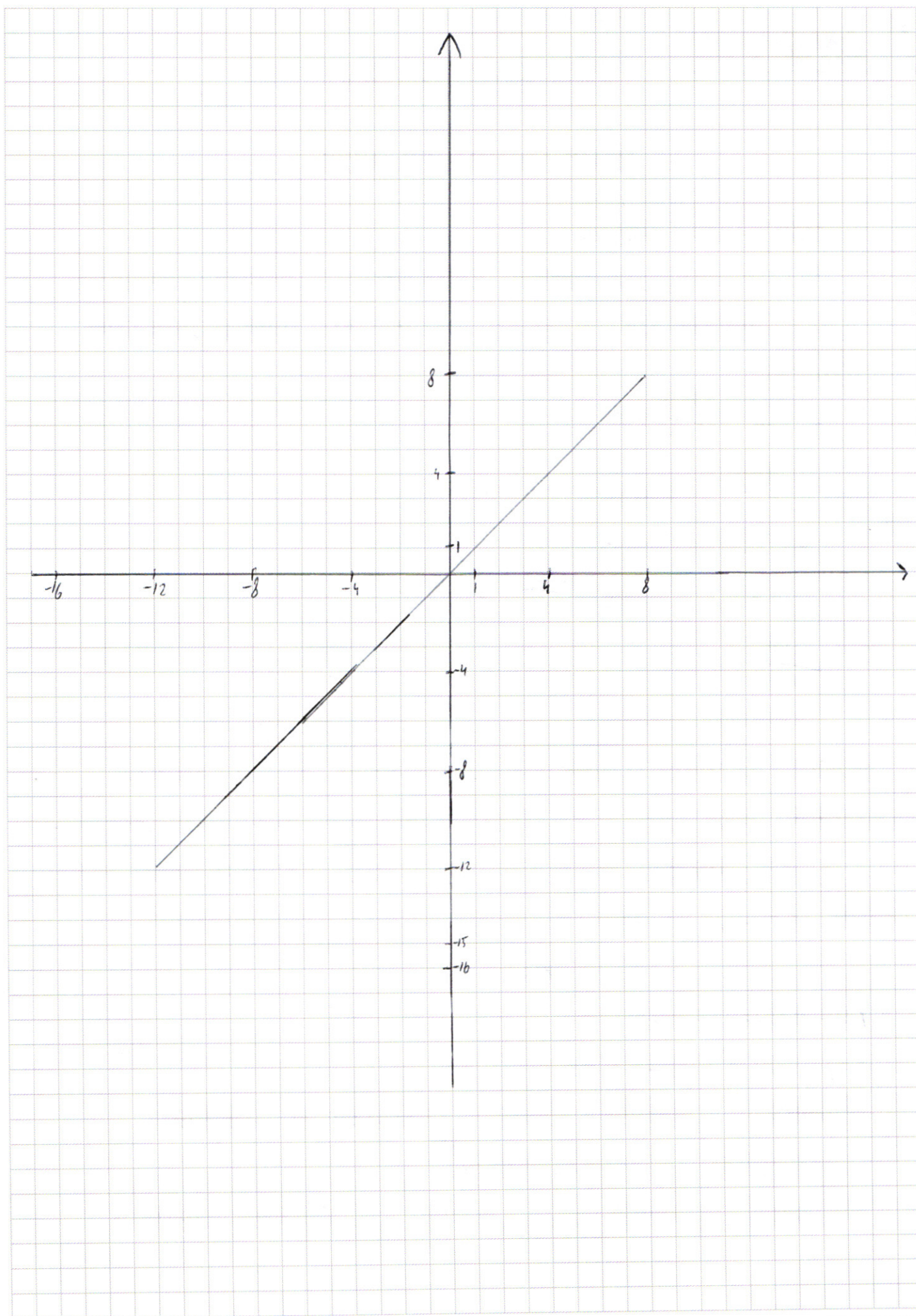
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ |x-8|^2 + (y-15)^2 = a \end{cases}$$

Нарисуем решение первого уравнения на графике:

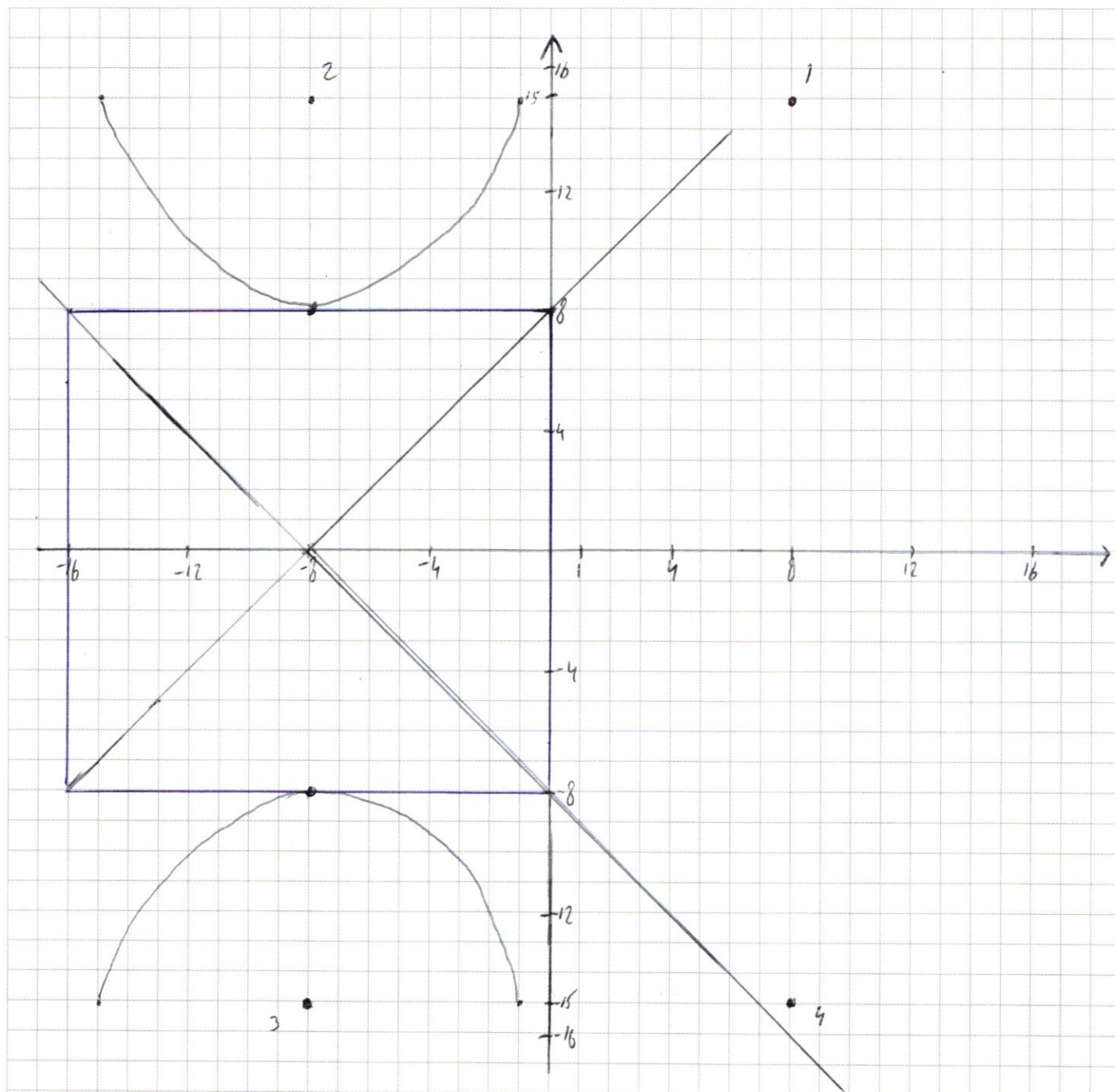
(подходящие (x, y) линией ручкой)

Отметим центры окружностей из второго уравнения:

1, 2, 3, 4



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Точки 2 и 3 симметричны относительно Ox ; если окружность с центром в точке 2 будет иметь n общих точек с квадратом, то окружность с центром в точке 3 будет иметь также n точек; Единственный вариант при

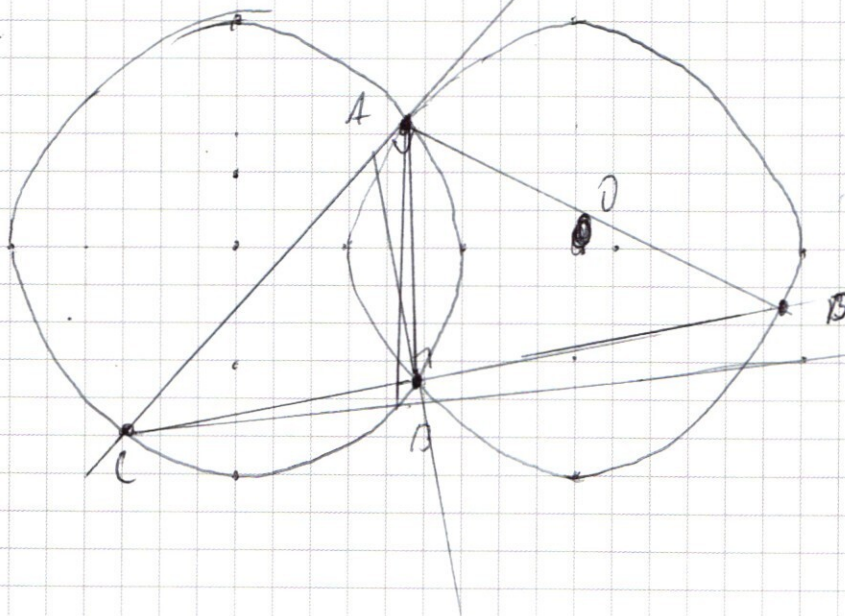
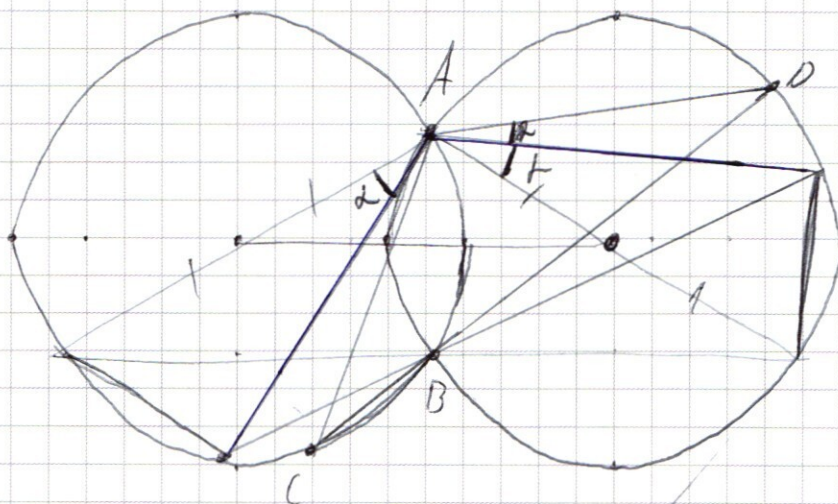
$a = 49$:

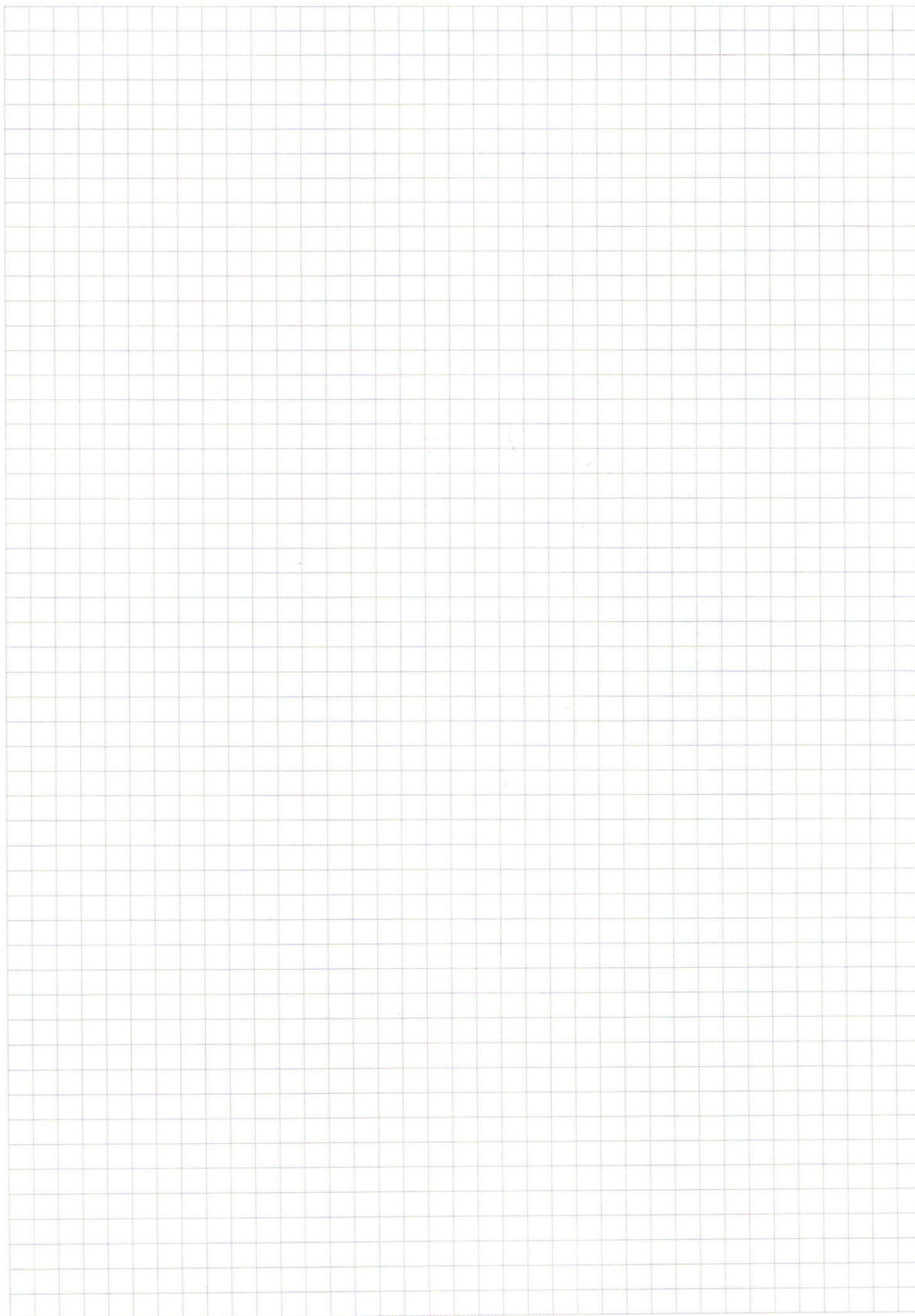
Ответ: при $a = 49$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$93 + 3(3^{27} - 11)x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28}x - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

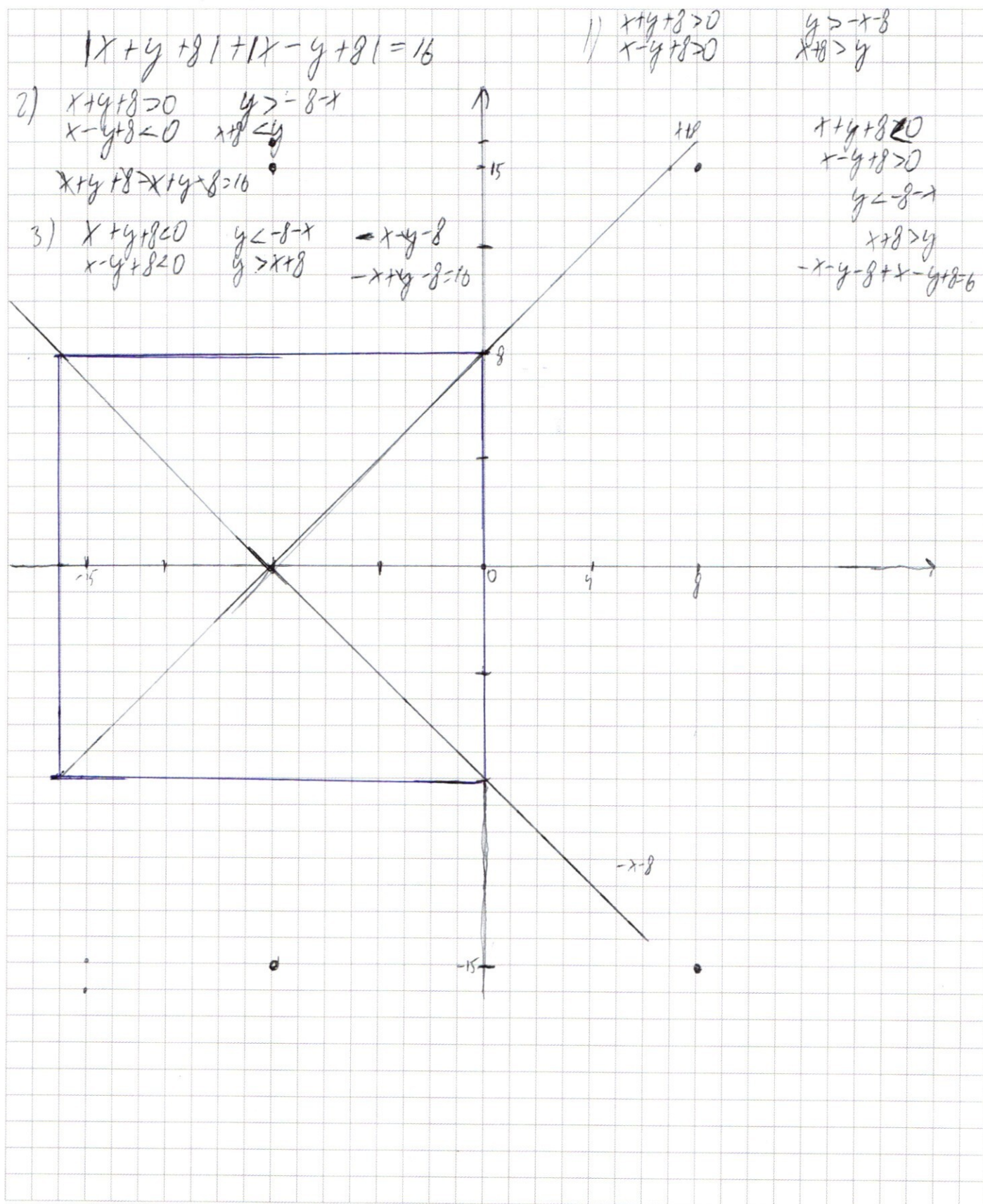


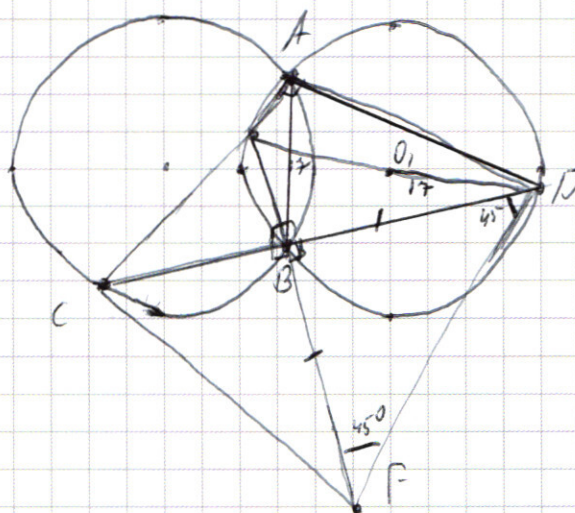
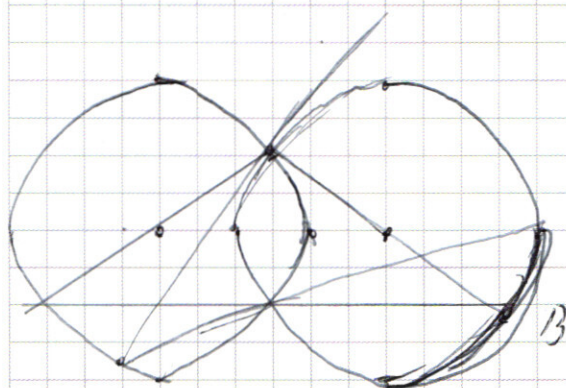


☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3911

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 0} \\ 63 \\ \hline 18 \\ 12 \\ \hline 6 \\ 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 777 \\ 777 \\ 777 \\ 777 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \overline{) 3} \\ 720 \\ \hline 3 \\ 240 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 03 \\ 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$64827 = 3^3 \cdot 74$$

$$\begin{array}{r} 1139 \\ 193 \\ \hline 9113 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 77 \\ 77 \\ 77 \\ 77 \end{array}$$

$$x_4^2 + x_4^2 = \frac{4}{2 \cdot 2} + \frac{4}{2 \cdot 2} = 6 + 6 = 12$$

$$\begin{array}{r} 2233 \\ 7373 \\ 7373 \end{array}$$

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$C_4^3 = 4$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 56$$

$$33377771$$

$$39777711$$

$$70 \cdot 4 \cdot 3 + 70 \cdot 4 = 280 \cdot 4 = 1120$$

$$C_8^4$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin \frac{7-3}{2} \cdot \cos \frac{7+3}{2}$$

$$\sin L - \sin B = 2 \sin \frac{L-B}{2} \cdot \cos \frac{L+B}{2}$$

$$1) \cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cos x \sin x = 0$$

$$\sin(L-B) = \frac{\sin(L+B) + \sin(L+B)}{2}$$

$$= \sin(L+B) - \sin(L-B)$$

$$\sin L \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos L$$

$$\sin L \cdot \cos B - \sin B \cdot \cos L$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x \sin x - \sin^2 x = 0 \quad 2 \sin L \cdot \cos B = \sin(L-B) + \sin(L+B)$$

$$\tan^2 x + 2 \tan x - 1 = 0 \quad \sin 7x + \sin(3x) = 2 \sin 2x \cdot \cos 5x$$

$$a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\cos L \cdot \cos B = \frac{\cos(L+B) + \cos(L-B)}{2}$$

$$\begin{array}{l} L+B=3 \\ L-B=7 \\ 2L=4 \\ L=2 \\ B=-5 \end{array}$$

$$= -1 \pm \sqrt{2}$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$x_1 = \arccos(-1 + \sqrt{2}) + \pi n$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$x_2 = \arccos(1 + \sqrt{2}) + \pi n$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$2\cos 5x + \sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = 0$$

$$\cos 5x + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = -\cos 5x$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi - 5x)$$

$$1) \quad x + \frac{\pi}{4} = \pi - 5x + 2\pi k$$

$$6x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{3}$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\cos(\pi - x) = \cos x$$



$$2) \quad x + \frac{\pi}{4} = 5x - \pi + 2\pi k$$

$$\frac{5\pi}{4} + 2\pi k = 4x$$

$$x = \frac{5\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$$

$$3. \quad \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(3x + y)(y - x) + 4(3x + y) = 0$$

$$(3x + y)(y - x + 4) = 0$$

$$1) \quad 3x + y = 0$$

$$y - x + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} -y &> 0 \\ y &< 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{\ln 2} &= e^{\ln 2 \ln 2} \\ \ln 2 \cdot \ln 2 &= \ln 2 \cdot \ln 2 \\ \ln 2 \cdot \ln 2 &= \ln 2 \cdot \ln 2 \end{aligned}$$

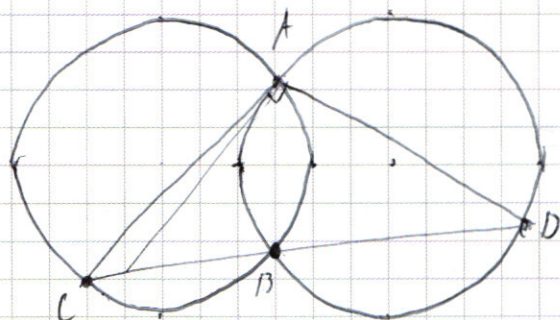
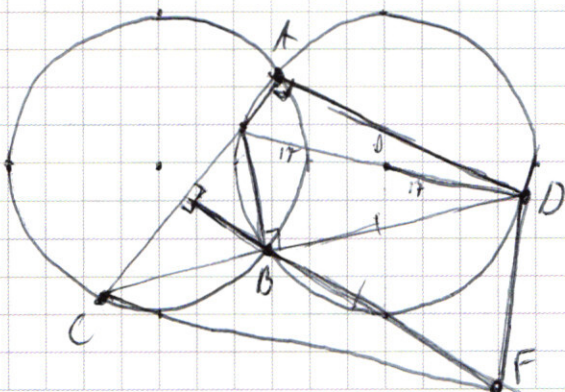
$$\begin{aligned} y &= -3x \\ y &= x - 4 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{x^{7\ln(-y)}}{y^{\ln(-y)}}\right) = x^{2\ln(xy^2)}$$

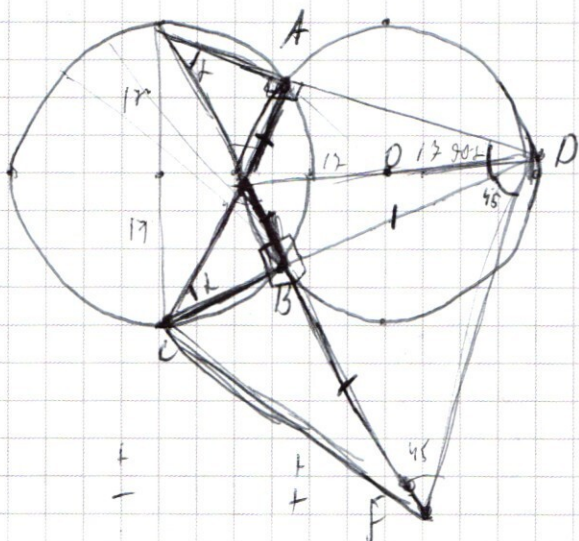
$$-x^{7\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \cdot y^{\ln(-y)}$$

$$1) \quad -x^{7\ln 3x} = x^{2\ln(3x^3)} \cdot (-3x)^{\ln 3x}$$

$$x^{7\ln 3x} = x^{2\ln 3x^3} \cdot (3x)^{\ln 3x}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x+y+8-x+y-8=16$$

$$y=8$$

$$\begin{aligned} x+y+8 &> 0 \\ x-y+8 &< 0 \\ y &> -x-8 \\ x+8 &< y \end{aligned}$$

$$2x+16=16$$

$$x=0$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$\begin{aligned} x+y+8 &< 0 \\ x-y+8 &< 0 \\ y &< -8-x \\ 3) \quad x+8 &< y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+8 &> 0 \\ x-y+8 &> 0 \\ 1) \quad y &> -x-8 \\ x+8 &> y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+8 &< 0 \\ x-y+8 &> 0 \\ 2) \quad y &< -x-8 \\ x+8 &> y \end{aligned}$$

$$-x-y-8-x+y-8=16$$

$$-2x-16=16$$

$$-2x=32$$

$$x=-16$$

$$2x-y-8+x-y+8=16$$

$$-2y=16$$

$$y=-8$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(1-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\left(\frac{3^7}{3^2}\right)^{\ln 9} = 3^{2\ln 243}$$

$$\left(\frac{x^2}{3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(3x)}$$

$$3^{7/\ln 9} = 3^{2\ln 243} \cdot 3^{2\ln 9}$$

$$3^{14/\ln 3} =$$

$$\left(\frac{2^7}{2}\right)^{\ln 2} = 2^{2\ln 8}$$

$$2^{6\ln 2} = 2^{6\ln 2}$$

$$x^{7\ln 3x} = x^{2\ln(3x)} \cdot (3x)^{\ln 3x}$$

$$x^{\ln 3^7 x^7 - \ln 3^2 x^6} = 3x^{\ln 3x}$$

$$x^{\ln 3^3 x} = (3x)^{\ln 3x}$$

$$x^{\ln 2^2 x} = (3x)^{\ln 3x}$$

$$\ln 2^2 x \cdot \ln x = \ln 3x \cdot \ln 3x$$

$$(3\ln 3 + \ln x) \cdot \ln x = (\ln 3 + \ln x)^2$$

$$\ln^2 x + 3\ln 3 \cdot \ln x = \ln^2 3 + 2\ln 3 \cdot \ln x + \ln^2 x$$

$$3\ln x = \ln 3 + 2\ln x$$

$$\ln x = \ln 3$$

$$\frac{x=3}{y=9}$$

$$\frac{\ln 3}{\ln 9} = \frac{\ln 3}{2\ln 3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\ln(x)}{\ln(1-y)} = 1 \quad \frac{\ln x}{\ln y} = \frac{1}{2} \quad x^2 = y$$

$$y^{\log y \log y}$$

$$y^{\frac{1}{\log y}}$$

$$y^{\ln y} = y^{\log y} e^{\ln^2 y}$$

$$\ln y \cdot \ln y = \ln^2 y$$

$$y^{\log y} = e^{\log y \cdot y}$$

$$e^{\log a b} = a^{\log b}$$

$$y = x - 4$$

$$\left(-\frac{x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)}$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(xy)} = x^{2\ln(xy^2)} = e^{2\ln^2(xy^2)}$$

$$\ln x \cdot 2\ln(xy)^2 = e^{\ln x \cdot 2\ln(xy)^2}$$

$$\ln x \cdot 7\ln(1-y)$$

$$x^{7\ln(1-y)}$$

$$e^{\ln x \cdot \ln(1-y)} = e^{\ln x \cdot \ln(xy)^2} \cdot e^{\ln^2(1-y)}$$

$$7\ln x \cdot \ln(1-y) = 2\ln x \cdot \ln(xy)^2 + \ln^2(1-y)$$

$$7\ln x \cdot \ln y = 2\ln x (\ln x + 2\ln y) + \ln^2 y$$

$$7\ln x \cdot \ln y = 2\ln^2 x + 4\ln x \ln y + \ln^2 y$$

$$3\ln x \ln y = 2\ln^2 x + \ln^2 y$$

$$2a^2 - 3a + 1 = 0$$

$$\frac{3 \pm 1}{4} = 1; \frac{1}{2}$$